# ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
# ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ



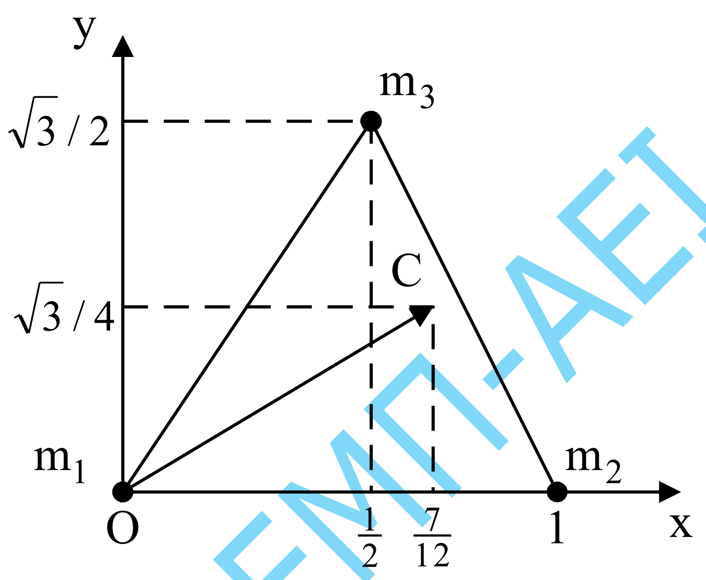
*Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας*

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
**www.pmoiras.weebly.com**

**Θέμα 1**

Προσδιορίστε το κέντρο μάζας τριών σημειακών μαζών $m_1$=1kgr, $m_2$ = 2kgr και $m_3$ = 3kgr που βρίσκονται στις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς 1 m.
***(Τμήμα Ηλεκτρολογίας Τ.Ε.Ι.)***

**Λύση**




Επιλέγοντας σύστημα συντεταγμένων Oxy έτσι ώστε ο άξονας x να συμπίπτει με τη μια πλευρά του τριγώνου, όπως φαίνεται στο σχήμα, προκύπτουν οι συντεταγμένες των τριών μαζών ως:

$$m_1(0,0),\ \ m_2(1,0)\ \ \text{και}\ \ m_3(1/2, \sqrt{3}/2)$$

Άρα οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας είναι:

$$x_c = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1/2}{1+2+3} = \frac{7}{12}\,\text{m}$$

$$y_c = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 3\cdot \sqrt{3}/2}{1+2+3} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,\text{m}$$

Επομένως το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας είναι:

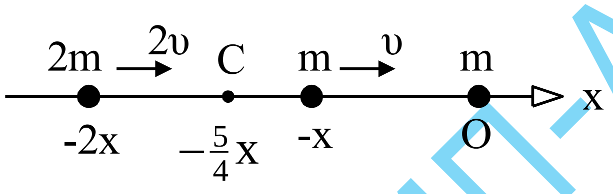
$$\vec{r}_c = x_c\hat{x} + y_c\hat{y} \Rightarrow \vec{r}_c = \frac{7}{12}\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{4}\hat{y}\ \ (\text{m})$$

**Θέμα 2**

Το σχήμα δείχνει τρεις μάζες 2m, m και m που κινούνται με ταχύτητες (ως προς το O) 2υ, υ και 0 αντίστοιχα. Οι θέσεις των μαζών τη χρονική στιγμή t είναι –2x, -x και 0 αντίστοιχα. Το πρόβλημα είναι μονοδιάστατο.
**α)** Ποια είναι η θέση, ορμή και ταχύτητα του ΚΜ τη χρονική στιγμή t;
**β)** Τη στιγμή t ποια είναι η ταχύτητα του κάθε σωματιδίου ως προς το ΚΜ; Ποια είναι η ολική ορμή ως προς το ΚΜ;
**γ)** Δείξτε ότι τα 3 σωματίδια θα συγκρουστούν ταυτόχρονα. Που και πότε θα συμβεί αυτό;
**δ)** Αν η κρούση είναι τελείως πλαστική, βρείτε την κινητική ενέργεια του ΚΜ και το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας που χάνεται σε θερμότητα.

***(Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)***

**Λύση**




**α)** Η θέση του ΚΜ τη χρονική στιγμή t είναι:

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{m0 + m(-x) + 2m(-2x)}{m + m + 2m} = \frac{-5mx}{4m} \Rightarrow x_c = -\frac{5}{4}x$$

Η ταχύτητα του ΚΜ είναι:

$$\upsilon_c = \frac{\sum m_i \upsilon_i}{\sum m_i} = \frac{m0 + m\upsilon + 2m2\upsilon}{m + m + 2m} = \frac{5m\upsilon}{4m} \Rightarrow \upsilon_c = \frac{5}{4}\upsilon$$

Και η ορμή του ΚΜ είναι:

$$p_c = \frac{\sum m_i p_i}{\sum m_i} = \frac{m0 + mm\upsilon + 2m2m\upsilon}{m + m + 2m} = \frac{5m^2\upsilon}{4m} \Rightarrow p_c = \frac{5}{4}m\upsilon$$

**β)** Σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου η ταχύτητα $\upsilon_i'$ κάθε σωματιδίου ως προς το σύστημα του κέντρου μάζας δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon_i' = \upsilon_i - \upsilon_c$$

Άρα: $\upsilon_1' = 0 - \frac{5}{4}\upsilon = -\frac{5}{4}\upsilon$, $\upsilon_2' = \upsilon - \frac{5}{4}\upsilon = -\frac{1}{4}\upsilon$ και $\upsilon_3' = 2\upsilon - \frac{5}{4}\upsilon = \frac{3}{4}\upsilon$

Η ολική ορμή ως προς το ΚΜ είναι:

$$p' = \sum p_i' = \sum m_i \upsilon_i' = m\upsilon_1' + m\upsilon_2' + 2m\upsilon_3' =$$
$$= -\frac{5}{4}m\upsilon - \frac{1}{4}m\upsilon + 2m\frac{3}{4}\upsilon \Rightarrow p' = 0$$

**γ)** Προφανώς τα τρία σωματίδια δύναται να συγκρουστούν ταυτόχρονα στη θέση x=0. Αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί από τα δεδομένα κινηματικά μεγέθη των σωματιδίων. Δηλαδή επειδή το ένα σωματίδιο βρίσκεται σε διπλάσια απόσταση από το Ο και κινείται με διπλάσια σταθερή ταχύτητα από ότι το άλλο σωματίδιο, τότε τα δύο αυτά σωματίδια θα συναντηθούν ταυτόχρονα στο σημείο x = 0. Συνεπώς τα τρία σωματίδια θα συγκρουστούν ταυτόχρονα στο σημείο x = 0.
Τη χρονική στιγμή της σύγκρουσης $t_\Sigma$ η θέση του κέντρου μάζας είναι $x_c = 0$, οπότε:

$$\upsilon_c = \frac{dx_c}{dt} \Rightarrow \frac{5}{4}\upsilon = \frac{dx_c}{dt} \Rightarrow \int_{-\frac{5}{4}x}^{0} dx_c = \frac{5}{4}\upsilon\int_{0}^{t_\Sigma} dt \Rightarrow \frac{5}{4}x = \frac{5}{4}\upsilon t_\Sigma \Rightarrow t_\Sigma = \frac{x}{\upsilon}$$

**δ)** Αν η κρούση των σωματιδίων είναι πλαστική τότε αυτά θα κινούνται ως ένα σώμα μάζας $M = \Sigma m_i = 4m$ με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του ΚΜ $(\upsilon' = \upsilon_c)$ όπως προκύπτει κι από την αρχή διατήρησης της ορμής:

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow m\upsilon + 2m2\upsilon + m0 = 4m\upsilon' \Rightarrow 5m\upsilon = 4m\upsilon' \Rightarrow \upsilon' = \frac{5}{4}\upsilon = \upsilon_c$$

Άρα η κινητική ενέργεια του ΚΜ μετά την κρούση είναι:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}M\upsilon_c^2 = \frac{1}{2}4m\left(\frac{5}{4}\upsilon\right)^2 \Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{25}{8}m\upsilon^2$$

Η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}2m(2\upsilon)^2 + 0 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + 4m\upsilon^2 \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} = \frac{9}{2}m\upsilon^2$$

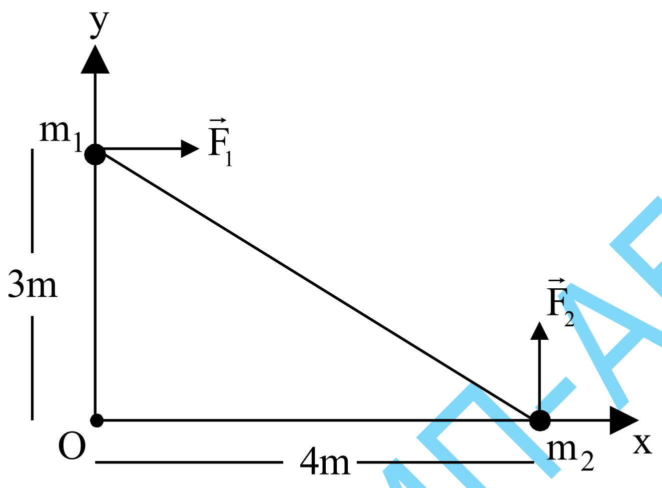
Άρα το ποσοστό της $K_{\alpha\rho\chi}$ που χάνεται σε θερμότητα λόγω της πλαστικής κρούσης είναι:

$$\frac{K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\varepsilon\lambda}}{K_{\alpha\rho\chi}} = \frac{\left(\frac{9}{2} - \frac{25}{8}\right)m\upsilon^2}{(9/2)m\upsilon^2} = \frac{11/8}{9/2} = \frac{11}{36} = 0{,}31 \quad (\text{ή } 31\%)$$

**Θέμα 3**

Ένα σύστημα αποτελείται από δύο σημειακές μάζες $m_1$=10kgr και $m_2$=6kgr που έχουν συνδεθεί μεταξύ τους με στερεά ράβδο αμελητέας μάζας όπως φαίνεται στο σχήμα. Αρχικά το σύστημα είναι ακίνητο, ενώ στη συνέχεια υπό την επίδραση των δυνάμεων :

$\vec{F}_1 = 8\hat{x}$ (N) και $\vec{F}_2 = 6\hat{y}$ (N) το σύστημα αρχίζει να κινείται.




**α)** Υπολογίστε τις συντεταγμένες του κέντρου μάζας των δυο μαζών σαν συνάρτηση του χρόνου.
**β)** Υπολογίστε την ολική ορμή του συστήματος σαν συνάρτηση του χρόνου.

***(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)***

**Λύση**

**α)** Ο 2$^{ος}$ νόμος του Newton για το σύστημα δίνει:

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = M\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (m_1+m_2)\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} \Rightarrow 8\hat{x} + 6\hat{y} = 16\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\vec{\upsilon}_c} d\vec{\upsilon}_c = \int_0^t (0{,}5\hat{x} + 0{,}375\hat{y})dt \Rightarrow \vec{\upsilon}_c(t) = 0{,}5t\hat{x} + 0{,}375t\hat{y} \quad (\text{m/sec})$$

Δηλαδή η ταχύτητα του κέντρου μάζας έχει συνιστώσες :

$$\upsilon_{c_x}(t) = 0{,}5t \quad \textbf{(1)} \quad \text{και} \quad \upsilon_{c_y}(t) = 0{,}375t \quad \textbf{(2)}$$

Αρχικά τη χρονική στιγμή t = 0 οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας είναι:

$$x_c(0) = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1+m_2} = \frac{10\cdot 0 + 6\cdot 4}{10+6} = \frac{24}{16} = 1{,}5$$

$$y_c(0)=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}=\frac{10\cdot 3+6\cdot 4}{10+6}=\frac{30}{16}=1{,}875$$

Άρα: $\upsilon_{c_x}(t)=\dfrac{dx_c}{dt}\overset{(1)}{\Rightarrow}\int_{1,5}^{x_c}dx_c=0{,}5\int_0^t tdt\Rightarrow x_c(t)=0{,}25t^2+1{,}5\quad(m)$

και $\upsilon_{c_y}(t)=\dfrac{dy_c}{dt}\overset{(2)}{\Rightarrow}\int_{1,875}^{y_c}dy_c=0{,}375\int_0^t tdt\Rightarrow y_c(t)=0{,}1875t^2+1{,}875\quad(m)$

**β)** Επίσης είναι:

$$\Sigma\vec{F}_{ext}=\vec{F}_1+\vec{F}_2=8\hat{x}+6\hat{y}=\frac{d\vec{P}}{dt}\Rightarrow\int_0^{\vec{P}}d\vec{P}=\int_0^t(8\hat{x}+6\hat{y})dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\vec{P}(t)=8t\hat{x}+6t\hat{y}\quad(kgr\cdot m\cdot sec^{-1})$$

## Θέμα 4

Έστω τρία σώματα με μάζες $m_1$=2kgr, $m_2$ = 3kg και $m_3$=5 kgr. Το σύστημα των τριών μαζών είναι απομονωμένο. Οι τρεις μάζες βρίσκονται στις θέσεις (0,0), (1.5,2) και (3,2) αντίστοιχα. Κάποια χρονική στιγμή οι μάζες $m_1$ και $m_2$ συγκρούονται στο σημείο (4,3). Να βρεθεί η θέση της μάζας $m_3$ εκείνη τη χρονική στιγμή.

***(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)***

## Λύση

Το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας των τριών σωμάτων είναι:

$$\vec{r}_c = \frac{\Sigma m_i \vec{r}_i}{\Sigma m_i} = \frac{m_1(0\hat{x}+0\hat{y})+m_2(1{,}5\hat{x}+2\hat{y})+m_3(3\hat{x}+2\hat{y})}{m_1+m_2+m_3} =$$

$$= \frac{4{,}5\hat{x}+6\hat{y}+15\hat{x}+10\hat{y}}{2+3+5} = \frac{19{,}5\hat{x}+16\hat{y}}{10} \Rightarrow \vec{r}_c = 1{,}95\hat{x}+1{,}6\hat{y} \qquad \textbf{(1)}$$

Επειδή το σύστημα των μαζών είναι απομονωμένο το κέντρο μάζας του συστήματος είναι σταθερό κι ακίνητο ($\vec{\upsilon}_c = 0$ εφόσον δεν είχε αρχική ταχύτητα), δηλαδή το διάνυσμα θέσης του είναι σταθερό. Οπότε αμέσως μετά την κρούση είναι:

$$\vec{r}_c = \frac{m_1(4\hat{x}+3\hat{y})+m_2(4\hat{x}+3\hat{y})+m_3\vec{r}_3}{m_1+m_2+m_3} = \frac{5(4\hat{x}+3\hat{y})+5\vec{r}_3}{10} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 1{,}95\hat{x}+1{,}6\hat{y} = 2\hat{x}+1{,}5\hat{y}+0{,}5\vec{r}_3 \Rightarrow \vec{r}_3 = 2(-0{,}05\hat{x}+0{,}1\hat{y}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r}_3 = -0{,}1\hat{x}+0{,}2\hat{y}$$

**Θέμα 5**

Δύο σώματα μαζών $m_1$ και $m_2$ έχουν ταχύτητες $\upsilon_1$ και $\upsilon_2$ αντίστοιχα ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Βρείτε την ταχύτητα του κάθε σώματος και την ολική ορμή τους ως προς το σύστημα του κέντρου μάζας.

***(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)***

**Λύση**

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι : $\upsilon_c = \dfrac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}$ **(1)**

Χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου, η ταχύτητα κάθε σώματος στο σύστημα του κέντρου μάζας είναι :

$$\upsilon_1' = \upsilon_1 - \upsilon_c \overset{(1)}{=} \upsilon_1 - \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2(\upsilon_1 - \upsilon_2)}{m_1 + m_2} \quad \textbf{(2)}$$

$$\upsilon_2' = \upsilon_2 - \upsilon_c \overset{(1)}{=} \upsilon_2 - \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_1(\upsilon_1 - \upsilon_2)}{m_1 + m_2} \quad \textbf{(3)}$$

Άρα στο σύστημα του κέντρου μάζας τα δυο σώματα φαίνονται να κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις.

Η ολική ορμή στο σύστημα του κέντρου μάζας είναι :

$$P' = p_1' + p_2' = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' \overset{(2),(3)}{=} \frac{m_1 m_2(\upsilon_1 - \upsilon_2)}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 m_1(\upsilon_1 - \upsilon_2)}{m_1 + m_2} \Rightarrow P' = 0$$

**Θέμα 6**

Υπολογίστε την ολική ορμή συστήματος N σωματιδίων ως προς το σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας.

***(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)***

**Λύση**

Η ολική ορμή του συστήματος των σωματιδίων ως προς το σύστημα του κέντρου μάζας είναι:

$$\vec{P}' = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i' = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_i' \qquad \textbf{(1)}$$

όπου $\vec{\upsilon}_i'$ η ταχύτητα κάθε σωματιδίου ως προς το σύστημα του κέντρου μάζας.

Αλλά η ταχύτητα του κέντρου μάζας ως προς το σύστημα του κέντρου μάζας θα δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{\upsilon}_c' = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_i'}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_i' = M\vec{\upsilon}_c' \qquad \textbf{(2)}$$

όπου $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

Επειδή όμως η $\vec{\upsilon}_c'$ είναι η ταχύτητα του ΚΜ σε σύστημα που διαρκώς συμπίπτει με το ΚΜ είναι προφανώς $\vec{\upsilon}_c' = 0$, οπότε η **(1)** δίνει:

$$\vec{P}' = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_i' \overset{(2)}{=} M\vec{\upsilon}_c' \Rightarrow \vec{P}' = 0$$

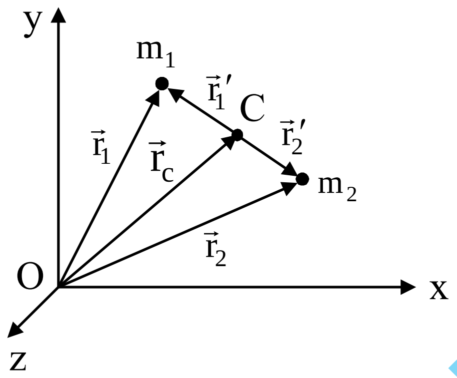
Άρα η ολική ορμή συστήματος σωματιδίων ως προς το σύστημα του κέντρου μάζας είναι πάντα μηδέν.

## Θέμα 7

Έστω δύο σωματίδια με μάζες $m_1$, $m_2$ και διανύσματα θέσης $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ αντίστοιχα ως προς σταθερό σύστημα αναφοράς Oxyz. Να αποδειχθεί ότι το κέντρο μάζας των δύο αυτών σημειακών μαζών βρίσκεται πάνω στην ευθεία που τις ενώνει και οι αποστάσεις του από τις δύο μάζες είναι αντιστρόφως ανάλογες των μαζών.

***(Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)***

## Λύση




Το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας είναι: $\vec{r}_c = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ **(1)**

Σύμφωνα με τη διανυσματική άθροιση ισχύει:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_c + \vec{r}_1{}' \Rightarrow \vec{r}_1{}' = \vec{r}_1 - \vec{r}_c \overset{(1)}{=} \vec{r}_1 - \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \vec{r}_1{}' = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad \textbf{(2)}$$

και

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_c + \vec{r}_2{}' \Rightarrow \vec{r}_2{}' = \vec{r}_2 - \vec{r}_c \overset{(1)}{=} \vec{r}_2 - \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \vec{r}_2{}' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad \textbf{(3)}$$

Άρα όπως φαίνεται από τις **(2)** και **(3)** οι αποστάσεις του κέντρου μάζας από τις δύο μάζες είναι αντιστρόφως ανάλογες του αθροίσματος των μαζών.

Στη συνέχεια υπολογίζοντας το εξωτερικό γινόμενο των $\vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}'$ προκύπτει:

$$\vec{r}_1' \times \vec{r}_2' \overset{(2),(3)}{=} \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\times(\vec{r}_2-\vec{r}_1) = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}(\vec{r}_1\times\vec{r}_2+\vec{r}_2\times\vec{r}_1)=0$$

επειδή $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = -\vec{r}_2 \times \vec{r}_1$

Άρα αφού $\vec{r}_1' \times \vec{r}_2' = 0$ είναι $\vec{r}_1' /\!/ \vec{r}_2'$ κι επομένως το κέντρο μάζας των δύο αυτών μαζών βρίσκεται πάνω στην ευθεία που τις ενώνει.

## Θέμα 8

Απομονωμένο σύστημα αποτελείται από δυο σωματίδια με μάζες $m_1$ και $m_2$ που κινούνται με ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2$ κάθετες μεταξύ τους. Δείξτε ότι το μέτρο της ορμής κάθε σωματιδίου ως προς το σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας είναι $p_1' = p_2' = \mu\sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2}$ όπου $\mu = m_1m_2 / m_1+m_2$ η ανηγμένη μάζα του συστήματος.

***(Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)***

## Λύση

Η ορμή κάθε σωματιδίου ως προς το σύστημα του κέντρου μάζας είναι:

$$\vec{p}_1' = m_1\vec{\upsilon}_1' \quad \text{και} \quad \vec{p}_2' = m_2\vec{\upsilon}_2' \qquad \textbf{(1)}$$

όπου $\vec{\upsilon}_1', \vec{\upsilon}_2'$ οι ταχύτητες των σωματιδίων ως προς το σύστημα του κέντρου μάζας.

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι: $\vec{\upsilon}_c = \dfrac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}$ **(2)**

Αλλά σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου ισχύουν:

$$\vec{\upsilon}_1' = \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_c \overset{(2)}{=} \vec{\upsilon}_1 - \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \vec{\upsilon}_1' = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2)$$

και $$\vec{\upsilon}_2' = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_c \overset{(2)}{=} \vec{\upsilon}_2 - \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \vec{\upsilon}_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1)$$

Άρα οι **(1)** γίνονται: $$\vec{p}_1' = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2) = \mu(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2)$$

$$\vec{p}_2' = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1) = \mu(\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1)$$

Επειδή τα διανύσματα $\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2$ είναι κάθετα μεταξύ τους τα μέτρα των $\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2$ και $\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1$ είναι ίσα, δηλαδή :

$$|\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2| = |\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1| = \sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2}$$

Άρα τα μέτρα των ορμών $\vec{p}_1'$ και $\vec{p}_2'$ είναι ίσα και ισχύει:

$$p_1' = p_2' = \mu\sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2}$$

## Θέμα 9

Δείξτε ότι η στροφορμή ενός συστήματος N σωματιδίων ως προς το κέντρο μάζας του συστήματος δίνεται από τη σχέση $\vec{L}' = \vec{L} - \vec{r}_c \times \vec{p}$, όπου $\vec{L}$ η στροφορμή του συστήματος ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου και $\vec{r}_c, \vec{p}$ τα διανύσματα θέσης του κέντρου μάζας και ορμής του συστήματος ως προς το ακίνητο σύστημα.

***(Τμήμα Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)***

## Λύση

Η στροφορμή συστήματος N σωματιδίων ως προς το κέντρο μάζας είναι:

$$\vec{L}' = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{p}_i' = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i' \times \vec{\upsilon}_i' \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου είναι:

$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{r}_c$ και $\vec{\upsilon}_i' = \vec{\upsilon}_i - \vec{\upsilon}_c$ οπότε η **(1)** δίνει:

$$\vec{L}' = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_c) \times (\vec{\upsilon}_i - \vec{\upsilon}_c) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \vec{\upsilon}_i - \left( \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{\upsilon}_c - \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_c \times \vec{\upsilon}_i + \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_c \times \vec{\upsilon}_c) \qquad \textbf{(2)}$$

Όμως από τον ορισμό του διανύσματος θέσης του κέντρου μάζας είναι:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_c = M \vec{r}_c$$

όπου $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ η ολική μάζα του συστήματος.

Άρα η **(2)** γίνεται:

$$\vec{L}' = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \vec{\upsilon}_i - M\vec{r}_c \times \vec{\upsilon}_c - \vec{r}_c \times \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_i + M\vec{r}_c \times \vec{\upsilon}_c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{L}' = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \vec{\upsilon}_i - \vec{r}_c \times \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_i \Rightarrow \vec{L}' = \vec{L} - \vec{r}_c \times \vec{p}$$

## Θέμα 10

Δείξτε ότι για τη στροφορμή $\vec{L}'$ συστήματος N σωματιδίων ως προς το σύστημα του κέντρου μάζας ισχύει πάντα:

$$\vec{L}' = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{p}_i' = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{p}_i$$

όπου τα διανύσματα $\vec{L}'$, $\vec{r}_i'$, $\vec{p}_i'$, αναφέρονται στο σύστημα του κέντρου μάζας, ενώ το διάνυσμα $\vec{p}_i$ αναφέρεται στο ακίνητο σύστημα του εργαστηρίου.

***(Τμήμα Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)***

## Λύση

Η στροφορμή συστήματος N σωματιδίων ως προς το σύστημα του κέντρου μάζας είναι:

$$\vec{L}' = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{p}_i' = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i' \times \vec{\upsilon}_i' \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά: $\vec{\upsilon}_i' = \vec{\upsilon}_i - \vec{\upsilon}_c$ οπότε η **(1)** δίνει: $\vec{L}' = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i' \times \vec{\upsilon}_i - \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i'\right) \times \vec{\upsilon}_c$ **(2)**

Επειδή όμως το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας ως προς το σύστημα του κέντρου μάζας είναι πάντα μηδέν ισχύει:

$$\vec{r}_c' = 0 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i'}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i' = 0$$

Συνεπώς η **(2)** δίνει:

$$\vec{L}' = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i' \times \vec{\upsilon}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times m_i \vec{\upsilon}_i \Rightarrow \vec{L}' = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{p}_i$$

## Θέμα 11

Το κέντρο μάζας ενός συστήματος σωματιδίων συνολική μάζας $M = \Sigma m_i$ κινείται με ταχύτητα v ως προς κάποιο ακίνητο σύστημα αναφοράς Oxyz. Αν E είναι η ολική κινητική ενέργεια των σωματιδίων ως προς το σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας, να υπολογιστεί η ολική κινητική ενέργεια K των σωματιδίων ως προς Oxyz συναρτήσει των παραμέτρων που δίνονται.

***(Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)***

## Λύση

Η κινητική ενέργεια του συστήματος ως προς το αδρανειακό σύστημα Oxyz είναι:

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \upsilon_i^2 \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά από το μετασχηματισμό Γαλιλαίου είναι: $\vec{\upsilon}_i = \vec{\upsilon}'_i + \vec{v}$, όπου $\vec{v}$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας. Αντικαθιστώντας στην **(1)** προκύπτει:

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (\vec{\upsilon}'_i + \vec{v})^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (\vec{\upsilon}'^2_i + v^2 + 2\vec{\upsilon}'_i \cdot \vec{\upsilon}_c) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \upsilon'^2_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v^2 + \left( \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}'_i \right) \cdot \vec{\upsilon}_c$$

Αλλά η ολική ορμή των σωματιδίων $\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}'_i$ στο σύστημα του κέντρου μάζας είναι πάντα μηδέν οπότε η τελευταία δίνει:

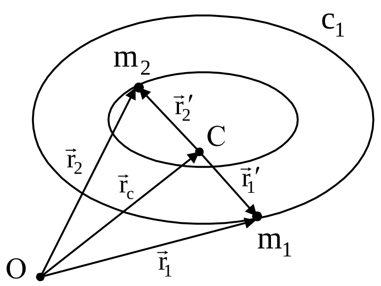
$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \upsilon'^2_i + \frac{1}{2} M v^2 \Rightarrow K = E + \frac{1}{2} M v^2$$

## Θέμα 12

Τα σωματίδια $m_1$, $m_2$ αλληλεπιδρούν αποτελώντας κλειστό σύστημα απομονωμένο από εξωτερικές επιδράσεις. Αν $c_1$ είναι η καμπύλη της τροχιάς του $m_1$ ως προς το σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας και οι θέσεις των $m_1$, $m_2$ στο σχήμα αποτελούν στιγμιότυπο της κίνησης και $m_2 = 2m_1$, να σχεδιάσετε την τροχιά που διαγράφει το $m_2$ (ως προς το σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας).

***(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)***

## Λύση




Έστω O η αρχή ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς και C το κέντρο μάζας των σωματιδίων. Είναι:

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2)\vec{r}_c = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r}_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\vec{r}_c - \frac{m_2}{m_1}\vec{r}_2 \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά από τη διανυσματική άθροιση ισχύουν:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_c + \vec{r}_1{}' \Rightarrow \vec{r}_1{}' = \vec{r}_1 - \vec{r}_c \overset{(1)}{=} \frac{m_1 + m_2}{m_1}\vec{r}_c - \frac{m_2}{m_1}\vec{r}_2 - \vec{r}_c \Rightarrow \vec{r}_1{}' = \frac{m_2}{m_1}(\vec{r}_c - \vec{r}_2) \qquad \textbf{(2)}$$

και $\quad \vec{r}_2 = \vec{r}_c - \vec{r}_2{}' \Rightarrow \vec{r}_2{}' = \vec{r}_2 - \vec{r}_c \Rightarrow \vec{r}_2{}' = -(\vec{r}_c - \vec{r}_2) \qquad$ **(3)**

Διαιρώντας τις **(2)** και **(3)** κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{\vec{r}_1{}'}{\vec{r}_2{}'} = -\frac{m_2}{m_1} = -\frac{2m_1}{m_1} \Rightarrow \vec{r}_1{}' = -2\vec{r}_2{}'$$

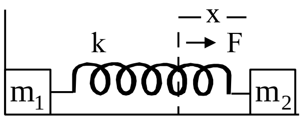
Δηλαδή τα διανύσματα θέσης των δύο σωματιδίων ως προς το κέντρο μάζας είναι κάθε χρονική στιγμή παράλληλα με αντίθετες κατευθύνσεις κι επομένως θα έχουν όμοιες γεωμετρικές τροχιές. Άρα η τροχιά που διαγράφει το σωματίδιο $m_2$ είναι ελλειπτική όπως φαίνεται στο σχήμα.

## Θέμα 13

Δύο σώματα μάζας $m_1$ και $m_2$ συνδέονται με ελατήριο σταθεράς k. Τοποθετούμε το σύστημα σε μια γωνία όπου το δάπεδο είναι ελεύθερο τριβών και μετατοπίζουμε τη μάζα $m_2$ έτσι ώστε το ελατήριο να συμπιεστεί κατά x (το τοίχωμα είναι ακλόνητο). Να βρεθεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας τη στιγμή που η μάζα $m_1$ αφήνει το τοίχωμα.

***(Κατατακτήριες εξετάσεις για Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)***

## Λύση




Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon_c = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} \qquad \textbf{(1)}$$

Καθώς το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά x και η μάζα $m_2$ κινείται προς τα δεξιά θα ασκείται σε αυτή η δύναμη του ελατηρίου F = kx. Όταν η μάζα $m_2$ περάσει από την αρχική της θέση τότε η μάζα $m_1$ οριακά αφήνει το τοίχωμα και θεωρείται ότι $\upsilon_1 = 0$.
Η ταχύτητα $\upsilon_2$ της μάζας $m_2$ τη στιγμή αυτή υπολογίζεται μέσω του 2[ου] νόμου του Newton:

$$F = m_2\alpha_2 \Rightarrow kx = m_2\frac{d\upsilon_2}{dt} = m_2\frac{d\upsilon_2}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow kx = m_2\frac{d\upsilon_2}{dx}\upsilon_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\upsilon_2}\upsilon_2 d\upsilon_2 = \frac{k}{m_2}\int_0^x x dx \Rightarrow \frac{\upsilon_2^2}{2} = \frac{k}{m_2}\frac{x^2}{2} \Rightarrow \upsilon_2 = x\sqrt{\frac{k}{m_2}}$$

Άρα η **(1)** δίνει για την ταχύτητα του κέντρου μάζας τη στιγμή αυτή:

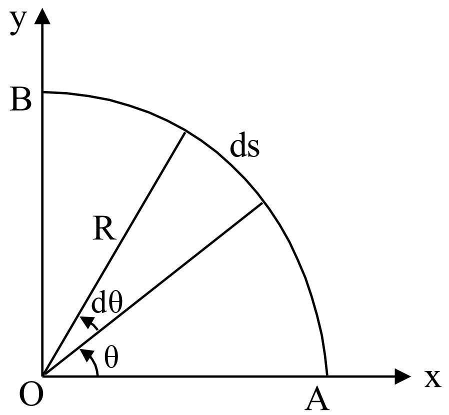
$$\upsilon_c = \frac{m_1 0 + m_2 x\sqrt{k/m_2}}{m_1 + m_2} \Rightarrow \upsilon_c = \frac{x\sqrt{km_2}}{m_1 + m_2}$$

**Θέμα 14**

Να προσδιοριστεί η θέση του κέντρου μάζας ομογενούς σύρματος που έχει τη μορφή του ενός τετάρτου περιφέρειας κύκλου ακτίνας R.

***(Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)***

**Λύση**




Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας ως προς το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy στο επίπεδο της περιφέρειας με αρχή το κέντρο της περιφερείας είναι:

$$x_c = \frac{1}{M}\int_A^B x\,dm \quad \text{και} \quad y_c = \frac{1}{M}\int_A^B y\,dm \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά από την σταθερή γραμμική πυκνότητα λ του σύρματος ισχύει:

$$dm = \lambda ds \quad \text{και} \quad M = \int_A^B \lambda ds = \lambda\int_A^B ds = \lambda\frac{\pi R}{2} = \frac{1}{2}\pi\lambda R \qquad \textbf{(2)}$$

Οπότε οι σχέσεις **(1)** λόγω των **(2)** γίνονται:

$$x_c = \frac{2}{\pi R}\int_A^B x\,ds \quad \text{και} \quad y_c = \frac{2}{\pi R}\int_A^B y\,ds \qquad \textbf{(3)}$$

Με αλλαγή των καρτεσιανών σε πολικές συντεταγμένες, δηλαδή για
$x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$ και $ds = Rd\theta$ οι **(3)** γράφονται:

$$x_c = \frac{2}{\pi R}\int_0^{\pi/2} R^2\cos\theta d\theta = \frac{2R}{\pi}[\sin\theta]_0^{\pi/2} \Rightarrow x_c = \frac{2R}{\pi}$$

και

$$y_c = \frac{2}{\pi R}\int_0^{\pi/2} R^2\sin\theta d\theta = \frac{2R}{\pi}[-\cos\theta]_0^{\pi/2} \Rightarrow y_c = \frac{2R}{\pi}$$

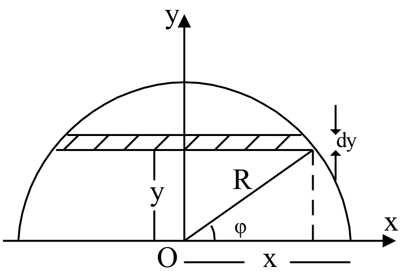
Παρατηρείται ότι λόγω συμμετρίας του σχήματος, το κέντρο μάζας βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας των αξόνων Ox και Oy.

**Θέμα 15**

Να προσδιοριστεί το κέντρο μάζας λεπτού ομογενούς ημικυκλίου ακτίνας R.

***(Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Εφαρμογών Ε.Μ.Π.)***

**Λύση**




Λόγω συμμετρίας του σώματος το κέντρο μάζας του είναι πάνω στον άξονα y κι έτσι θεωρούμε στοιχειώδη λωρίδα του σώματος μάζας dm και πλάτους dy. Είναι:

$$dm=\sigma dS=\sigma 2xdy \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά η σταθερή επιφανειακή πυκνότητα του σώματος είναι:

$$\sigma=\frac{M}{S}=\frac{M}{\pi R^2/2}=\frac{2M}{\pi R^2}$$

οπότε η **(1)** γίνεται:

$$dm=\frac{4M}{\pi R^2}xdy \qquad \textbf{(2)}$$

Επομένως το κέντρο μάζας του ημικυκλίου είναι:

$$y_c=\frac{1}{M}\int ydm \overset{(2)}{\Rightarrow} y_c=\frac{4}{\pi R^2}\int_0^R yxdy \qquad \textbf{(3)}$$

Μετασχηματίζοντας τις καρτεσιανές σε πολικές συντεταγμένες :

$x=R\cos\varphi,\ \ y=R\sin\varphi$ και $dy=R\cos\varphi d\varphi$ η **(3)** γίνεται:

$$y_c=\frac{4}{\pi R^2}\int_0^{\pi/2} R^3\sin\varphi\cos^2\varphi d\varphi=\frac{4R}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos^2\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{4R}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi[-d(\cos\varphi)]=$$

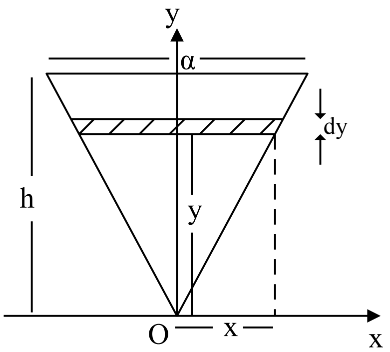
$$=\frac{4R}{\pi}\left[\frac{-\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi/2}=\frac{4R}{\pi}\left(0+\frac{1}{3}\right)\Rightarrow y_c=\frac{4R}{3\pi}$$

**Θέμα 16**

Να προσδιοριστεί το κέντρο μάζας λεπτού επίπεδου ισοσκελούς τριγώνου ύψους h.

***(Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Εφαρμογών Ε.Μ.Π.)***

**Λύση**




Λόγω συμμετρίας του σώματος το κέντρο μάζας του βρίσκεται στον άξονα y κι έτσι θεωρούμε στοιχειώδη λωρίδα του σώματος μάζας dm και πλάτους dy. Είναι:

$$dm = \sigma dS = \sigma 2xdy \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά: $\sigma = \dfrac{M}{S} = \dfrac{M}{\alpha h/2} = \dfrac{2M}{\alpha h}$, όπου α η βάση του ισοσκελούς τριγώνου.

Οπότε η **(1)** γίνεται: $$dm = \frac{4M}{\alpha h}xdy \qquad \textbf{(2)}$$

Επομένως το κέντρο μάζας του ισοσκελούς τριγώνου είναι:

$$y_c = \frac{1}{M}\int ydm \overset{(2)}{\Rightarrow} y_c = \frac{4}{\alpha h}\int_0^h yxdy \qquad \textbf{(3)}$$

Αλλά από το σχήμα, λόγω της ομοιότητας των τριγώνων ισχύει:

$$\frac{y}{x} = \frac{h}{\alpha/2} \Rightarrow x = \frac{y\alpha}{2h} \qquad \textbf{(4)}$$

Άρα η **(3)** λόγω της **(4)** δίνει:

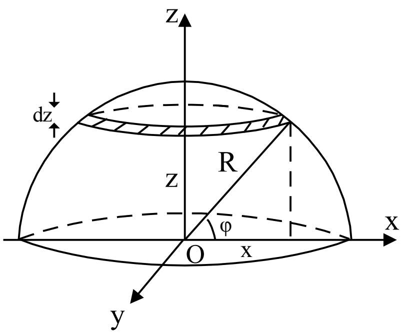
$$y_c = \frac{4}{\alpha h}\int_0^h y\frac{y\alpha}{2h}dy = \frac{2}{h^2}\int_0^h y^2dy \Rightarrow y_c = \frac{2}{3}h$$

**Θέμα 17**

Να προσδιοριστεί το κέντρο μάζας ομογενούς στερεού ημισφαιρικού σώματος ακτίνας R.

***(Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Εφαρμογών Ε.Μ.Π.)***

**Λύση**




Επιλέγοντας σύστημα συντεταγμένων Oxyz με αρχή O το κέντρο της βάσης του ημισφαιρίου, παρατηρείται ότι ο άξονας Oz είναι ο άξονας συμμετρίας του σώματος και το κέντρο μάζας θα βρίσκεται πάνω σε αυτόν. Οπότε θεωρούμε στοιχειώδη δίσκο μάζας dm, ακτίνας x και πάχους dz σε ύψος z από τη βάση του ημισφαιρίου. Είναι:

$$dm = \rho dV = \rho \pi x^2 dz \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά: $\rho = \dfrac{M}{V} = \dfrac{M}{\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi R^3} = \dfrac{3}{2}\dfrac{M}{\pi R^3}$ οπότε η **(1)** γίνεται:

$$dm = \frac{3M}{2R^3}x^2 dz \qquad \textbf{(2)}$$

Επομένως το κέντρο μάζας του ημισφαιρικού σώματος είναι:

$$z_c = \frac{1}{M}\int z dm \overset{(2)}{\Rightarrow} z_c = \frac{3}{2R^3}\int_0^R zx^2 dz \qquad \textbf{(3)}$$

Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση:

$x = R\cos\varphi$ , $z = R\sin\varphi$, και $dz = R\cos\varphi d\varphi$ η **(3)** γίνεται:

$$z_c = \frac{3}{2R^3}\int_0^{\pi/2} R^4 \sin\varphi\cos^3\varphi d\varphi = \frac{3R}{2}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos^3\varphi d\varphi =$$

$$\frac{3R}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi[-d(\cos\varphi)] = \frac{3R}{2}\left[-\frac{\cos^4\varphi}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{3R}{2}\left(0+\frac{1}{4}\right) \Rightarrow z_c = \frac{3}{8}R$$

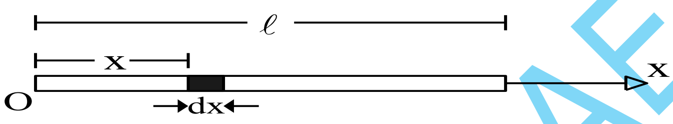
**Θέμα 18**

Μια λεπτή μη ομογενής ράβδος μήκους $\ell$ έχει γραμμική πυκνότητα που δίνεται από τη σχέση : $\lambda(x) = \alpha + \frac{\alpha}{\ell}x$

όπου α σταθερά και x η απόσταση από το ένα άκρο της. Να προσδιοριστεί το κέντρο μάζας της.

***(Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Εφαρμογών Ε.Μ.Π.)***

## Λύση




Θεωρούμε στοιχειώδες τμήμα της ράβδου μάζας dm και πλάτους dx σε απόσταση x από το Ο. Είναι:

$$dm = \lambda dx = \alpha\left(1 + \frac{1}{\ell}x\right)dx \qquad \textbf{(1)}$$

Και ολοκληρώνοντας την **(1)** υπολογίζεται η ολική μάζα της ράβδου.

Δηλαδή:

$$\int_0^M dm = \alpha\int_0^{\ell}\left(1 + \frac{1}{\ell}x\right)dx \Rightarrow M = \alpha\left[x + \frac{x^2}{2\ell}\right]_0^{\ell} = \alpha\left(\ell + \frac{\ell^2}{2\ell}\right) \Rightarrow M = \frac{3\alpha\ell}{2} \qquad \textbf{(2)}$$

Άρα το κέντρο μάζας της ράβδου είναι:

$$x_c = \frac{1}{M}\int x\,dm \overset{(1),(2)}{\Rightarrow} x_c = \frac{2}{3\alpha\ell}\int_0^{\ell} x\alpha\left(1 + \frac{1}{\ell}x\right)dx = \frac{2}{3\ell}\int_0^{\ell}\left(x + \frac{x^2}{\ell}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{3\ell}\left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3\ell}\right]_0^{\ell} = \frac{2}{3\ell}\left(\frac{\ell^2}{2} + \frac{\ell^3}{3\ell}\right) = \frac{2}{3\ell}\frac{5}{6}\ell^2 \Rightarrow x_c = \frac{5}{9}\ell$$