☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

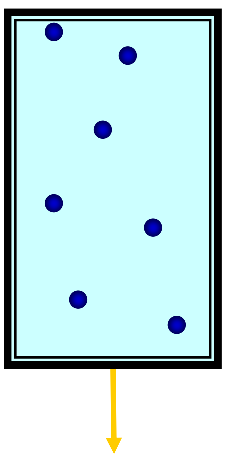
ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ- ΚΑΤΑΝΟΜΗ MAXWELL
ΘΕΩΡΙΑ & ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Περιεχόμενα

1. Στατιστικές Συλλογές
2. Κατανομή Gibbs
3. Από την Κατανομή Gibbs στις Κατανομές Maxwell & Boltzmann
4. Κατανομή Maxwell
4.1 Χαρακτηριστικές ταχύτητες της Κατανομής Maxwell
4.2 Εξάρτηση της Κατανομής Maxwell από τη θερμοκρασία
4.3 Εξάρτηση της Κατανομής Maxwell από το είδος του αερίου
4.4 Η ατμόσφαιρα των πλανητών
4.5 Ποσοστό σωματιδίων
4.6 Ασκήσεις

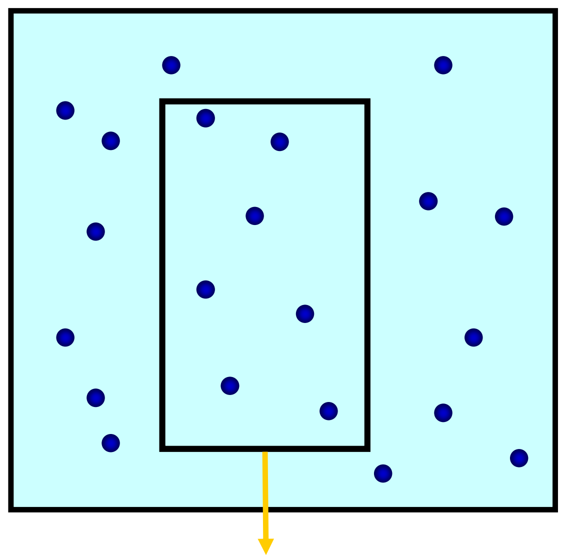
1. Στατιστικές Συλλογές

Ένα πολύ μεγάλο πλήθος από πανομοιότυπα συστήματα, απομονωμένα, ονομάζεται **ΜΙΚΡΟΚΑΝΟΝΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ**.



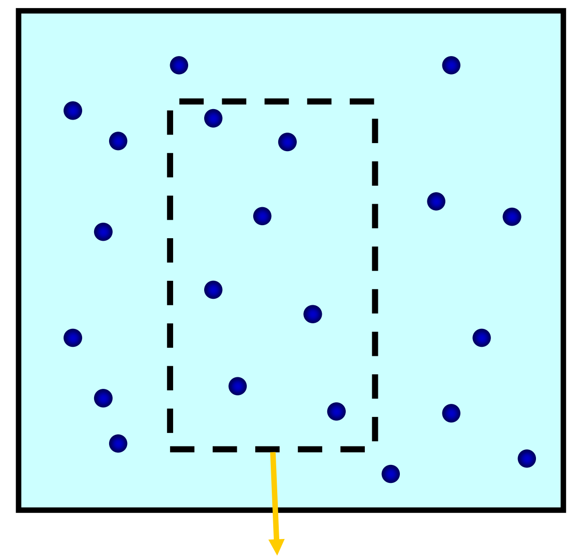
Αδιαπέρατα τοιχώματα ως προς την ενέργεια
Αδιαπέραστα τοιχώματα ως προς τα σωματίδια

Ένα πολύ μεγάλο πλήθος από πανομοιότυπα συστήματα, τα οποία ανταλλάσουν **ενέργεια**, ονομάζεται **ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ**.



περατά τοιχώματα ως προς την ενέργεια
Αδιαπέρατα τοιχώματα ως προς τα σωματίδια

Ένα πολύ μεγάλο πλήθος από πανομοιότυπα συστήματα, τα οποία ανταλλάσουν **ενέργεια** αλλά και **σωματίδια** ονομάζεται **ΜΕΓΑΛΟΚΑΝΟΝΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ**.



περατά τοιχώματα ως προς την ενέργεια
πέρατα τοιχώματα ως προς τα σωματίδια

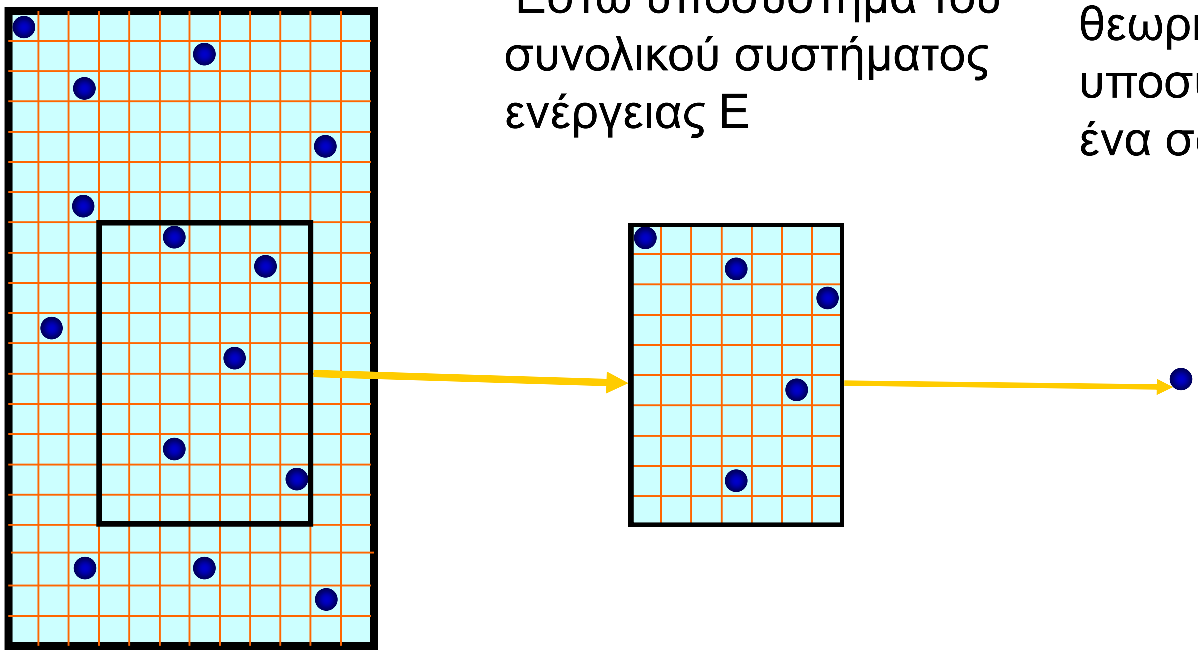
☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

2. Κατανομή Gibbs

Έστω σύστημα Ενέργειας E_o

‘Εστω υποσύστημα του συνολικού συστήματος ενέργειας Ε

Για απλοποίηση θα θεωρήσουμε ότι το υποσύστημα αποτελείται από ένα σωματίδιο ενέργειας Ε.



Η **πιθανότητα** να βρίσκεται το σωματίδιο σε μία κατάσταση με ενέργεια Ε έως Ε + dE αποδεικνύεται να είναι:

$$dP = Ae^{-\frac{E}{kT}}d\Gamma$$

Κατανομή Gibbs ως προς τις ενέργειες

$$dP = Ae^{-\frac{E}{kT}}d\Gamma$$

Κανονική Πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίδιο σε μία κατάσταση με ενέργεια E έως E + dE.

Σταθερά Κανονικοποίησης

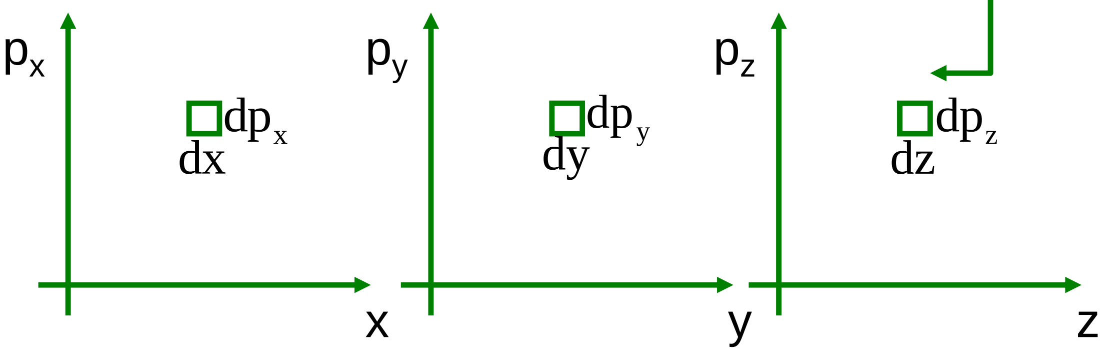
Στοιχειώδης Όγκος στον χώρο των φάσεων.

Ουσιαστικά είναι το πλήθος των μικροκαταστάσεων με ενέργειες από E έως E + dE (στο χώρο των θέσεων – ορμών)

$$d\Gamma = \frac{d\vec{r}d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3}$$

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες γράφεται

$$d\Gamma = \frac{dxdydzdp_x dp_y dp_z}{(2\pi\hbar)^3}$$



3. Από την Κατανομή Gibbs στις Κατανομές Maxwell & Boltzmann

Η ενέργεια σωματίδιου (υποσυστήματος) ενός αερίου είναι:

$$E = K + U$$

Όπου, Κ είναι η κινητική του ενέργεια: $K = \frac{1}{2}m\upsilon^2$

Ενώ, U είναι η δυναμική ενέργεια που έχει λόγω ενός εξωτερικού δυναμικού πεδίου.

Η **πιθανότητα** να βρίσκεται το σωματίδιο σε μία κατάσταση με ενέργεια Ε έως Ε + dE δίνεται από την κατανομή Gibbs που μπορεί να γραφεί ως:

$$dP = A_1 e^{-\frac{K}{kT}} dp_x dp_y dp_z A_2 e^{-\frac{U}{kT}} dxdydz$$

Όπου $A_1 A_2 = \left(2\pi\hbar\right)^3 A$

Επειδή η κινητική ενέργεια εξαρτάται μόνο από τις ταχύτητες (ορμές), ενώ η δυναμική ενέργεια μόνο από τη θέση U = U(x,y,z), θα έχει ως αποτέλεσμα η πιθανότητα να χωρίζεται σε δύο νέες ανεξάρτητες πιθανότητες.

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

$$dP = A_1 e^{-\frac{K}{kT}} dp_x dp_y dp_z A_2 e^{-\frac{U}{kT}} dxdydz$$

$$dP\left(x, y, z, p_x, p_y, p_z\right) = dP_1\left(p_x, p_y, p_z\right) \times dP_2\left(x, y, z\right)$$

Αυτή η πιθανότητα οδηγεί στην **κατανομή Maxwell**

Όπου προσδιορίζει την πιθανότητα να έχει ένα σωματίδιο ταχύτητες από
υx έως υx + dυx,
υy έως υy + dυy,
υz έως υz + dυz,

Αυτή η πιθανότητα οδηγεί στην **κατανομή Boltzmann**

Όπου προσδιορίζει την πιθανότητα το σωματίδιο να βρεθεί σε όγκο dV = dxdydz στο σημείο (x,y,z)

EMC²

4. Κατανομή Maxwell

$$dP = Ae^{-\frac{K}{kT}} dp_x dp_y dp_z$$

Παραλείπονται οι δείκτες

Το γινόμενο $dp_x dp_y dp_z$ αποτελεί τον στοιχειώδη όγκο στον χώρο των ορμών εκφρασμένο σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

Ο όγκος αυτός γραμμένος σε σφαιρικές συντεταγμένες γράφεται:

$$dp_x dp_y dp_z = p^2 \sin\theta dp d\theta d\varphi = m^3 \upsilon^2 \sin\theta d\upsilon d\theta d\varphi$$

Όπου p είναι το μέτρο της ορμής και είναι $p = m\upsilon$
και $dp = md\upsilon$

Έτσι έχουμε:

$$dP = Be^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} \upsilon^2 \sin\theta d\upsilon d\theta d\varphi$$

Η Πιθανότητα αυτή σχετίζεται τόσο με το μέτρο της ταχύτητας (υ) όσο με την διεύθυνσή της (θ,φ).

Όπου $B = m^3 A$

Αν μας ενδιαφέρει μόνο το μέτρο της ταχύτητας, ολοκληρώνουμε σε όλες τις γωνίες (θ,φ) και αυτό θα μας δώσει απλά έναν παράγοντα 4π, έτσι:

$$dP = Be^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} 4\pi\upsilon^2 d\upsilon$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Για τον υπολογισμό της σταθεράς κανονικοποίησης B, ολοκληρώνουμε την πιθανότητα σε όλες τις δυνατές τιμές της, επειδή, είναι εκφρασμένη σε σφαιρικές συντεταγμένες (το μέτρο της ταχύτητας) $\upsilon \in [0,+\infty)$, επομένως:

$$\int dP = 1 \Rightarrow 1 = \int_0^{+\infty} B e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} 4\pi\upsilon^2 d\upsilon \Rightarrow 4\pi B \int_0^{+\infty} \upsilon^2 e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} d\upsilon = 1$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-(rx)^m} dx = \frac{1}{mr^{n+1}} \Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right) \quad n=2, m=2, r=\sqrt{\frac{m}{2kT}}$$

$$\Rightarrow 4\pi B \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\left(\sqrt{\frac{m}{2kT}}\right)^3} = 1 \Rightarrow 4\pi B \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{2\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2}} = 1 \Rightarrow B \frac{\pi^{3/2}}{\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2}} = 1 \Rightarrow B = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$$

Άρα:

$$\boxed{dP = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} 4\pi\upsilon^2 d\upsilon}$$

$$dP = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} 4\pi\upsilon^2 d\upsilon$$

f(υ) = dP(υ)/dυ είναι η πυκνότητα πιθανότητας

f(υ)dυ είναι η **κατανομή Maxwell**

Είναι η πιθανότητα ένα σωματίδιο να έχει (μέτρο ταχύτητας) ταχύτητα από υ έως υ + dυ

Όπου

- m είναι η μάζα του **ενός** σωματιδίου (μόριο ή άτομο) του αερίου
- k είναι η σταθερά Boltzman
- T η απόλυτη θερμοκρασία [σε Kelvin]
- υ το μέτρο της ταχύτητας [σε m/s]
- 4πυ2dυ είναι το στοιχείο του όγκου στο χώρο των ταχυτήτων στις σφαιρικές συντεταγμένες

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Παρατηρήσεις

$$dP = \frac{dn}{n} = \frac{dN}{N}$$

Σχετική συγκέντρωση των σωματιδίων με ταχύτητες υ έως υ + dυ

- $dn = dN/V$ — Είναι η συγκέντρωση των σωματιδίων με ταχύτητες υ έως υ + dυ
- $n = N/V$ — Είναι η συγκέντρωση των σωματιδίων του αερίου (σε όγκο V)

Σχετικός αριθμός των σωματιδίων με ταχύτητες υ έως υ + dυ

- dN — Είναι ο αριθμός των σωματιδίων με ταχύτητες υ έως υ + dυ
- N — Είναι ο αριθμός των σωματιδίων του αερίου

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

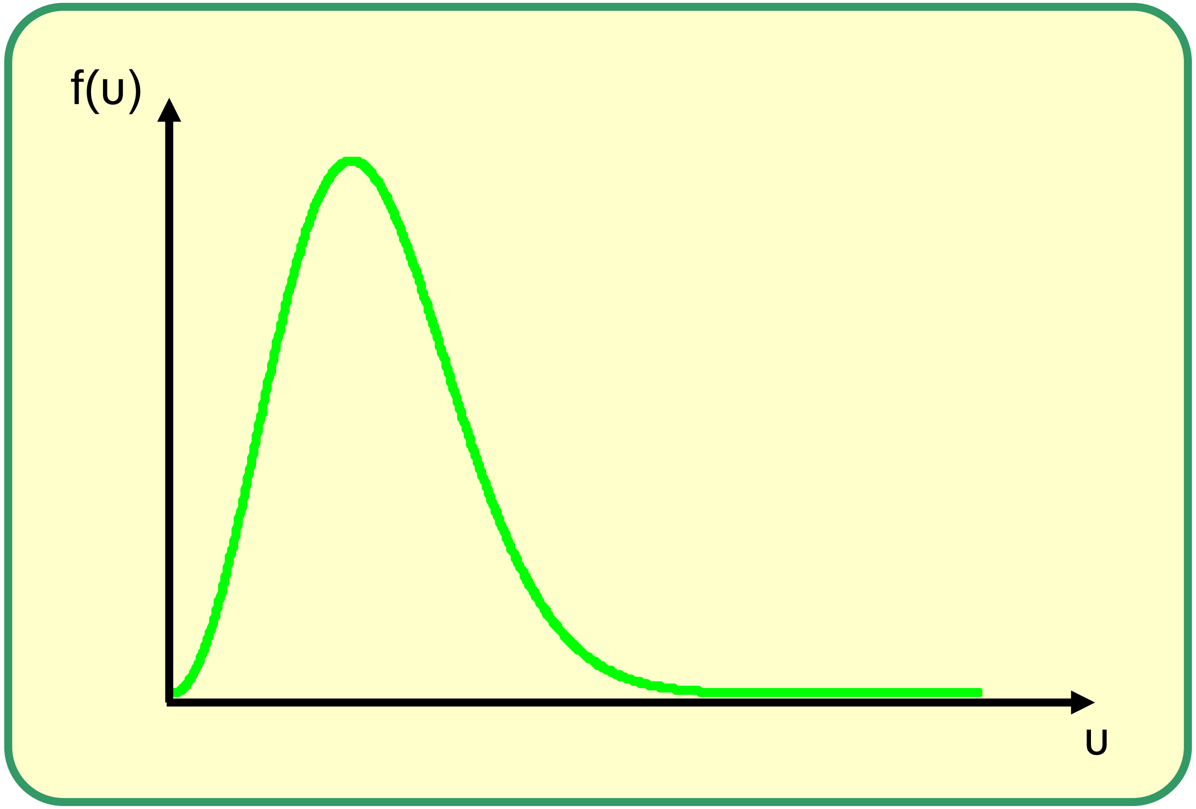
Η **πυκνότητα πιθανότητας** της Κατανομής Maxwell

$$f(\upsilon) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}\upsilon^2$$

- είναι θετική
- όταν $\upsilon \to 0$ το $f(\upsilon) \to 0$
- όταν $\upsilon \to \infty$ το $f(\upsilon) \to 0$

$$\Rightarrow$$

έχει τουλάχιστον ένα μέγιστο

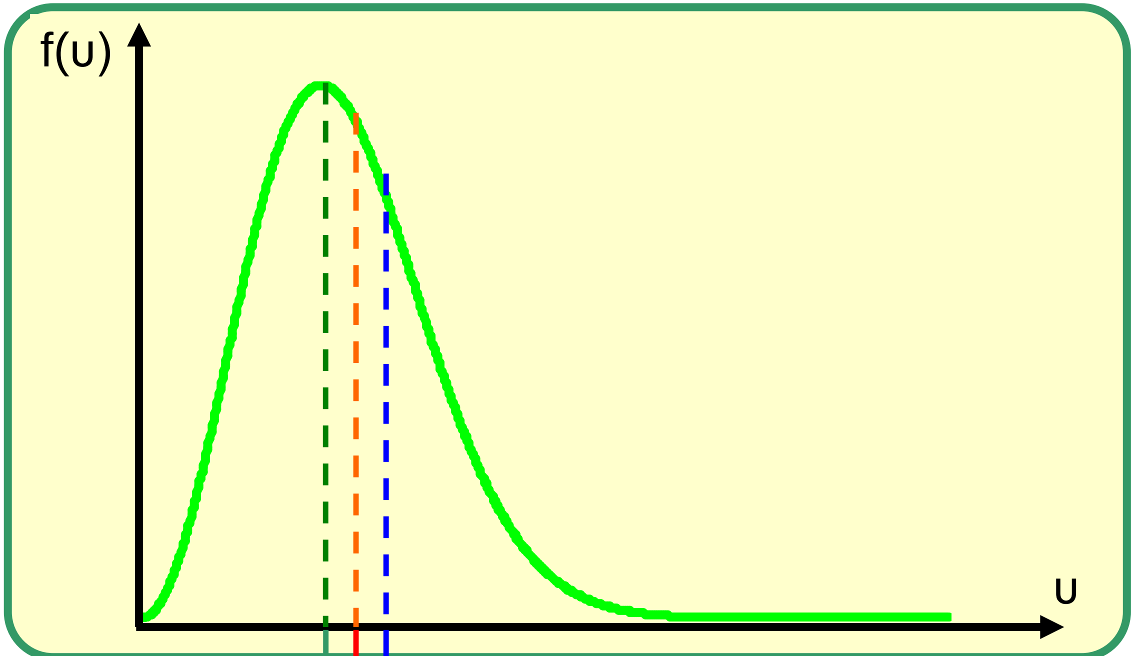


Επίσης το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη και τον άξονα υ ισούται με την μονάδα, λόγω κανονικοποίησης

$$\int_0^{+\infty} f(\upsilon)d\upsilon = 1$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

4.1 Χαρακτηριστικές ταχύτητες της Κατανομής Maxwell



Η ταχύτητα που αντι-στοιχεί στο μέγιστο της καμπύλης ονομάζεται **πιθανότερη ταχύτητα** και ισούται με:

$$\upsilon_\pi = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Η **μέση ταχύτητα** είναι η μέση τιμή των ταχυτή-των των σωματιδίων του αερίου:

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Η τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής των τετραγώνων των ταχυτήτων των σωματιδίων του αερίου ονομάζεται **ενεργός ταχύτητα** και είναι

$$\upsilon_{rms} = \sqrt{\langle \upsilon^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

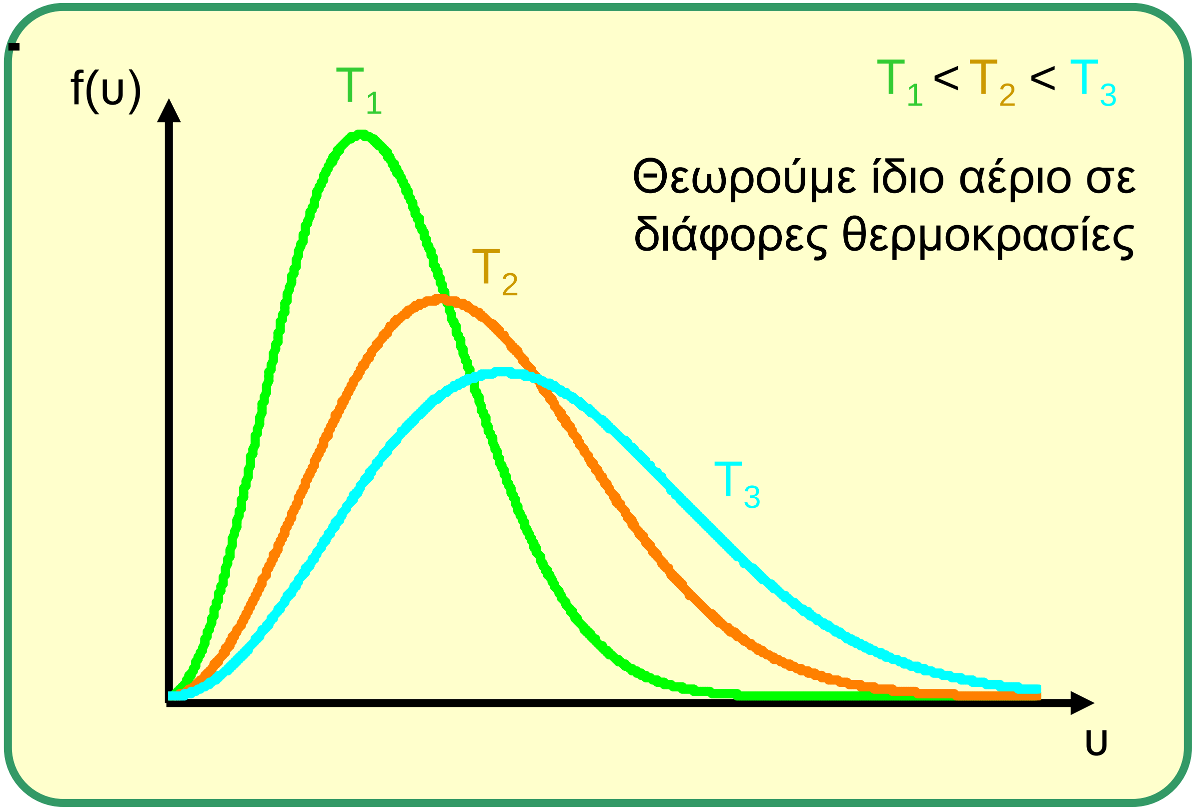
Παρατηρήσεις

Συχνά, σε διάφορες κατανομές, η μέση τιμή ενός μεγέθους συμπίπτει με την πιθανότερη τιμή του μεγέθους.

Στην κατανομή Maxwell η <υ> είναι μεγαλύτερη της $υ_π$, γιατί προβλέπονται μόρια, έστω και λίγα, με πολύ μεγάλες ταχύτητες (δεν υπάρχει όριο στις ταχύτητες των μορίων).

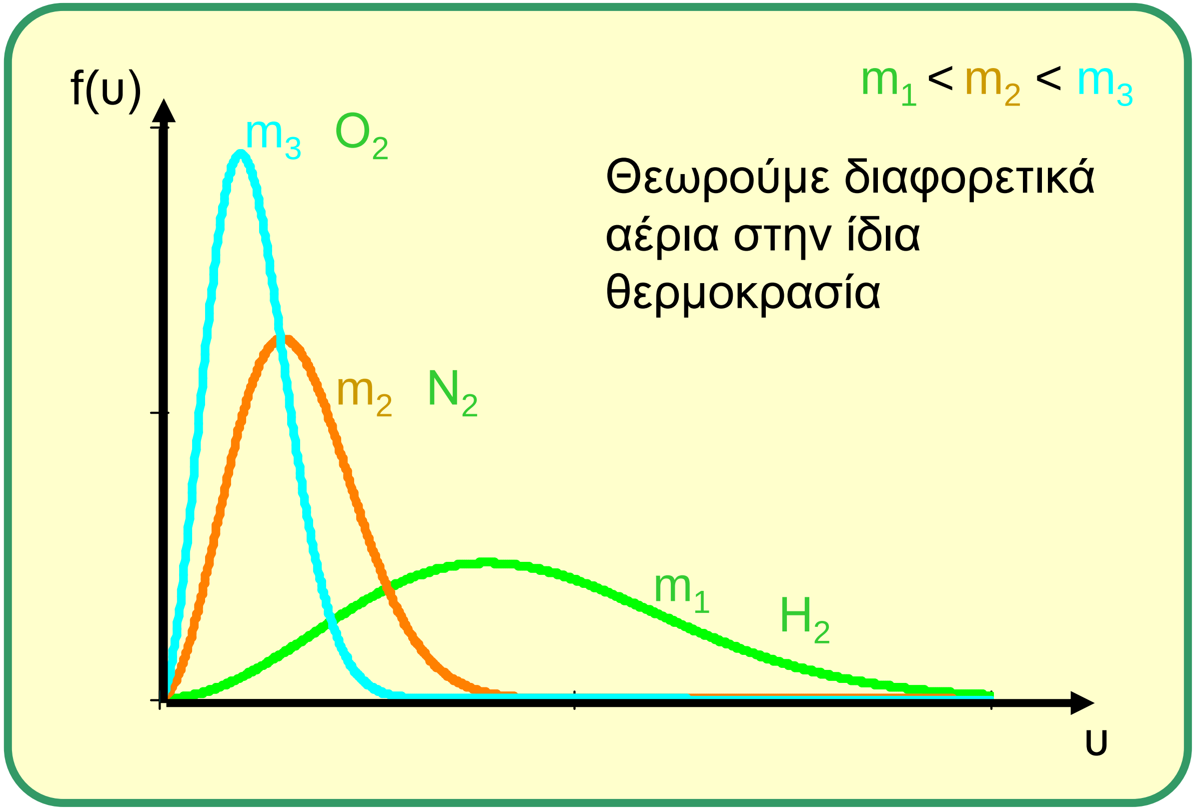
Ισχύει: $$\upsilon_\pi < \langle \upsilon \rangle < \sqrt{\langle \upsilon^2 \rangle}$$

4.2 Εξάρτηση της Κατανομής Maxwell από την θερμοκρασία



Όταν η θερμοκρασία του αερίου αυξάνεται, η καμπύλη μετατοπίζεται προς τα δεξιά και η κορυφή της χαμηλώνει.
Αυτό συμβαίνει γιατί όσο αυξάνει η θερμοκρασία η ενεργός ταχύτητα αυξάνεται, ενώ η πυκνότητα πιθανότητας ελαττώνεται.
Τέλος ο αριθμός των μορίων στη νέα πιθανότερη ταχύτητα είναι μικρότερος στην υψηλότερη θερμοκρασία.

4.3 Εξάρτηση της Κατανομής Maxwell από το είδος του αερίου



Η πυκνότητα πιθανότητας της κατανομής Maxwell δείχνει πως τα μόρια του αερίου με το μικρότερο μοριακό βάρος έχουν μεγαλύτερες ταχύτητες επομένως η καμπύλη μετατοπίζεται προς τα δεξιά και γίνεται πιο αμβλεία.

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

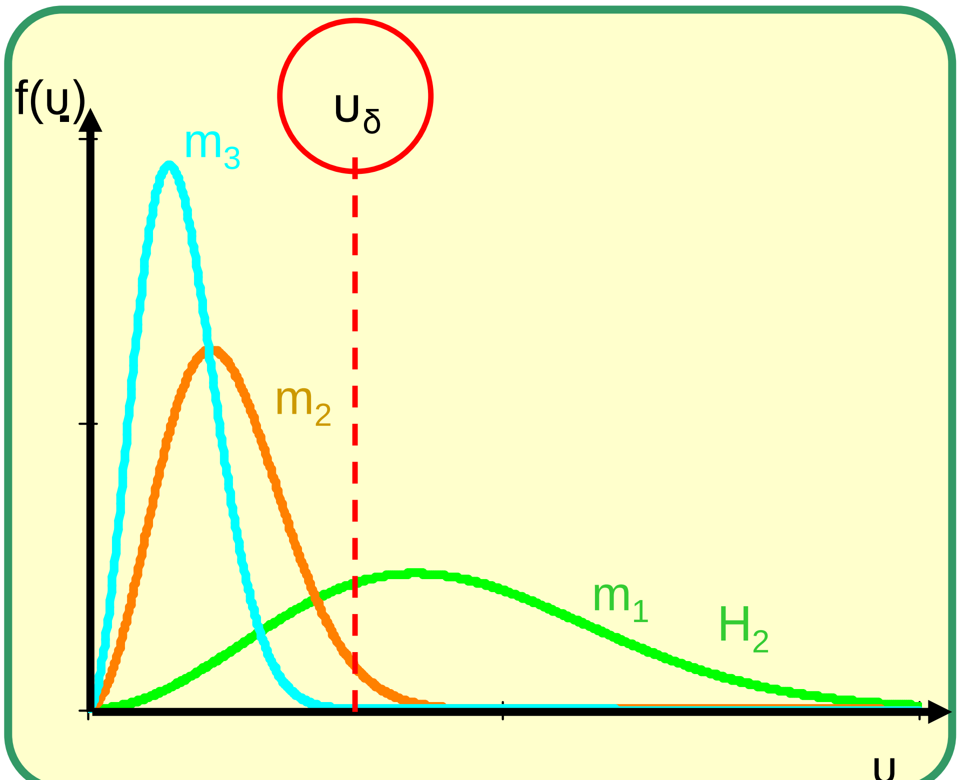
4.4 Η ατμόσφαιρα των πλανητών

Για να διαφύγει κάθετα ένα σώμα από το βαρυτικό πεδίο ενός πλανήτη, πρέπει η ταχύτητά του να είναι μεγαλύτερη της ταχύτητας διαφυγής

Αν ο πλανήτης έχει μάζα ίση με M και ακτίνα R, τότε η ταχύτητα διαφυγής για κάθε πλανήτη δίνεται από την σχέση:

$$\upsilon_\delta = \sqrt{\frac{2GM}{R+h}}$$

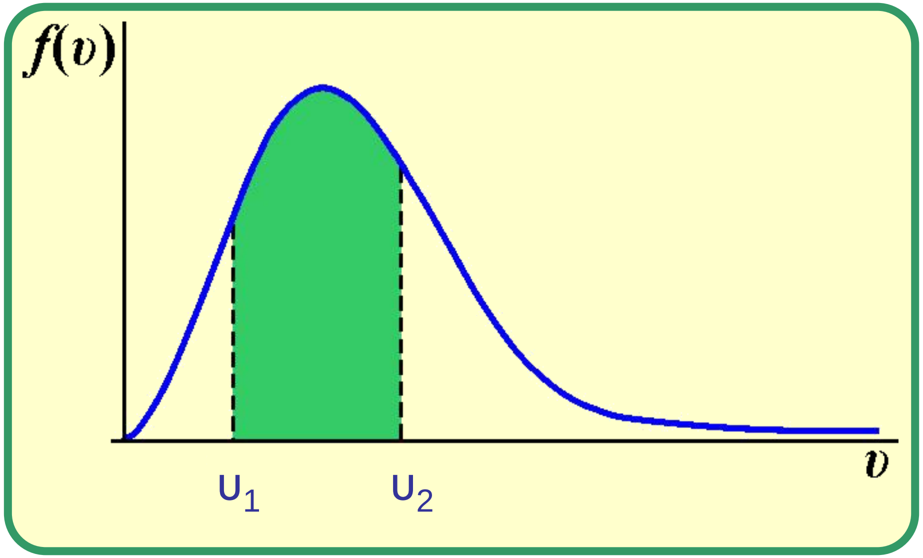
Όπου εξαρτάται μόνο από αυτά τα χαρακτηριστικά του πλανήτη και το ύψος h όπου βάλλεται το σωματίδιο από την επιφάνεια του.



- m_1: υπάρχει μεγάλος αριθμός μορίων που έχουν $\upsilon > \upsilon_\delta$ έτσι διαφεύγουν στην ατμόσφαιρα και ένα τέτοιο αέριο δεν θα μπορούσε να δομήσει την ατμόσφαιρα.
- m_2: υπάρχει ένας αριθμός μορίων που έχουν $\upsilon > \upsilon_\delta$ ένα τέτοιο αέριο θα μπορούσε να δομήσει την ατμόσφαιρα αλλά μετά από κάποιο χρόνο θα διέφευγαν και από αυτό όλα τα μόρια του.
- m_3: όλα τα μόρια έχουν $\upsilon < \upsilon_\delta$ ένα τέτοιο αέριο δομή την ατμόσφαιρα διότι όλη η ποσότητα του παραμένει στην ατμόσφαιρα δίχως να διαφεύγει.

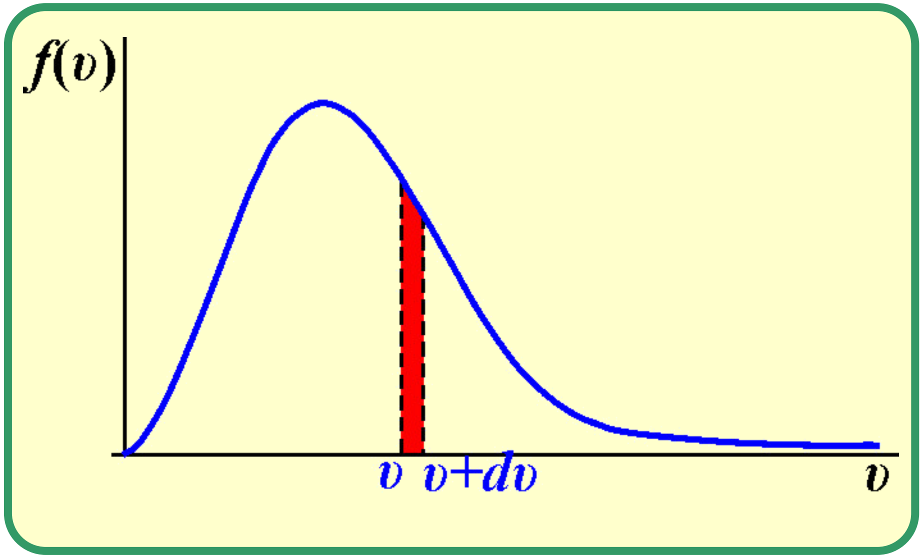
☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

4.5 Ποσοστό σωματιδίων



Η πιθανότητα ένα σωματίδιο (το ποσοστό των σωματιδίων) να έχει ταχύτητες από $υ_1$ έως $υ_2$ είναι το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{\Delta N(\upsilon_1,\upsilon_2)}{N}=\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} f(\upsilon)d\upsilon$$



Η πιθανότητα ένα σωματίδιο (το ποσοστό των σωματιδίων) να έχει ταχύτητες από υ έως υ + dυ είναι το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dN}{N}=f(\upsilon)d\upsilon$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

4.5 Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται η ακανονικοποίητη κατανομή Maxwell: $f(\upsilon)d\upsilon = Ne^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}4\pi\upsilon^2 d\upsilon$
Να βρεθεί η σταθερά κανονικοποίησης N.

Το ολοκλήρωμα dP θα πρέπει να ισούται ίσο με 1, με άλλα λόγια, για τον υπολογισμό της σταθεράς κανονικοποίησης, ολοκληρώνουμε την κατανομή σε όλες τις δυνατές τιμές της, επειδή, είναι εκφρασμένη σε σφαιρικές συντεταγμένες (το μέτρο της ταχύτητας) $\upsilon \in [0,+\infty)$, επομένως:

$$\int_0^{+\infty} f(\upsilon)d\upsilon = 1 \Rightarrow 4\pi N\int_0^{+\infty}\upsilon^2 e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}d\upsilon = 1 \Rightarrow 4\pi N\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\left(\sqrt{\frac{m}{2kT}}\right)^3} = 1 \Rightarrow 4\pi N\frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{2\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2}} = 1 \Rightarrow$$

$$N\frac{\pi^{3/2}}{\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2}} = 1 \Rightarrow N = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-(rx)^m}dx = \frac{1}{mr^{n+1}}\Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right)$$

$$n = 2, m = 2, r = \sqrt{\frac{m}{2kT}}$$

Άρα η κατανομή Maxwell κανονικοποιημένη είναι:

$$f(\upsilon)d\upsilon = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}4\pi\upsilon^2 d\upsilon$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται η κατανομή Maxwell: $f(\upsilon)d\upsilon=\left(\dfrac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}4\pi\upsilon^2 d\upsilon$

Να βρεθεί η πιθανότερη ταχύτητα $\upsilon_{\pi\iota\theta}$.

Η πιθανότερη ταχύτητα είναι αυτή που αντιστοιχεί στο μέγιστο της κατανομής, άρα αυτή θα υπολογιστεί από την απαίτηση η πρώτη παράγωγος της κατανομής να μηδενίζεται. Στο σημείο όπου μηδενίζεται είναι και η πιθανότερη ταχύτητα, δηλαδή:

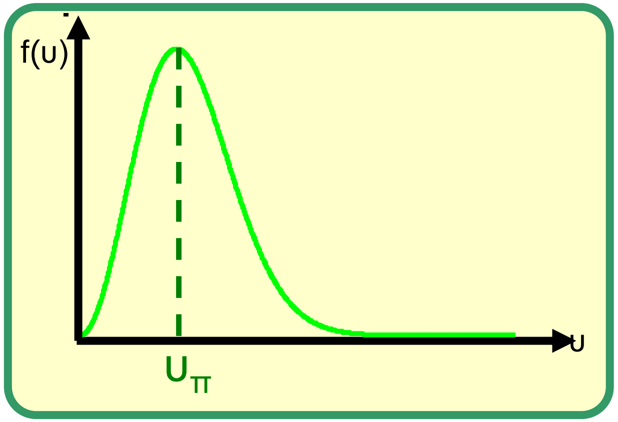
$$\left.\frac{df(\upsilon)}{d\upsilon}\right|_{\upsilon=\upsilon_{\pi\iota\theta}}=0$$

Όμως $$\frac{df(\upsilon)}{d\upsilon}=\frac{d}{d\upsilon}\left(\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}4\pi\upsilon^2\right)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\frac{d}{d\upsilon}\left(e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}\upsilon^2\right)=$$

$$=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\left(-\frac{m}{2kT}2\upsilon e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}\upsilon^2+e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}2\upsilon\right)$$

$$\frac{df(\upsilon)}{d\upsilon}=0 \Rightarrow -\frac{m}{2kT}\upsilon^2+1=0 \Rightarrow \upsilon^2=\frac{2kT}{m}$$

Άρα $$\upsilon_\pi=\sqrt{\frac{2kT}{m}}$$



☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 3

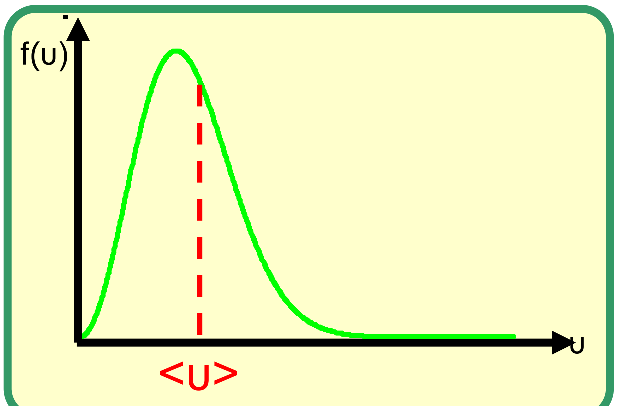
Να βρεθεί η μέση ταχύτητα <υ>.

$$\langle \upsilon \rangle = \int_0^{+\infty} \upsilon f(\upsilon) d\upsilon = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{+\infty} \upsilon e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} \upsilon^2 d\upsilon = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{+\infty} \upsilon^3 e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} d\upsilon =$$

$$= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{+\infty} \upsilon^3 e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} d\upsilon = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \frac{1}{2\left(\sqrt{\frac{m}{2kT}}\right)^4} \Gamma\left(\frac{4}{2}\right) = 2\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \frac{1}{\left(\frac{m}{2kT}\right)^2} =$$

$$= 2\pi\pi^{-3/2} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}-\frac{4}{2}} = 2\pi^{-1/2} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{\pi m}{2kT}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Άρα $\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m}}$



$$\int_0^{\infty} x^n e^{-(rx)^m} dx = \frac{1}{mr^{n+1}} \Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right)$$

$$n = 3, m = 2, r = \sqrt{\frac{m}{2kT}}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να βρεθεί η μέση τετραγωνική ταχύτητα <υ^2>.

$$\langle \upsilon^2 \rangle = \int_0^{+\infty} \upsilon^2 f(\upsilon) d\upsilon = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{+\infty} \upsilon^2 e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} \upsilon^2 d\upsilon = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{+\infty} \upsilon^4 e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} d\upsilon =$$

$$= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{+\infty} \upsilon^4 e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} d\upsilon = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \frac{1}{2\left(\sqrt{\frac{m}{2kT}}\right)^5} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = 2\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{m}{2kT}}\right)^5} \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$= \frac{3\pi^{3/2}}{2} \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \frac{1}{\left(\frac{m}{2kT}\right)^{5/2}} = \frac{3}{2}\frac{2kT}{m} = \frac{3kT}{m}$$

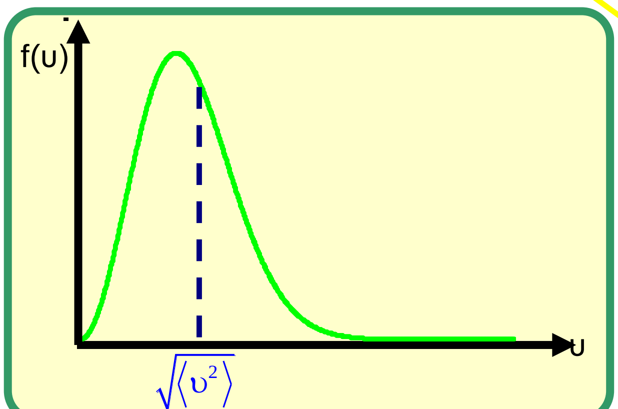
$$\int_0^{\infty} x^n e^{-(rx)^m} dx = \frac{1}{mr^{n+1}} \Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right)$$

$$n = 4, m = 2, r = \sqrt{\frac{m}{2kT}}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

Άρα $\langle \upsilon^2 \rangle = \dfrac{3kT}{m}$



☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να βρεθεί η διασπορά και η σχετική διακύμανση της ταχύτητας των μορίων.

Η διασπορά της ταχύτητας είναι:

$$\sigma^2 = \left\langle \upsilon^2 \right\rangle - \left\langle \upsilon \right\rangle^2 = \frac{3kT}{m} - \frac{8kT}{\pi m} = \frac{3kT}{m}\left(1 - \frac{8}{3\pi}\right)$$

Η σχετική διακύμανση της ταχύτητας είναι:

$$\frac{\sqrt{\left\langle \upsilon^2 \right\rangle - \left\langle \upsilon \right\rangle^2}}{\left\langle \upsilon \right\rangle} = \frac{\frac{3kT}{m}\left(1 - \frac{8}{3\pi}\right)}{\frac{3kT}{m}} = \left(1 - \frac{8}{3\pi}\right)$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 6

Να δείξετε ότι η κατανομή Maxwell για την συνιστώσα της ταχύτητας υ_x είναι:

$$f(\upsilon_x)d\upsilon_x = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}} d\upsilon_x$$

Η κατανομή Maxwell είναι: $f(\upsilon)d\upsilon = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} 4\pi\upsilon^2 d\upsilon$

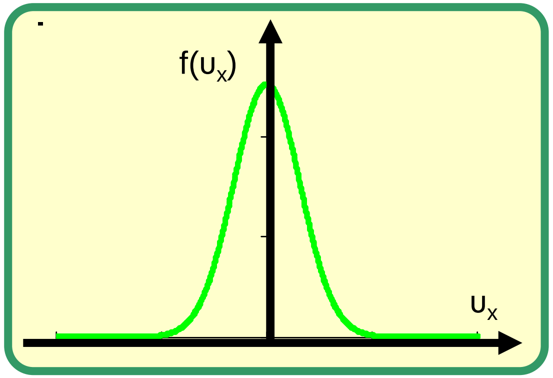
Αυτή είναι γραμμένη σε σφαιρικές συντεταγμένες.
Αν θέλουμε όμως να την γράψουμε σε καρτεσιανές συντεταγμένες θα έχουμε:

$$4\pi\upsilon^2 d\upsilon = d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z \qquad \upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_z^2 + \upsilon_y^2$$

Συνεπώς σε καρτεσιανές συντεταγμένες μπορεί να γραφεί:

$$f(\upsilon)d\upsilon = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\left(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2\right)}{2kT}} d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}} d\upsilon_x}_{f(\upsilon_x)d\upsilon_x} \underbrace{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\upsilon_y^2}{2kT}} d\upsilon_y}_{f(\upsilon_y)d\upsilon_y} \underbrace{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\upsilon_z^2}{2kT}} d\upsilon_z}_{f(\upsilon_z)d\upsilon_z}$$

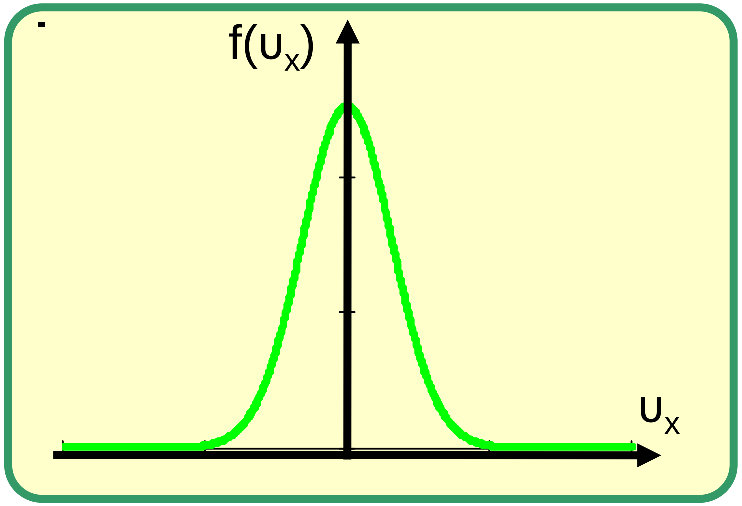


Άρα $f(\upsilon_x)d\upsilon_x = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}} d\upsilon_x$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να βρεθεί η μέση ταχύτητα στον άξονα x, $\langle \upsilon_x \rangle$.



Από την μορφή και μόνο της κατανομής ταχυτήτων, παρατηρούμε ότι η μέση ταχύτητα στον άξονα x είναι μηδέν.

Διαφορετικά:

$$\langle \upsilon_x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \upsilon_x f(\upsilon_x) d\upsilon_x = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\underbrace{\upsilon_x}_{\Pi} \underbrace{e^{-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}}}_{A}}_{\Pi} d\upsilon_x = 0$$

Το ολοκλήρωμα είναι μηδέν, διότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι περιττή και ολοκληρώνεται σε συμμετρικά όρια.

Και γενικά $\langle \upsilon_x \rangle = \langle \upsilon_y \rangle = \langle \upsilon_z \rangle = 0$

Το ότι βγάζουμε αυτό το αποτέλεσμα δεν σημαίνει ότι όλες οι ταχύτητες είναι μηδέν, αλλά όσα μόρια κινούνται προς την θετική κατεύθυνση άλλα τόσα κινούνται προς την αρνητική κατεύθυνση.

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 8

Να βρεθεί η μέση ταχύτητα των μορίων που κινούνται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα του x , $<\upsilon_x^+>$.

$$\left\langle \upsilon_x^+ \right\rangle = \int_0^{+\infty} \upsilon_x f(\upsilon_x) d\upsilon_x = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} \upsilon_x e^{-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}} d\upsilon_x = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \frac{1}{2\left(\sqrt{\frac{m}{2kT}}\right)^2} \Gamma(1) =$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \frac{1}{2\left(\frac{m}{2kT}\right)} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{kT}\right)^{-1} = \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-(rx)^m} dx = \frac{1}{mr^{n+1}} \Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right)$$

$$n = 1, m = 2, r = \sqrt{\frac{m}{2kT}}$$

Άρα $\left\langle \upsilon_x^+ \right\rangle = \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$

Παρατήρηση: $\left\langle \upsilon_x^+ \right\rangle = \left\langle \upsilon_y^+ \right\rangle = \left\langle \upsilon_z^+ \right\rangle = \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 9

Να βρεθεί η μέση τετραγωνική ταχύτητα των μορίων που κινούνται στον άξονα του x , $<\upsilon_x^2>$.

$$\left\langle \upsilon_x^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \upsilon_x^2 f(\upsilon_x) d\upsilon_x = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} 2\int_0^{+\infty} \upsilon_x^2 e^{-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}} d\upsilon_x = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} 2\frac{1}{2\left(\sqrt{\frac{m}{2kT}}\right)^3}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{m}{2kT}}\right)^3}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}\frac{2kT}{m} = \frac{kT}{m}$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-(rx)^m} dx = \frac{1}{mr^{n+1}}\Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right)$$

$$n = 2, m = 2, r = \sqrt{\frac{m}{2kT}}$$

Παρατήρηση: $\left\langle \upsilon_x^2 \right\rangle = \left\langle \upsilon_y^2 \right\rangle = \left\langle \upsilon_z^2 \right\rangle = \frac{kT}{m}$

$$\left\langle \upsilon_x^2 \right\rangle + \left\langle \upsilon_y^2 \right\rangle + \left\langle \upsilon_z^2 \right\rangle = \frac{3kT}{m} = \left\langle \upsilon^2 \right\rangle$$

Παρατηρήσεις

Παραδείγματα

Ιδιότητες μέσης τιμής

- < f + g > = < f > + < g >

$$\left\langle \frac{1}{2}m\upsilon^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}m\left(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2\right) \right\rangle = \frac{1}{2}m\left(\left\langle \upsilon_x^2\right\rangle + \left\langle \upsilon_y^2\right\rangle + \left\langle \upsilon_z^2\right\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{2}m3\frac{kT}{m} = \frac{3}{2}kT$$

- < f · g > = < f > · < g >

$$\left\langle \upsilon_x \cdot \upsilon_y \right\rangle = \left\langle \upsilon_x \right\rangle \cdot \left\langle \upsilon_y \right\rangle = 0$$

Ισχύει μόνο όταν οι f,g εξαρτώνται από διαφορετικές μεταβλητές

$$\left\langle \upsilon_x^2 \cdot \upsilon_y \right\rangle = \overset{0}{\left\langle \upsilon_x^2 \right\rangle} \cdot \overset{0}{\left\langle \upsilon_y \right\rangle} = 0$$

$$\left\langle \upsilon^2 \cdot \upsilon_x \right\rangle \neq \left\langle \upsilon^2 \right\rangle \cdot \overset{0}{\left\langle \upsilon_x \right\rangle}$$ διότι $\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_z^2 + \upsilon_y^2$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 10

Να δείξετε ότι η κατανομή Maxwell ως προς της ενέργειες είναι:

$$f(E)dE=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}E^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{E}{kT}}dE$$

Η Ενέργεια ενός μορίου ιδανικού αέριου είναι ίση με την κινητική του ενέργεια, δηλαδή:

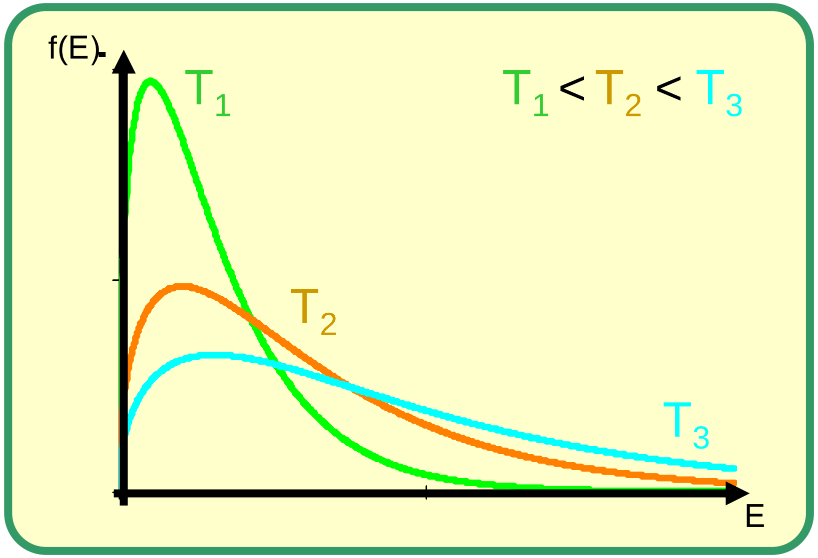
$$E=\frac{m\upsilon^2}{2} \quad \text{Άρα: } \upsilon=\sqrt{\frac{2E}{m}} \quad \text{και} \quad \frac{d\upsilon}{dE}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{2E}{m}}}\frac{2}{m} \Rightarrow d\upsilon=\frac{dE}{\sqrt{2Em}}$$

Αντικαθιστώντας στην κατανομή Maxwell, έχουμε:

$$f(\upsilon)d\upsilon=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}4\pi\upsilon^2 d\upsilon=$$

$$=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{E}{kT}}4\pi\frac{2E}{m}\frac{dE}{\sqrt{2Em}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}E^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{E}{kT}}dE=f(E)dE$$



Άρα $f(E)dE=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}E^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{E}{kT}}dE$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 11

Να βρεθεί η πιθανότερη ενέργεια για την κατανομή Maxwell.

Η πιθανότερη ενέργεια είναι αυτή που αντιστοιχεί στο μέγιστο της κατανομής, άρα:

$$\left.\frac{df(E)}{dE}\right|_{E=E_{\pi\iota\theta}}=0$$

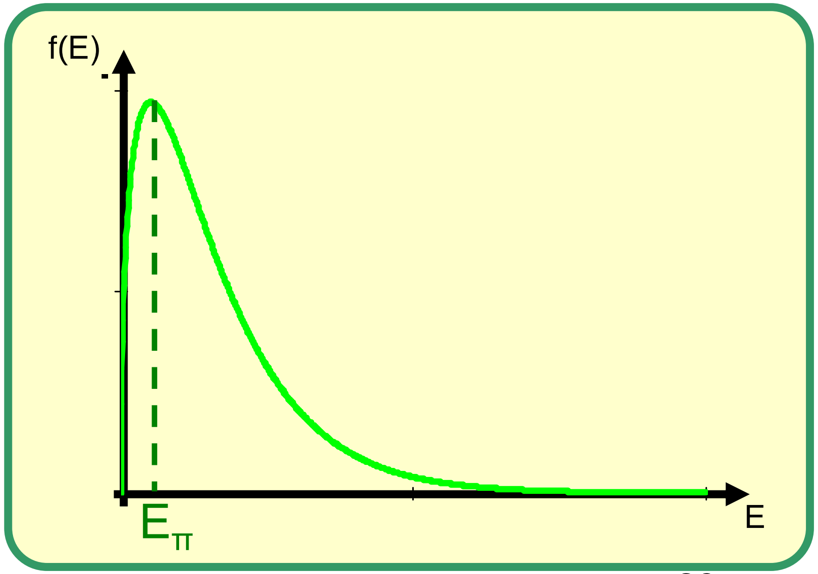
Όμως, $\frac{df(E)}{dE}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{2\sqrt{E}}e^{-\frac{E}{kT}}-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}E^{\frac{1}{2}}\frac{1}{kT}e^{-\frac{E}{kT}}$

Απαιτώντας να είναι ίσο με μηδέν έχουμε:

$$\frac{df(E)}{dE}=0\;\Rightarrow$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{2\sqrt{E}}e^{-\frac{E}{kT}}-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}E^{\frac{1}{2}}\frac{1}{kT}e^{-\frac{E}{kT}}=0\;\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2\sqrt{E}}-E^{\frac{1}{2}}\frac{1}{kT}=0\;\Rightarrow\;\frac{1}{2\sqrt{E}}=\sqrt{E}\frac{1}{kT}\;\Rightarrow E=\frac{kT}{2}$$



Άρα, η πιθανότερη ταχύτητα είναι: $E_{\pi\iota\theta}=\frac{kT}{2}$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 12

Να βρεθεί η μέση ενέργεια για την κατανομή Maxwell.

$$\langle E\rangle=\int_0^\infty Ef(E)dE=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty EE^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{E}{kT}}dE=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty E^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{E}{kT}}dE=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{5}{2}}}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{-1}\frac{3\sqrt{\pi}}{4}=\frac{3kT}{2}$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-(rx)^m}dx=\frac{1}{mr^{n+1}}\Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right)$$

$$n=3/2, m=1, r=\frac{1}{kT}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

Άλλως τρόπος

$$\langle E\rangle=\left\langle\frac{m\upsilon^2}{2}\right\rangle=\frac{m}{2}\langle\upsilon^2\rangle=\frac{m}{2}\langle\upsilon^2\rangle=\frac{m}{2}\frac{3kT}{m}=\frac{3kT}{2}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 13

Να βρεθεί η μέση τιμή του τετραγώνου της ενέργειας για την κατανομή Maxwell και η σχετική διακύμανση της ενέργειας των σωματιδίων.

$$\langle E^2\rangle = \int_0^\infty E^2 f(E)dE = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty E^2 E^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{E}{kT}}dE = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty E^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{E}{kT}}dE =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{7}{2}}}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{-2}\frac{15\sqrt{\pi}}{8} = \frac{15k^2T^2}{4}$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-(rx)^m}dx = \frac{1}{mr^{n+1}}\Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right)$$

$$n = 5/2, m = 1, r = \frac{1}{kT}$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}$$

Η σχετική διακύμανση της ενέργειας είναι:

$$\frac{\sqrt{\langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2}}{\langle E\rangle} = \frac{\sqrt{\frac{15k^2T^2}{4} - \frac{9k^2T^2}{4}}}{\frac{3kT}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 14

Να βρεθεί ο σχετικός αριθμός W των μορίων ιδανικού αερίου η κινητική ενέργεια των οποίων διαφέρει από την πιθανότερη ενέργεια E_π όχι περισσότερο από 1%.

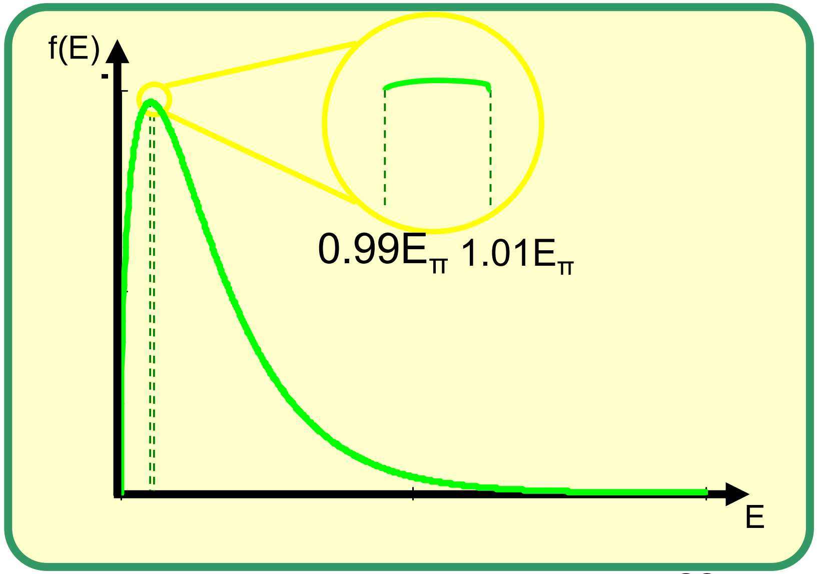
$$W=\frac{\Delta N}{N}\left(0.99E_\pi,1.01E_\pi\right)=\int_{0.99E_\pi}^{1.01E_\pi} f\left(E\right)dE\approx$$

$$\approx f\left(E_\pi\right)\Delta E=f\left(E_\pi\right)\cdot 0.02E_\pi=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}E_\pi^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{E_\pi}{kT}}0.02E_\pi=$$

$$=0.02\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}E_\pi^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{E_\pi}{kT}}=0.02\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{kT}{2}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{kT}{2kT}}=$$

$$=\frac{0.02}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}=4.84\cdot 10^{-3}$$

$$E_{\pi\iota\theta}=\frac{kT}{2}$$



*