☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΚΑΤΑΝΟΜΗ BOLTZMANN
ΘΕΩΡΙΑ & ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Περιεχόμενα

1. Η Κατανομή Boltzmann

Η πιθανότητα να βρεθεί ένα σωματίδιο σε όγκο dV = dxdydz στο σημείο (x,y,z) μέσα σε εξωτερικό δυναμικό πεδίο δίνεται από την κατανομή Boltzmann

$$dP = Ae^{-\frac{U(x,y,z)}{kT}}dV$$

Η σταθερά κανονικοποίησης προσδιορίζεται από την σχέση:

$$\int dP = 1 \Rightarrow \int_V Ae^{-\frac{U}{kT}}dV = 1 \Rightarrow \quad A = \frac{1}{\int e^{-\frac{U}{kT}}dV}$$

Έστω

n: η συγκέντρωση των μορίων σε στοιχειώδη όγκο dV γύρω από το σημείο (x, y, z)

n_o: η συγκέντρωση μορίων στον στοιχειώδη όγκο γύρω από το σημείο (x_o, y_o, z_o)

Η συγκέντρωση θα δίνεται από την σχέση: $n = \frac{dN}{dV}$ και επειδή $dP = \frac{dN}{N}$ θα έχουμε:

$$n = NAe^{-\frac{U(x,y,z)}{kT}} \qquad n_o = NAe^{-\frac{U(x_o,y_o,z_o)}{kT}}$$

Διαιρώντας κατά μέλη θα έχουμε:

$$\boxed{n = n_o \cdot e^{-\frac{U-U_o}{kT}}}$$

κατανομή Boltzmann

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

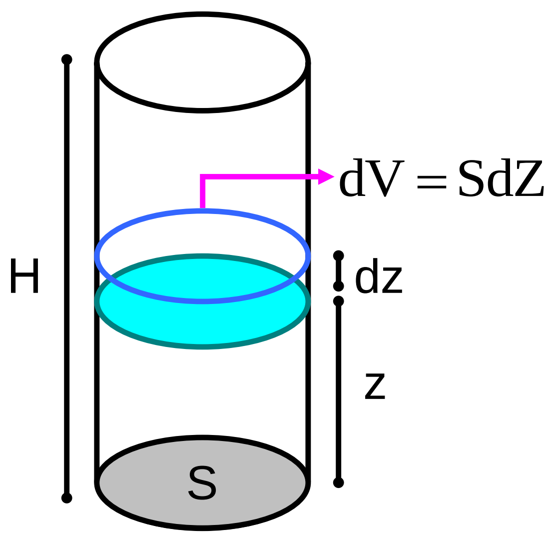
2. Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 1

Αέριο βρίσκεται σε κυλινδρικό δοχείο με εμβαδό διατομής S, ύψος H και σταθερής θερμοκρασία T.

α) Θεωρώντας το πεδίο βαρύτητας ομογενές, υπολογίστε τη μέση τιμή της δυναμικής ενέργειας των μορίων του αερίου.

β) Πώς εξαρτάται αυτό το μέγεθος από το αν αποτελείται το αέριο από ένα ή πολλά είδη μορίων;



Η κατανομή Boltzmann θα είναι:

$$dP = Ae^{-\frac{U}{kT}}dV \Rightarrow dP = Ae^{-\frac{mgz}{kT}}dV \Rightarrow dP = \underbrace{ASe^{-\frac{mgz}{kT}}}_{f(z)}dz$$

Η σταθερά κανονικοποίησης προσδιορίζεται από την σχέση:

$$\int dP = 1 \Rightarrow \int_V Ae^{-\frac{mgz}{kT}}dV = 1 \Rightarrow A\int_0^H e^{-\frac{mgz}{kT}}Sdz = 1$$

$$-\frac{ASkT}{mg}e^{-\frac{mgz}{kT}}\Big|_0^H = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\frac{SkT}{mg}\left(1-e^{-\frac{mgH}{kT}}\right)}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Η μέση τιμή της δυναμικής ενέργειας των μορίων του αερίου θα είναι:

$$\langle U\rangle = mg\langle z\rangle$$

Αρκεί να υπολογίσουμε το <z>, έτσι θα έχουμε:

$$\langle z\rangle = \int_0^H z\,f(z)dz =$$

$$= \int_0^H zASe^{-\frac{mgz}{kT}}dz = AS\int_0^H ze^{-\frac{mgz}{kT}}dz = -AS\frac{kT}{mg}\int_0^H z\left(e^{-\frac{mgz}{kT}}\right)' dz =$$ παραγοντική

$$= -AS\frac{kT}{mg}\left[ze^{-\frac{mgz}{kT}}\Big|_0^H - \int_0^H e^{-\frac{mgz}{kT}}dz \right] = -AS\frac{kT}{mg}\left[ze^{-\frac{mgz}{kT}} + \frac{kT}{mg}e^{-\frac{mgz}{kT}} \right]_0^H =$$

$$= -AS\frac{kT}{mg}\left[He^{-\frac{mgH}{kT}} + \frac{kT}{mg}e^{-\frac{mgH}{kT}} - \frac{kT}{mg} \right] =$$

$$= A\frac{SkT}{mg}\left[He^{-\frac{mgH}{kT}} + \frac{kT}{mg}\left(e^{-\frac{mgH}{kT}} - 1\right) \right]$$

Αντικαθιστώντας την σταθερά κανονικοποίησης έχουμε:

$$\langle z\rangle = \frac{1}{\frac{SkT}{mg}\left(1-e^{-\frac{mgH}{kT}}\right)}\frac{SkT}{mg}\left[He^{-\frac{mgH}{kT}}+\frac{kT}{mg}\left(e^{-\frac{mgH}{kT}}-1\right)\right] = H\frac{e^{-\frac{mgH}{kT}}}{1-e^{-\frac{mgH}{kT}}}+\frac{kT}{mg}$$

$$=\frac{kT}{mg}\left(1-\frac{\frac{mgH}{kT}}{e^{-\frac{mgH}{kT}}-1}\right)$$

Άρα η μέση τιμή της δυναμικής ενέργειας των μορίων του αερίου θα είναι:

$$\langle U\rangle = mg\langle z\rangle = kT\left(1-\frac{\frac{mgH}{kT}}{e^{\frac{mgH}{kT}}-1}\right)$$

Παρατηρούμε ότι αν το δοχείο έχει πεπερασμένο ύψος η μέση δυναμική ενέργεια εξαρτάται από το αν αποτελείται το αέριο από ένα ή πολλά είδη μορίων.

Στην περίπτωση όμως που το δοχείο έχει πολύ μεγάλο ύψος έχουμε: $\langle U\rangle = kT$

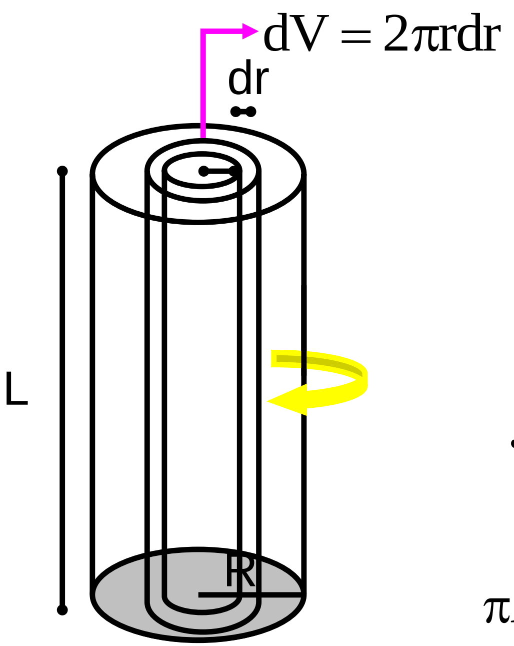
☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 2

Κύλινδρος ακτίνας R που περιέχει 1 mole ιδανικού αερίου περιστρέφεται έτσι, ώστε η δυναμική ενέργεια των μορίων να είναι $m\omega r^2$ όπου ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής, m η μάζα κάθε μορίου και r η απόσταση από το κέντρο.

α) Υπολογίστε τη μέση δυναμική ενέργεια των μορίων.

β) Τι συμβαίνει όταν $R \to +\infty$



Η κατανομή Boltzmann θα είναι:

$$dP = Ae^{-\frac{U}{kT}}dV \Rightarrow dP = Ae^{-\frac{m\omega r^2}{kT}}dV \Rightarrow dP = \underbrace{ALe^{-\frac{m\omega r^2}{kT}}2\pi r}_{f(r)}dr$$

Η σταθερά κανονικοποίησης προσδιορίζεται από την σχέση:

$$\int dP = 1 \Rightarrow \int_V f(r)dr = 1 \Rightarrow 2\pi AL\int_0^R re^{-\frac{m\omega r^2}{kT}}dr = 1 \Rightarrow$$

$$\pi AL\int_0^R (r^2)'e^{-\frac{m\omega r^2}{kT}}dr = 1 \Rightarrow -\frac{kT}{m\omega}\pi AL\int_0^R \left(e^{-\frac{m\omega r^2}{kT}}\right)'dr = 1 \Rightarrow$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

$$-\frac{kT}{m\omega}\pi AL\, e^{-\frac{m\omega r^2}{kT}}\Bigg|_0^R = 1 \Rightarrow \frac{kT}{m\omega}\pi AL\left(1-e^{-\frac{m\omega R^2}{kT}}\right)=1 \Rightarrow A=\frac{1}{\pi L\frac{kT}{m\omega}\left(1-e^{-\frac{m\omega R^2}{kT}}\right)}$$

Η μέση τιμή της δυναμικής ενέργειας των μορίων του αερίου θα είναι:

$$\langle U\rangle = m\omega\langle r^2\rangle$$

$$\langle r^2\rangle = \int_V r^2 f(r)\,dr = 2\pi AL\int_0^R r r^2 e^{-\frac{m\omega r^2}{kT}}dr$$

$$\left.\begin{aligned} r^2 = z \Rightarrow 2rdr = dz \\ r^3dr = rr^2dr = \frac{1}{2}zdz \end{aligned}\right\}$$

Το ολοκλήρωμα τελικά θα προκύψει:

$$\int_0^R r^3 e^{-\frac{m\omega r^2}{kT}}dr = \frac{1}{2}\frac{k^2T^2}{m^2\omega^2}\left(1-e^{-\frac{m\omega R^2}{kT}}-\frac{m\omega R^2}{kT}e^{-\frac{m\omega R^2}{kT}}\right)$$

Άρα

$$\left\langle r^2 \right\rangle = 2\pi AL\frac{1}{2}\frac{k^2T^2}{m^2\omega^2}\left(1-e^{-\frac{m\omega R^2}{kT}} - R^2\frac{m\omega}{kT}e^{-\frac{m\omega R^2}{kT}}\right) =$$

αντικαθιστώντας το A έχουμε:

$$= \frac{kT}{m\omega}\left(1-\frac{m\omega R^2}{kT}\frac{e^{-\frac{m\omega R^2}{kT}}}{1-e^{-\frac{m\omega R^2}{kT}}}\right) = \frac{kT}{m\omega}\left(1-\frac{\frac{m\omega R^2}{kT}}{e^{-\frac{m\omega R^2}{kT}}-1}\right)$$

Άρα η μέση τιμή της δυναμικής ενέργειας των μορίων του αερίου θα είναι:

$$\left\langle U \right\rangle = m\omega\left\langle r^2 \right\rangle = kT\left(1-\frac{\frac{m\omega R^2}{kT}}{e^{\frac{m\omega R^2}{kT}}-1}\right)$$

Στην περίπτωση όμως που το δοχείο έχει πολύ μεγάλη ακτίνα: $\left\langle U \right\rangle = kT$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 3

Σε ένα κατακόρυφο κυλινδρικό δοχείο περιέχεται αέριο από τα μόρια του οποίου έχουν μάζα m. Αν θεωρήσουμε το πεδίο βαρύτητας της Γης ομογενές να υπολογισθεί:

α) Ο αριθμός των σωματιδίων στο δοχείο

β) Πόσο θα αλλάξει η πίεση σε ύψος z από την βάση του δοχείου αν η θερμοκρασία μεταβληθεί *ν* φορές

γ) Το κέντρο μάζας των σωματιδίων στο δοχείο.

Από την σχέση του Boltzmann έχουμε: $n(z) = n_o e^{-\frac{mgz}{kT}}$

επειδή $n = \dfrac{dN}{dV} \overset{dV=Sdz}{=} \dfrac{dN}{Sdz} \Rightarrow dN = nSdz$

Η πυκνότητα πιθανότητας είναι: $dP = \dfrac{dN}{N} = \dfrac{nsdz}{N} = \overbrace{\dfrac{n_o s}{N} e^{-\frac{mgz}{kT}}}^{f(z)} dz$

Από την συνθήκη κανονικοποιήσης έχουμε: $\int dP = 1 \Rightarrow \dfrac{n_o S}{N} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{mgz}{kT}} dz = 1 \Rightarrow$

$$-\frac{n_o S}{N}\left[e^{-\frac{mgz}{kT}}\right]_0^H = 1 \Rightarrow \frac{n_o SkT}{Nmg}\left(1 - e^{-\frac{mgH}{kT}}\right) = 1 \Rightarrow \boxed{N = \frac{n_o SkT}{mg}\left(1 - e^{-\frac{mgH}{kT}}\right)}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

όπου H το ύψος του κυλίνδρου, S = 2πR το εμβαδόν της διατομής του, R η ακτίνα της βάσης του και no η συγκέντρωση των μορίων στη βάση του.
Αν το ύψος του κυλίνδρου είναι πολύ μεγάλο δηλαδή $H \to \infty$ ο εκθετικός όρος μηδενίζεται και ο αριθμός των σωματιδίων στο δοχείο σε συνάρτηση με την συγκέντρωση στην βάση του θα είναι:

$$N = \frac{\pi R^2 n_o kT}{mg}$$

α) Για θερμοκρασία T έχουμε:

$$n(z) = n_o e^{-\frac{mgz}{kT}} \quad (1)$$

Για θερμοκρασία νT έχουμε:

$$n'(z) = n'_o e^{-\frac{mgz_o}{\nu kT}} \quad (2)$$

Από την καταστατική εξίσωση του ιδανικού αερίου έχουμε: $PV = NkT \Rightarrow P = nkT$

$$P(z) = n_o kTe^{-\frac{mgz}{kT}} \quad (3)$$

$$P'(z) = \nu n'_o kTe^{-\frac{mgz}{\nu kT}} \quad (4)$$

Επειδή ο αριθμός των σωματιδίων και στην αρχική θερμοκρασία T αλλά και στην τελική T΄ = νT κατάσταση δεν αλλάζει θα έχουμε:

$$N = N' \Rightarrow \frac{\pi R^2 n_o kT}{mg} = \frac{\pi R^2 n'_o k\nu T}{mg} \Rightarrow n'_o = \frac{n_o}{\nu} \quad (5)$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Διαιρώντας κατά μέλη την (3) προς (4) και χρησιμοποιώντας την (5) θα έχουμε:

$$\frac{P'(z)}{P(z)}=\frac{\nu n_o' kT e^{-\frac{mgz}{\nu kT}}}{n_o kT e^{-\frac{mgz}{kT}}}=\frac{e^{-\frac{mgz}{\nu kT}}}{e^{-\frac{mgz}{kT}}}=\left(e^{\frac{mgz}{\nu kT}}\right)^{\nu-1}$$

Η θέση του κέντρου μάζας των σωματιδίων στο δοχείο ταυτίζεται με τη μέση θέση τους:

$$\langle z\rangle=\int_0^H z\,f(z)dz=$$

$$=\frac{n_o S}{N}\int_0^H z e^{-\frac{mgz}{kT}}dz=-\frac{n_o S}{N}\frac{kT}{mg}\int_0^H z\left(e^{-\frac{mgz}{kT}}\right)' dz\overset{\text{παραγοντική}}{=}$$

$$=-\frac{n_o S}{N}\frac{kT}{mg}\left[\left. z e^{-\frac{mgz}{kT}}\right|_0^H-\int_0^H e^{-\frac{mgz}{kT}}dz\right]=-\frac{n_o S}{N}\frac{kT}{mg}\left[z e^{-\frac{mgz}{kT}}+\frac{kT}{mg}e^{-\frac{mgz}{kT}}\right]_0^H=$$

$$=-\frac{n_o S}{N}\frac{kT}{mg}\left[H e^{-\frac{mgH}{kT}}+\frac{kT}{mg}e^{-\frac{mgH}{kT}}-\frac{kT}{mg}\right]=$$

$$=\frac{n_o S}{N}\frac{kT}{mg}\left[-H e^{-\frac{mgH}{kT}}+\frac{kT}{mg}\left(1-e^{-\frac{mgH}{kT}}\right)\right]$$

Αντικαθιστώντας : $$N=\frac{n_o SkT}{mg}\left(1-e^{-\frac{mgH}{kT}}\right)$$

$$\langle z\rangle=\frac{n_o S}{N}\frac{kT}{mg}\left[-He^{-\frac{mgH}{kT}}+\frac{kT}{mg}\left(1-e^{-\frac{mgH}{kT}}\right)\right]=$$

$$=\frac{n_o S}{\frac{n_o SkT}{mg}\left(1-e^{-\frac{mgH}{kT}}\right)}\frac{kT}{mg}\left[-He^{-\frac{mgH}{kT}}+\frac{kT}{mg}\left(1-e^{-\frac{mgH}{kT}}\right)\right]=$$

$$=-H\frac{e^{-\frac{mgH}{kT}}}{1-e^{-\frac{mgH}{kT}}}+\frac{kT}{mg}=kT\left[1-\frac{\frac{mgH}{kT}}{e^{\frac{mgH}{kT}}-1}\right]$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 4

Η δυναμική ενέργεια των μορίων του αερίου, σε κεντρικό πεδίο, εξαρτάται από την απόσταση r από το κέντρο του πεδίου, σύμφωνα με τη σχέση $U(r) = \alpha r^2$, όπου α θετική σταθερά. Η θερμοκρασία του αερίου είναι T και η συγκέντρωση των μορίων στο κέντρο του πεδίου n_o . Υπολογίστε:

α) τον αριθμό των μορίων που βρίσκονται σε απόσταση από r έως r + dr από το κέντρο του πεδίου.

β) την πιθανότερη απόσταση των μορίων από το κέντρου του πεδίου.

γ) τον σχετικό αριθμό των μορίων που βρίσκονται στο στρώμα r εώς r+dr.

δ) τον αριθμό των μορίων που έχουν δυναμική ενέργεια από U έως U + dU

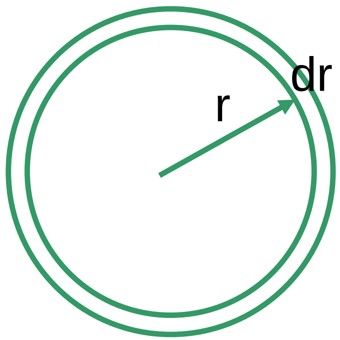
ε) την πιθανότερη τιμή της δυναμικής ενέργειας των μορίων.

στ) πόσες φορές θα μεταβληθεί η συγκέντρωση των μορίων στο κέντρο του πεδίου αν η θερμοκρασία μειωθεί κατά ν φορές.

α) Από την σχέση του Boltzmann έχουμε: $n(r) = n_o e^{-\frac{\alpha r^2}{kT}}$

επειδή $n = \dfrac{dN}{dV} \overset{dV=4\pi r^2 dr}{=} \dfrac{dN}{4\pi r^2 dr} \Rightarrow dN = 4\pi n r^2 dr$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com



Ο αριθμός των μορίων που βρίσκονται σε απόσταση από r έως r + dr από το κέντρο του πεδίου είναι:

$$dN = 4\pi n_o e^{-\frac{\alpha r^2}{kT}} r^2 dr$$

β) Η πυκνότητα πιθανότητας είναι:

$$dP = \frac{dN}{N} = \underbrace{\frac{4\pi n_o}{N} e^{-\frac{\alpha r^2}{kT}} r^2}_{f(r)} dr$$

Για να βρούμε την πιθανότερη απόσταση πρέπει να βρούμε εκείνο το σημείο όπου η πυκνότητα πιθανότητας παρουσιάζει μέγιστο. Έτσι,

$$\left.\frac{df(r)}{dr}\right|_{r=r_{\pi\iota\theta}} = 0 \qquad \text{όμως} \qquad \frac{df(r)}{dr} = \frac{4\pi n_o}{N}\left(2re^{-\frac{\alpha r^2}{kT}} - \frac{2\alpha r}{kT} e^{-\frac{\alpha r^2}{kT}} r^2\right) \Rightarrow$$

$$2re^{-\frac{\alpha r^2}{kT}} - \frac{2\alpha r}{kT} e^{-\frac{\alpha r^2}{kT}} r^2 = 0 \Rightarrow r\left(1 - \frac{\alpha r^2}{kT}\right) = 0 \Rightarrow r_{\pi\iota\theta} = \sqrt{\frac{kT}{\alpha}}$$

γ) Από την συνθήκη κανονικοποιήσης έχουμε: $\int dP = 1 \Rightarrow \dfrac{4\pi n_o}{N}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\alpha r^2}{kT}} r^2 dz = 1 \Rightarrow$

$$\frac{4\pi n_o}{N}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\left(\frac{\alpha}{kT}\right)^{3/2}} = 1 \Rightarrow \frac{4\pi n_o}{N} = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi kT}\right)^{3/2}$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-(rx)^m} dx = \frac{1}{m r^{n+1}}\Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right)$$

$$n = 2, m = 2, r = \sqrt{\frac{\alpha}{kT}}$$

Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε:

$$dP = \frac{dN}{N} = \underbrace{4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{\alpha r^2}{kT}} r^2}_{f(r)} dr$$

Σχετικός αριθμός μορίων σε απόσταση από r έως r + dr από το κέντρο του πεδίου

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

δ) Επειδή U = αr² $\Rightarrow r = \sqrt{\dfrac{U}{\alpha}}$ άρα, $\dfrac{dU}{dr} = 2\alpha r \Rightarrow dr = \dfrac{dU}{2\sqrt{U\alpha}}$

$$f(r)dr = \frac{4\pi n_o}{N} e^{-\frac{\alpha r^2}{kT}} r^2 dr = \frac{4\pi n_o}{N} e^{-\frac{U}{kT}} \frac{U}{\alpha} \frac{dU}{2\sqrt{U\alpha}} =$$

$$= \frac{2\pi n_o}{N} \frac{1}{\alpha^{3/2}} e^{-\frac{U}{kT}} U^{1/2} dU = f(U)dU$$

Επειδή: $dP = \dfrac{dN}{N} = f(U)dU$

Ο αριθμό των μορίων που έχουν δυναμική ενέργεια από U έως U + dU είναι:

$$dN = \frac{2\pi n_o}{\alpha^{3/2}} e^{-\frac{U}{kT}} U^{1/2} dU$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ε) η πιθανότερη τιμή της δυναμικής ενέργειας των μορίων θα προσδιοριστεί από την απαίτηση:

$$\left.\frac{df(U)}{dU}\right|_{U=U_{\pi\iota\theta}}=0$$

όμως $\quad \dfrac{df(U)}{dU}=\dfrac{2\pi n_o}{N\alpha^{3/2}}\left(-\dfrac{U^{1/2}}{kT}e^{-\frac{U}{kT}}+\dfrac{U^{-1/2}}{2}e^{-\frac{U}{kT}}\right)$

$$\frac{df(U)}{dU}=0 \Rightarrow -\frac{U^{1/2}}{kT}e^{-\frac{U}{kT}}+\frac{U^{-1/2}}{2}e^{-\frac{U}{kT}}=0 \Rightarrow$$

$$U=\frac{kT}{2}\Rightarrow \boxed{U_{\pi\iota\theta}=\frac{kT}{2}}$$