www.pmoiras.weebly.com panmoiras@gmail.com 6932 946778

Μεθοδικά, απλά & κατανοητά...

Θέμα

Η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου που βρίσκεται σε κεντρικό δυναμικό δίνεται από

$$\psi = C\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\exp\left(-a\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

όπου $a > 0$.
(a) Εκφράστε το γωνιακό μέρος της κυματοσυνάρτησης συωαρτησει των ιδιοκαταστάσεων των L^2, L_z.
(b) Σε μετρήσεις των L^2, L_z ποια είναι τα δυνατά ζεύγη τιμών και ποια η πιθανότητα να βρεθεί το καθένα;

α) Από τις σφαιρικές συντεταγμένες:

$x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ με $0<r<\infty$, $0<\theta<\pi$, $0<\varphi<2\pi$

είναι: $x^2+y^2+z^2=r^2$ και $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r$

Οπότε η δοθείσα κυματοσυνάρτηση γίνεται:

$$\psi = C\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}e^{-a\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \rightarrow \psi = C\frac{\cancel{r}\sin\theta\cos\varphi}{\cancel{r}}e^{-ar} \rightarrow$$

$$\rightarrow \psi = Ce^{-ar}\sin\theta\cos\varphi \quad (1)$$

Αλλά: $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$ οπότε η (1) γίνεται:

$$\psi = \frac{C}{2}e^{-ar}\sin\theta\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right) \rightarrow \psi = \frac{C}{2}e^{-ar}\left(\sin\theta\, e^{i\varphi}+\sin\theta\, e^{-i\varphi}\right) \quad (2)$$

Όμως: $Y_1^{+1} = \sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\varphi} \rightarrow \sin\theta\, e^{i\varphi} = \sqrt{\dfrac{8\pi}{3}}\,Y_1^{+1} \quad (3)$

και $Y_1^{-1} = -\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{-i\varphi} \rightarrow \sin\theta\, e^{-i\varphi} = -\sqrt{\dfrac{8\pi}{3}}\,Y_1^{-1} \quad (4)$

www.pmoiras.weebly.com panmoiras@gmail.com 6932 946778

Άρα η (2) λόγω των (3), (4) δίνει:

$$\psi = \frac{C}{2} e^{-ar} \cdot \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \left(Y_1^{+1} - Y_1^{-1} \right) \rightarrow \boxed{\psi = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}\, C e^{-ar} \left(Y_1^{+1} - Y_1^{-1} \right)}$$

Συνεπώς το γωνιακό μέρος της κυματοσυνάρτησης, από το οποίο εξαρτώνται οι τιμές των L^2, L_z γράφεται ως επαλληλία των ιδιοκαταστάσεων των L^2, L_z δηλαδή των $Y_1^{+1}(\theta,\varphi)$ και $Y_1^{-1}(\theta,\varphi)$.

b) Επειδή $L^2 = \hbar^2 l(l+1)$ και $L_z = \hbar m$ σε μετρήσεις των L^2, L_z τα δυνατά ζεύγη τιμών αφού $l = 1$ και $m = -1, 1$ είναι:

$$\boxed{(L^2, L_z) = (2\hbar^2, -\hbar) \text{ ή } (2\hbar^2, \hbar)}$$

Επειδή τα μεγέθη L^2, L_z εξαρτώνται μόνο απ' το γωνιακό μέρος δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε τη σταθερά κανονικοποίησης C.

Είναι: $C_{11} = 1$ και $C_{1-1} = -1$ οπότε η πιθανότητα να βρεθεί το ζεύγος $(2\hbar^2, \hbar)$ είναι:

$$P_{(2\hbar^2, \hbar)} = \frac{|C_{11}|^2}{|C_{11}|^2 + |C_{1-1}|^2} = \frac{1^2}{1^2 + (-1)^2} \rightarrow \boxed{P_{(2\hbar^2, \hbar)} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ ή } 50\%}$$

$$P_{(2\hbar^2, -\hbar)} = \frac{|C_{1-1}|^2}{|C_{11}|^2 + |C_{1-1}|^2} = \frac{(-1)^2}{1^2 + (-1)^2} \rightarrow \boxed{P_{(2\hbar^2, -\hbar)} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ ή } 50\%}$$