ΟΠΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ : ΚΑΤΟΠΤΡΑ – ΔΙΟΠΤΡΑ – ΦΑΚΟΙ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

EMC²

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ **6932 946778**
www.pmoiras.weebly.com

2.1 Εισαγωγή στα Οπτικά Στοιχεία

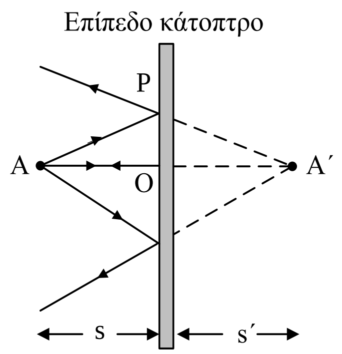
Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζονται οι βασικές διατάξεις ανακλαστικών ή διαθλαστικών συστημάτων (κάτοπτρα, δίοπτρα, φακοί) που χρησιμοποιούνται για την απεικόνιση, δηλαδή το σχηματισμό ειδώλων διαφόρων αντικειμένων. Τα οπτικά αυτά στοιχεία, κατά κανόνα, βασίζουν την λειτουργία τους σε ένα μόνο νόμο της Γεωμετρικής Οπτικής και χρησιμοποιούνται είτε ανεξάρτητα, είτε κυρίως σε συνδυασμούς μεταξύ τους στα οπτικά όργανα (οφθαλμικοί, μεγεθυντικοί,φωτογραφικοί φακοί, τηλεσκόπια, μικροσκόπια κ.α).
Ένα σύνολο ακτίνων που προσπίπτει σε ένα οπτικό στοιχείο, μετά την ανάκλαση ή διάθλασή τους, φαίνονται να συγκλίνουν προς ή να αποκλίνουν από ένα σημείο που ονομάζεται **σημειακό είδωλο**. Ενώ το σημείο από το οποίο πηγάζουν οι προσπίπτουσες ακτίνες στο οπτικό στοιχείο ονομάζεται **σημειακό αντικείμενο**.

Στα επόμενα θα ακολουθούνται οι εξής γενικοί κανόνες προσήμων των αποστάσεων του αντικειμένου s και του ειδώλου s΄ από το οπτικό στοιχείο:
α) Όταν το αντικείμενο βρίσκεται στην ίδια πλευρά του οπτικού στοιχείου με το προσπίπτον φως (πλευρά εισόδου), η απόσταση αντικειμένου s είναι θετική, ειδάλλως είναι αρνητική.
β) Όταν το είδωλο βρίσκεται στην ίδια πλευρά του οπτικού στοιχείου με το εξερχόμενο φως (πλευρά εξόδου), η απόσταση ειδώλου s΄ είναι θετική, ειδάλλως είναι αρνητική.
Τα είδωλα διακρίνονται σε **πραγματικά**, όταν σχηματίζονται από τις τομές των ανακλώμενων ή διαθλώμενων ακτίνων και σε **φανταστικά**, όταν σχηματίζονται από τις τομές των προεκτάσεων των ανακλώμενων ή διαθλώμενων ακτίνων. Αν το αντικείμενο και το είδωλο δεν είναι σημειακά, αλλά έχουν ύψη y και y΄ αντίστοιχα, τότε ο λόγος των υψών ειδώλων προς αντικείμενο, σε οποιαδήποτε περίπτωση σχηματισμού ειδώλου, ονομάζεται **εγκάρσια μεγέθυνση m** . Δηλαδή:

$$m = \frac{y'}{y} \qquad \textbf{(2 – 1)}$$

Όταν η τιμή της εγκάρσιας μεγέθυνσης είναι θετική το είδωλο είναι **ορθό**, ενώ όταν είναι αρνητική το είδωλο είναι **ανεστραμμένο**.

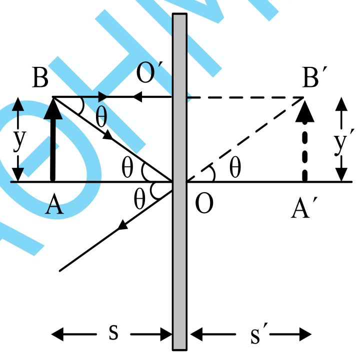
2.2 Επίπεδα Κάτοπτρα



Σχήμα 2.1

Γενικά η λειτουργία των κατόπτρων στηρίζεται στην εκμετάλλευση του φαινομένου της ανάκλασης του φωτός.
Στο επίπεδο κάτοπτρο του σχήματος **2.1** θεωρείται ένα σημειακό αντικείμενο Α σε απόσταση s από το κάτοπτρο, το οποίο σχηματίζει ένα σημειακό είδωλο Α΄ σε απόσταση s΄ από το κάτοπτρο.
Στη συνέχεια θα εξεταστεί η πορεία κάθε μιας ακτίνας χωριστά, που πηγάζει από το αντικείμενο Α, βάσει του νόμου της ανάκλασης (γωνία πρόσπτωσης ίση με γωνία ανάκλασης). Έτσι παρατηρείται ότι η ακτίνα ΑΟ που πέφτει κάθετα πάνω στο κάτοπτρο ανακλάται και επιστρέφει από τον ίδιο δρόμο, ενώ η ακτίνα ΑΡ αφού ανακλαστεί στο κάτοπτρο απομακρύνεται από αυτό. Είναι φανερό ότι τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΟΡ και Α΄ΟΡ είναι ίσα αφού έχουν κοινή πλευρά ΟΡ και λόγω της ανάκλασης οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{A}'$ είναι ίσες. Άρα το σημείο τομής των προεκτάσεων των δύο ανακλώμενων ακτίνων θα είναι συμμετρικό του Α ως προς το κάτοπτρο, δηλαδή ΑΟ = ΟΑ΄. Επιπλέον επειδή η ακτίνα ΑΡ είναι τυχαία, η προέκταση και οποιασδήποτε άλλης ακτίνας που θα ανακλαστεί από το κάτοπτρο θα διέλθει από το σημείο Α΄.
Συνεπώς το σημείο Α΄ αποτελεί το είδωλο του αντικειμένου Α και μάλιστα κάθε επίπεδο κάτοπτρο δίνει πάντα φανταστικό είδωλο συμμετρικά ως προς το επίπεδο του κατόπτρου.
Επειδή το αντικείμενο Α βρίσκεται στην πλευρά εισόδου (αριστερά) της ανακλαστικής επιφάνειας, η απόσταση του αντικειμένου s είναι θετική, ενώ η απόσταση του ειδώλου s΄ είναι αρνητική επειδή το είδωλο Α΄ δεν βρίσκεται στην πλευρά εξόδου (αριστερά) της επιφάνειας. Άρα οι αποστάσεις αντικειμένου s και ειδώλου s΄ για κάθε επίπεδο κάτοπτρο σχετίζονται με την απλή σχέση:

$$s = -s' \qquad \textbf{(2 – 2)}$$



Σχήμα 2.2

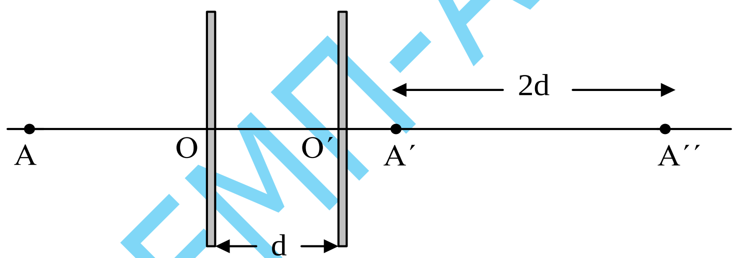
Στην περίπτωση που το αντικείμενο δεν είναι σημειακό, αλλά έχει διαστάσεις, τότε το είδωλό του είναι το σύνολο των ειδώλων όλων των σημείων τον αντικειμένου.
Στο σχήμα **2.2** παριστάνεται ένα γραμμικό αντικείμενο ΑΒ ύψους y, παράλληλο προς ένα επίπεδο κάτοπτρο. Όπως φαίνεται στο σχήμα και σύμφωνα με τα παραπάνω δύο ακτίνες εκπορευόμενες από το σημείο Β ανακλώνται και αποκλίνουν σχηματίζοντας το σημειακό είδωλο Β΄.
Ομοίως το σημείο Α σχηματίζει είδωλο στο Α΄ και κάθε ενδιάμεσο σημείο του αντικειμένου ΑΒ έχει σημειακό είδωλο μεταξύ των Α΄ και Β΄. Έτσι λόγω της **(2-2)** είναι $|s| = |s'|$ και από την ανάκλαση η γωνία θ

των τριγώνων ΑΟΒ και Α΄ΟΒ΄ είναι ίδια (δηλαδή τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα) προκύπτει ότι ΑΒ = Α΄Β΄, δηλαδή ισχύει ότι y = y΄.
Άρα η εγκάρσια μεγέθυνση του ειδώλου είναι : $m = y'/y = 1$
Δηλαδή το είδωλο έχει φυσικές διαστάσεις (ίδιο μέγεθος και προσανατολισμό με το αντικείμενο), είναι φανταστικό και ορθό.

✍ Εφαρμογή 1

Να δειχτεί ότι αν ένα επίπεδο κάτοπτρο μετατοπιστεί παράλληλα κατά d, τότε παρατηρείται διπλάσια μετατόπιση 2d του ειδώλου σταθερού αντικειμένου.

Λύση



Σχήμα 2.3

Αρχικά όταν το κάτοπτρο βρίσκεται στη θέση Ο, το αντικείμενο που βρίσκεται στο σημείο Α σχηματίζει είδωλο στο σημείο Α΄ και σύμφωνα με τη **(2-2)** είναι:

$$AO = OA' \qquad \textbf{(1)}$$

Στη συνέχεια όταν το κάτοπτρο μετατοπιστεί κατά d στη θέση Ο΄, τότε το αντικείμενο θα σχηματίσει είδωλο στο σημείο A'' και θα ισχύει:

$$AO' = O'A'' \qquad \textbf{(2)}$$

Επομένως : $A'A'' = AA'' - AA'$ και λόγω των **(1)** και **(2)** είναι ΑΑ΄ = 2ΑΟ και $AA'' = 2AO'$ προκύπτει τελικά ότι:

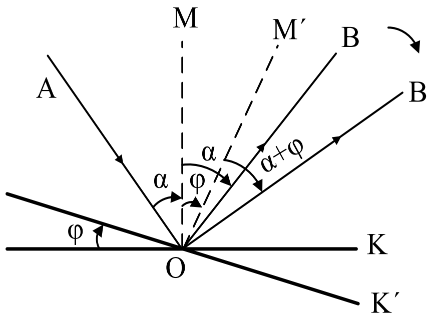
$$A'A'' = 2AO' - 2AO = 2(AO' - AO) = 2OO' \Rightarrow A'A'' = 2d$$

Δηλαδή η παράλληλη μετατόπιση επίπεδου κατόπτρου, επιφέρει διπλάσια μετατόπιση κατά την ίδια φορά του ειδώλου σταθερού αντικειμένου.

Εφαρμογή 2

Να δειχτεί ότι αν ένα επίπεδο κάτοπτρο περιστραφεί κατά γωνία φ, τότε η ανακλώμενη ακτίνα στρέφεται κατά γωνία 2φ.

Λύση



Σχήμα 2.4

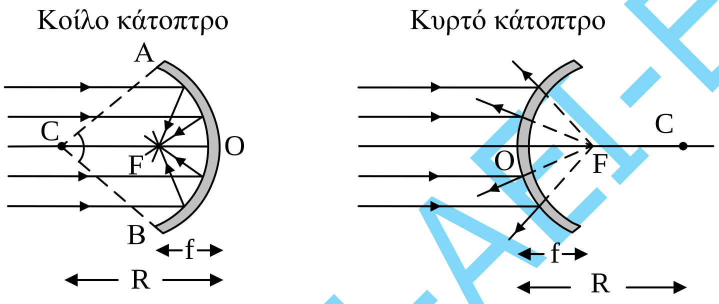
Έστω το επίπεδο κάτοπτρο Κ το οποίο στρέφεται κατά γωνία φ περί άξονα κάθετο ο οποίος διέρχεται απ΄ το σημείο πρόσπτωσης Ο σταθερής ακτίνας ΑΟ. Η προσπίπτουσα ακτίνα ΑΟ σχηματίζει με την κάθετη Μ στο κάτοπτρο Κ γωνία α, οπότε και η ανακλώμενη ακτίνα ΟΒ θα σχηματίζει με τη Μ γωνία α.
Όταν το κάτοπτρο Κ στραφεί κατά γωνία φ και η κάθετη Μ θα στραφεί κατά την ίδια γωνία φ, δηλαδή η Μ και η Μ΄ θα σχηματίζουν γωνία φ. Έτσι τώρα η προσπίπτουσα ακτίνα ΑΟ σχηματίζει με την κάθετη Μ΄ γωνία α+φ, οπότε και η ανακλώμενη ακτίνα ΟΒ΄ θα σχηματίζει με την Μ΄ ίδια γωνία α+φ.
Άρα από το σχήμα εύκολα προκύπτει ότι η γωνία στροφής της ανακλώμενης ακτίνας $B\hat{O}B'$ είναι:

$$B\hat{O}B' = M\hat{O}B' - M\hat{O}B = (\varphi + \alpha + \varphi) - \alpha \Rightarrow B\hat{O}B' = 2\varphi$$

Η στροφή αυτή της ανακλώμενης κατά γωνία διπλάσια από τη γωνία στροφής του κατόπτρου για σταθερή προσπίπτουσα, βρίσκει εφαρμογή στις μετρήσεις πολύ μικρών γωνιών (μέθοδος Poggendorf) καθώς και στη λειτουργία του εξάντα, που είναι ένα χρήσιμο όργανο στο καθορισμό του στίγματος κατά την πλοήγηση πλοίων ή αεροπλάνων παλαιότερα.

2.3 Σφαιρικά Κάτοπτρα

Ένα σφαιρικό κάτοπτρο αποτελεί τμήμα μιας σφαίρας και μπορεί να είναι κοίλο ή κυρτό ανάλογα με το αν η ανακλώσα επιφάνεια είναι το εσωτερικό ή το εξωτερικό μέρος της σφαίρας.
Στη συνέχεια με τη βοήθεια του **Σχήματος 2.5** παρουσιάζεται η ονοματολογία που χρησιμοποιείται στη μελέτη των σφαιρικών κατόπτρων.

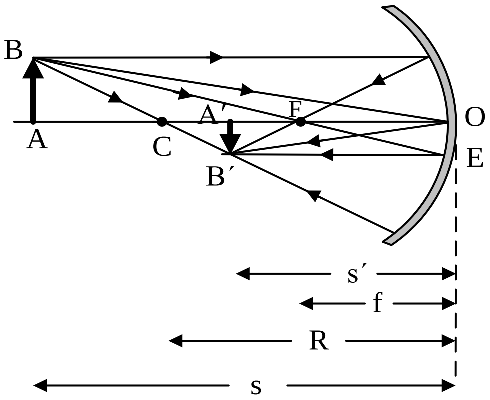


Σχήμα 2.5

Το **κέντρο καμπυλότητας C** ενός σφαιρικού κατόπτρου είναι το κέντρο της σφαίρας εκείνης της οποίας τμήμα είναι η επιφάνεια του κατόπτρου.
Το σημείο O στο κέντρο της κατοπτρικής επιφάνειας ονομάζεται **κορυφή** ή **οπτικό κέντρο** του κατόπτρου και η ευθεία γραμμή που περνά από το κέντρο καμπυλότητας C και το οπτικό κέντρο O ονομάζεται **οπτικός ή κύριος άξονας** του κατόπτρου.
Η απόσταση μεταξύ των σημείων C και O αποτελεί την **ακτίνα καμπυλότητας** του κατόπτρου. Κάθε άλλη ευθεία που διέρχεται από το κέντρο καμπυλότητας C ονομάζεται **δευτερεύον άξονας**, ενώ η γωνία ACB ονομάζεται **άνοιγμα** του κατόπτρου.
Στη συνέχεια η μελέτη της ανάκλασης του φωτός σε σφαιρικά κάτοπτρα θα περιοριστεί για λόγους ευκολίας στην εξέταση ακτίνων που βρίσκονται κοντά στον κύριο άξονα και σχηματίζουν με αυτόν μικρή γωνία. Τέτοιες ακτίνες, ονομάζονται **παραξονικές ακτίνες** και γι' αυτό η προσέγγιση που θα χρησιμοποιηθεί λέγεται **παραξονική προσέγγιση**.
Επίσης μια παράλληλη δέσμη εισερχόμενων ακτίνων, μετά την ανάκλαση, συγκλίνει ή αποκλίνει σε ένα σημείο F που ονομάζεται **εστιακό σημείο** και η απόστασή του από την κορυφή O ονομάζεται **εστιακή απόσταση f**. Αποδεικνύεται ότι για κάθε σφαιρικό κάτοπτρο ισχύει:

$$f = \frac{R}{2} \qquad \textbf{(2 – 3)}$$

Α. Σχηματισμός ειδώλου από κοίλο κάτοπτρο



Σχήμα 2.6

Για την εύρεση και τη γεωμετρική κατασκευή του ειδώλου χρησιμοποιούνται οι χαρακτηριστικές ακτίνες:

α) η ακτίνα παράλληλη προς τον κύριο άξονα, που διέρχεται μετά την ανάκλασή της από την εστία.

β) η ακτίνα που διέρχεται από το κέντρο καμπυλότητας, ανακλάται και επιστρέφει κατά την ίδια διεύθυνση

γ) η ακτίνα που διέρχεται από την κύρια εστία, ανακλάται παράλληλα προς τον κύριο άξονα.

δ) η ακτίνα που προσπίπτει στο οπτικό κέντρο Ο και ανακλάται υπό γωνία ίση με τη γωνία πρόσπτωσης.

Όπως φαίνεται και στο σχήμα για αντικείμενο ΑΒ κάθετο στο κύριο άξονα είναι αρκετή η εύρεση του Β΄ για το σχηματισμό ολόκληρου του ειδώλου Α΄Β΄.

Αν y και y΄ είναι οι γραμμικές διαστάσεις αντικειμένου και ειδώλου αντίστοιχα και s και s΄ οι αποστάσεις αντικειμένου και ειδώλου από το οπτικό κέντρο Ο, τότε από το σχήμα και λόγω ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΟ και Α΄Β΄Ο προκύπτει:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AO}{A'O} \Rightarrow \frac{y}{y'} = \frac{s}{s'}$$

Επίσης λόγω της ομοιότητας των τριγώνων ABF και FOE προκύπτει:

$$\frac{AB}{OE} = \frac{AF}{FO} \Rightarrow \frac{y}{y'} = \frac{s-f}{f}$$

Άρα από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει εύκολα ότι:

$$\frac{s-f}{f} = \frac{s}{s'} \Rightarrow \frac{s-f}{sf} = \frac{1}{s'} \Rightarrow \frac{1}{f} - \frac{1}{s} = \frac{1}{s'} \Rightarrow \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \qquad \textbf{(2 – 4)}$$

Η εξίσωση αυτή λέγεται **εξίσωση των κατόπτρων**, όπου f=R/2 είναι η εστιακή απόσταση.

Η εγκάρσια μεγέθυνση του ειδώλου σύμφωνα με την **(2-1)** είναι:

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \qquad \mathbf{(2-5)}$$

Το αρνητικό πρόσημο λαμβάνεται γιατί το αντικείμενο και το είδωλο βρίσκονται προς αντίθετες πλευρές του οπτικού άξονα, δηλαδή το y είναι θετικό το y΄ θα είναι αρνητικό. Η αρνητική τιμή της μεγέθυνσης δηλώνει ότι το είδωλο είναι ανεστραμμένο ως προς το αντικείμενο και μικρότερο από αυτό γιατί προφανώς m<1.

🗐 Παρατηρήσεις

1) Για $s = \infty$ η **(2 – 4)** δίνει $s' = f$ και η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε παράλληλη δέσμη ακτίνων που σχηματίζει είδωλο στο σημείο της εστίας F (**Σχήμα 2.5**).

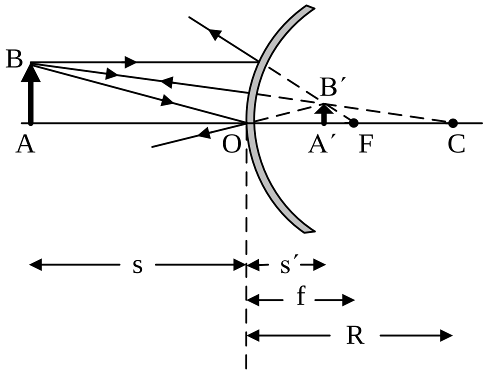
2) Για s=R η **(2 – 4)** δίνει $s' = R$, δηλαδή αν αντικείμενο τεθεί στο κέντρο καμπυλότητας σχηματίζει το είδωλό του στο ίδιο σημείο με $m = 1$, δηλαδή ανεστραμμένο και ίσο προς το αντικείμενο.

3) Για s=f η **(2 – 4)** δίνει $s' = \infty$ δηλαδή δεν υπάρχει είδωλο.

4) Για f<s<R η **(2 – 4)** δίνει $s' > s$ δηλαδή το είδωλο είναι ανεστραμμένο και μεγαλύτερο του αντικειμένου (αφού m>1).

5) Για s<f η **(2 – 4)** δίνει $s' < 0$ που σημαίνει ότι το είδωλο σχηματίζεται πίσω από το κάτοπτρο, δηλαδή είναι φανταστικό, ορθό και μεγαλύτερο του αντικειμένου.

Β. Σχηματισμός ειδώλου από κυρτό κάτοπτρο



Σχήμα 2.7

Για την εύρεση του ειδώλου χρησιμοποιούνται οι χαρακτηριστικές ακτίνες: η παράλληλη προς τον οπτικό άξονα, η διερχόμενη από το κέντρο καμπυλότητας και η διερχόμενη από το οπτικό κέντρο.

Είναι φανερό ότι οπουδήποτε και να τεθεί το αντικείμενο ΑΒ, το είδωλο θα είναι πάντα φανταστικό (γιατί προκύπτει από την τομή των προεκτάσεων των ανακλώμενων ακτίνων), ορθό και μικρότερο του αντικειμένου.

Έστω s και s΄ είναι οι αποστάσεις αντικειμένου και ειδώλου από το οπτικό κέντρο, y και y΄ τα ύψη αντικειμένου και ειδώλου, R η ακτίνα καμπυλότητας και f = R/2 η εστιακή απόσταση.

Από το σχήμα λόγω ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΟ και Α΄Β΄Ο προκύπτει:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'O}{AO} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

και επίσης λόγω ομοιότητας των τριγώνων ACB και Α΄CB΄ προκύπτει :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C}{AC} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{R-s'}{R+s}$$

Άρα από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι:

$$\frac{R-s'}{R+s} = \frac{s'}{s} \Rightarrow (R-s')s = (R+s)s' \Rightarrow Rs - s's = Rs' + ss' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rs = Rs' + 2ss' \Rightarrow \frac{Rs}{Rss'} = \frac{Rs'+2ss'}{Rss'} \Rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{s} + \frac{2}{R} \Rightarrow \frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = -\frac{2}{R}$$

Στην περίπτωση όμως των κυρτών κατόπτρων τα s΄ και R είναι αρνητικές ποσότητες κι επομένως η τελευταία καταλήγει στη γνωστή εξίσωση των κατόπτρων αν ληφθεί υπόψη και ότι f = R/2 :

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f} \qquad \textbf{(2 – 6)}$$

Η εγκάρσια μεγέθυνση του ειδώλου είναι:

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

Στον **Πίνακα 2.1** παρατίθεται η φυσική σημασία των προσήμων για τις διάφορες παραμέτρους των σφαιρικών κατόπτρων.

Μέγεθος	**Πρόσημο**	
	+	–
Ακτίνα καμπυλότητας R	Κοίλο κάτοπτρο	Κυρτό κάτοπτρο
Εστιακή απόσταση f	Κοίλο κάτοπτρο	Κυρτό κάτοπτρο
Απόσταση αντικειμένου s	Πραγματικό αντικείμενο	Φανταστικό αντικείμενο
Απόσταση ειδώλου s΄	Πραγματικό είδωλο	Φανταστικό είδωλο
Ύψος αντικειμένου y	Ορθό αντικείμενο	Ανεστραμμένο αντικείμενο
Ύψος ειδώλου y΄	Ορθό είδωλο	Ανεστραμμένο είδωλο
Εγκάρσια μεγέθυνση m	Ορθό είδωλο	Ανεστραμμένο είδωλο

Πίνακας 2.1

Τέλος ο **Πίνακας 2.2** δίνει όλες τις περιπτώσεις των κατόπτρων και των θέσεων και των ειδών αντικειμένων και ειδώλων.

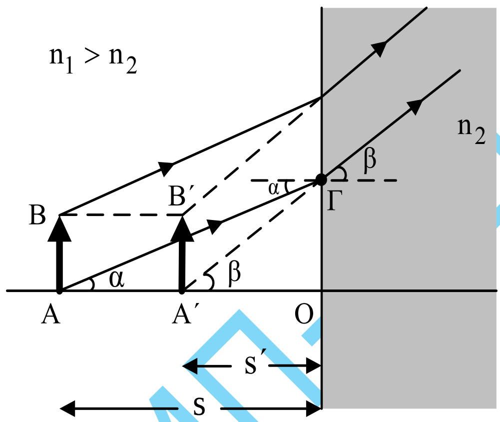
Είδος Κατόπτρου	**Αντικείμενο**	**Είδωλο**			
	Θέση	**Είδος**	**Θέση**	**Προσανατο-λισμός**	**Μεγέ-θυνση**
Επίπεδο	Οπουδήποτε	φανταστικό	$s' = s$	ορθό	m=1
Κοίλο	$s = \infty$	πραγματικό	$s' = f$	ανεστραμμένο	m<1
	R<s<∞	πραγματικό	$f > s' < R$	ανεστραμμένο	m<1
	s=R	πραγματικό	$s' = R$	ανεστραμμένο	m=1
	f<s<R	πραγματικό	$\infty > s' > R$	ανεστραμμένο	m>1
	s=f	–	∞	–	–
	s<f	φανταστικό	$\lvert s' \rvert < s$	ορθό	m>1
Κυρτό	οπουδήποτε	φανταστικό	$\lvert s' \rvert < \lvert f \rvert$	ορθό	m<1

Πίνακας 2.2

2.4 Δίοπτρα

Γενικά ένα σύστημα δύο διαφανών ομογενών μέσων, τα οποία διαχωρίζονται από μία επιφάνεια ονομάζεται **δίοπτρο**. Αν η επιφάνεια αυτή είναι επίπεδη ή σφαιρική, ορίζεται αντίστοιχα το επίπεδο ή το σφαιρικό δίοπτρο. Ο σχηματισμός του ειδώλου ενός αντικειμένου μέσω ενός δίοπτρου βασίζεται στο νόμο της διάθλασης.

Α. Επίπεδο δίοπτρο



Σχήμα 2.8

Έστω το επίπεδο δίοπτρο του σχήματος που διαχωρίζει δυο διαφανή μέσα με δείκτες διάθλασης n_1 και n_2 , όπου $n_1 > n_2$ και ΑΒ ένα αντικείμενο που βρίσκεται σε απόσταση s από το σημείο Ο της διαχωριστικής επιφάνειας.
Αν το σύστημα μελετηθεί με την παραξονική προσέγγιση (παραξονικές ακτίνες), δηλαδή με ακτίνες που σχηματίζουν μικρή γωνία με την κάθετη στην επιφάνεια (οπότε οι γωνίες πρόσπτωσης α και β είναι μικρές), τότε οι διαθλώμενες ακτίνες που εκπορεύονται από τα σημεία Α και Β, προεκτεινόμενες προς τα πίσω ορίζουν το φανταστικό είδωλο Α΄Β΄ του πραγματικού αντικειμένου ΑΒ σε απόσταση s΄ από το σημείο Ο.
Επειδή οι γωνίες α και β θεωρούνται μικρές ισχύει η προσέγγιση $\cos\alpha \cong 1$ και $\cos\beta \cong 1$ οπότε ισχύουν οι σχέσεις :

$$\tan\alpha = \sin\alpha \quad \text{και} \quad \tan\beta = \sin\beta \qquad \textbf{(1)}$$

Έτσι από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΟΓ και Α΄ΟΓ προκύπτει:

$$\tan\alpha = \frac{O\Gamma}{s} \quad \text{και} \quad \tan\beta = \frac{O\Gamma}{s'} \quad \text{οπότε :}$$

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{s'}{s} \quad \text{και λογω των } \textbf{(1)} \text{ είναι :} \qquad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{s'}{s} \qquad \textbf{(2)}$$

Επίσης εφαρμόζοντας το νόμο του Snell στο σημείο Γ προκύπτει:

$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta \Rightarrow \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{n_2}{n_1}$ και λόγω της **(2)** τελικά είναι :

$$\frac{s'}{s} = \frac{n_2}{n_1} \qquad \textbf{(2 – 7)}$$

Η σχέση αυτή ονομάζεται **εξίσωση του επίπεδου δίοπτρου** και συνδέει τις αποστάσεις του φανταστικού ειδώλου s΄ και του αντικειμένου s από τη διαχωριστική επιφάνεια.
Από τη γραφική αναπαράσταση του ειδώλου στο **Σχήμα 2.8** συμπεραίνεται ότι στην περίπτωση του επιπέδου δίοπτρου το ύψος του ειδώλου Α΄Β΄ είναι ίσο με αυτό του αντικειμένου ΑΒ, δηλαδή η εγκάρσια μεγέθυνση είναι m = 1.

Παρατηρήσεις

1) Στην περίπτωση που το επίπεδο δίοπτρο αποτελείται από αέρα με δείκτη διάθλασης n_2 = 1 και νερό με δείκτη διάθλασης n_1 = n και ένα αντικείμενο ΑΒ βρίσκεται στο νερό, ενώ ο παρατηρητής στον αέρα τότε από την **(2-7)** προσδιορίζεται η φαινόμενη ανύψωση ΑΑ΄ να είναι :

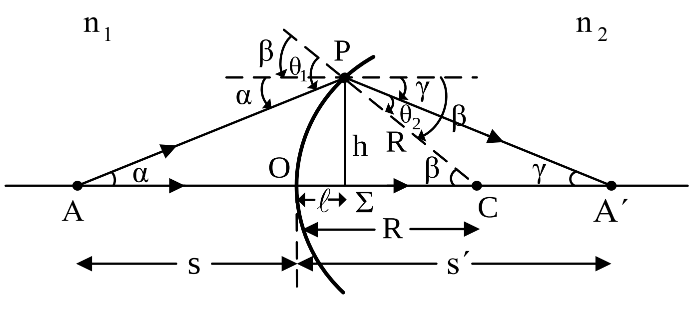
$$AA' = s - s' = s - \frac{s}{n} = s\left(1 - \frac{1}{n}\right) \Rightarrow AA' = s\frac{n-1}{n} \qquad \textbf{(2 – 8)}$$

Δηλαδή το αντικείμενο που βρίσκεται στο νερό φαίνεται, σε παρατηρητή που βρίσκεται στον αέρα, να πλησιάζει την διαχωριστική επιφάνεια κατά το μήκος ΑΑ΄ που δίνει η **(2-8)**.

2) Αντίθετα αν ο παρατηρητής είναι στο νερό και το αντικείμενο στον αέρα (δηλαδή $n_1 < n_2$) η σχέση **(2-7)** δίνει $s'/s = n \Rightarrow s' = ns$, δηλαδή το είδωλο φαίνεται να απομακρύνεται για παρατηρητή μέσα στο νερό (αφού s΄> s).
Άρα η φαινόμενη απομάκρυνση ΑΑ΄ για παρατηρητή μέσα στο νερό είναι:

$$AA' = s' - s = ns - s \Rightarrow AA' = s(n-1) \qquad \textbf{(2 – 9)}$$

Β. Σφαιρικό δίοπτρο



Σχήμα 2.9

Η κοίλη σφαιρική επιφάνεια ακτίνας R του **Σχήματος 2.9** αποτελεί την διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων με δείκτες διάθλασης n_1 και n_2 ($n_1<n_2$). Ένα σημειακό αντικείμενο Α βρίσκεται σε απόσταση s από την κορυφή Ο και η ακτίνα ΑΟ που προσπίπτει κάθετα στην επιφάνεια στο Ο εισέρχεται στο δεύτερο μέσο χωρίς απόκλιση. Επίσης η ακτίνα ΑΡ , που σχηματίζει γωνία α με τον οπτικό άξονα, προσπίπτει υπό γωνία θ_1 ως προς την κάθετο στο Ρ και διαθλάται υπό γωνία θ_2. Οι δύο αυτές ακτίνες τέμνονται στο σημείο Α΄, υπό γωνία γ, σε απόσταση s΄ δεξιά της κορυφής και ορίζουν το σημειακό είδωλο.

Από το νόμο του Snell ισχύει : $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

Θεωρώντας παραξονική προσέγγιση οι γωνίες θ_1 , θ_2 είναι μικρές και ισχύει η προσέγγιση $\sin\theta_1 \cong \theta_1$, $\sin\theta_2 \cong \theta_2$ κι επομένως : $n_1\theta_1 = n_2\theta_2$

Από το σχήμα εύκολα φαίνεται ότι:
$\theta_1 = \alpha + \beta$ και $\theta_2 = \beta - \gamma$ οπότε η παραπάνω γίνεται:

$$n_1(\alpha+\beta) = n_2(\beta-\gamma) \Rightarrow n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta$$

Επειδή όπως θεωρήθηκε οι γωνίες είναι μικρές, η απόσταση ΟΣ= ℓ θα είναι πάρα πολύ μικρή (αμελητέα) κι επομένως από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΣΡ, ΣΡC και ΣΡΑ΄ προκύπτουν εύκολα οι ακόλουθες:

$$\tan\alpha = \alpha = \frac{h}{s}, \quad \sin\beta = \beta = \frac{h}{R} \quad \text{και} \quad \tan\gamma = \gamma = \frac{h}{s'}$$

Συνεπώς η τελευταία σχέση δίνει:

$$n_1\frac{h}{s} + n_2\frac{h}{s'} = (n_2 - n_1)\frac{h}{R} \Rightarrow \boxed{\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R}} \qquad \textbf{(2 – 10)}$$

Η σχέση αυτή ονομάζεται **εξίσωση απεικόνισης σφαιρικού δίοπτρου** και αποτελεί τη σχέση μεταξύ των αποστάσεων αντικειμένου s και ειδώλου s΄.

Παρατηρήσεις

1) Από τη σχέση **(2-10)** υπολογίζονται τα χαρακτηριστικά σημεία του σφαιρικού δίοπτρου που ονομάζεται **εστιακά σημεία**.
Αν η θέση του αντικειμένου είναι σε άπειρη απόσταση ($s=\infty$) τότε οι ακτίνες είναι παράλληλες προς τον οπτικό άξονα και το είδωλο σχηματίζεται σε απόσταση s΄ τέτοια ώστε:

$$\frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R} \Rightarrow s' = \frac{R n_2}{n_2 - n_1} = f \qquad \textbf{(2 – 11)}$$

Η απόσταση αυτή ονομάζεται **οπισθία εστιακή απόσταση f**.

Αντίστοιχα αν το είδωλο σχηματίζεται στο άπειρο ($s' = \infty$), τότε όλες οι ακτίνες διαθλώνται από το δίοπτρο παράλληλες και το αντικείμενο θα βρίσκεται σε απόσταση s τέτοια ώστε:

$$\frac{n_1}{s} = \frac{n_2 - n_1}{R} \Rightarrow s = \frac{Rn_1}{n_2 - n_1} = F \qquad \textbf{(2 – 12)}$$

Η απόσταση αυτή ονομάζεται **εμπρόσθια εστιακή απόσταση F**.
Όπως παρατηρείται από τις σχέσεις **(2-11)** και **(2-12)** οι δύο εστιακές αποστάσεις του διόπτρου είναι άνισες με λόγο :

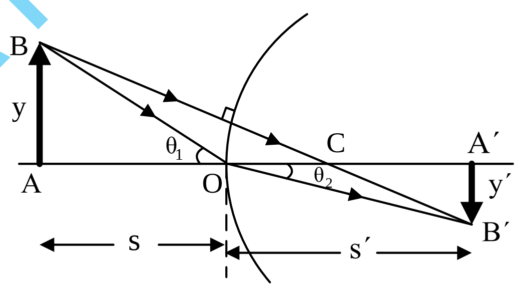
$\frac{F}{f} = \frac{n_1}{n_2}$ και αν αντικατασταθούν στην **(2-10)** συνδέονται με τη σχέση :

$$\frac{F}{s} + \frac{f}{s'} = 1$$

2) Στην περίπτωση που το αντικείμενο βρίσκεται σε απόσταση μικρότερη της εμπρόσθιας εστιακής, δηλαδή s<F τότε είναι 1/s>1/F και από την **(2-10)** προκύπτει τελικά ότι 1/s΄<0. Δηλαδή η απόσταση s΄ είναι αρνητική, οπότε το είδωλο βρίσκεται στα αριστερά του δίοπτρου και είναι φανταστικό.

3) Γενικά η σχέση **(2-10)** ισχύει για όλα τα είδη των σφαιρικών δίοπτρων με κοίλη ή κυρτή επιφάνεια και για οποιαδήποτε τιμή των δεικτών διάθλασης n_1 και n_2 . Η φυσική σημασία των προσήμων των μεγεθών είναι η ίδια με αυτή για τα σφαιρικά κάτοπτρα, όπως αναπτύχθηκε στον **Πίνακα 2.1**. Η μόνη διαφορά εντοπίζεται στην ακτίνα καμπυλότητας R, η οποία γενικά θα λαμβάνεται ως θετική όταν το κέντρο καμπυλότητας βρίσκεται προς την εκάστοτε πλευρά εξόδου των ακτίνων από την επιφάνεια.

4)



Σχήμα 2.10

Για τον προσδιορισμό του ύψους ειδώλου σχηματιζόμενου μέσω σφαιρικού διόπτρου χρησιμοποιείται η γεωμετρική κατασκευή του **Σχήματος 2.10**.
Σχεδιάζοντας δύο ακτίνες που εκκινούν από το σημείο B, η μία να διέρχεται από το κέντρο καμπυλότητας C και η άλλη να προσπίπτει στο οπτικό κέντρο O, προσδιορίζεται το είδωλο A΄B΄.

Έτσι από το νόμο του Snell είναι :

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

Για παραξονικές ακτίνες, δηλαδή για μικρές γωνίες θ_1 και θ_2 είναι $\cos\theta_1 \cong 1$ και $\cos\theta_2 \cong 1$ οπότε ισχύει ότι:

$$\tan\theta_1 = \sin\theta_1 \quad \text{και} \quad \tan\theta_2 = \sin\theta_2$$

Άρα : $n_1 \tan\theta_1 = n_2 \tan\theta_2$

Επίσης από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΟΒ και Α΄ΟΒ΄ είναι :

$$\tan\theta_1 = \frac{y}{s} \qquad \text{και} \qquad \tan\theta_2 = \frac{-y'}{s'}$$

Οπότε η προηγούμενη δίνει τελικά :

$$\frac{n_1 y}{s} = -\frac{n_2 y'}{s'} \Rightarrow \boxed{m = \frac{y'}{y} = -\frac{n_1 s'}{n_2 s}} \qquad \textbf{(2 – 13)}$$

Η σχέση **(2 – 13)** δίνει την εγκάρσια μεγέθυνση του ειδώλου που σχηματίζεται μέσω ενός διόπτρου.

5) Στην περίπτωση επίπεδης επιφάνειας μεταξύ δυο οπτικών υλικών (επίπεδο δίοπτρο) είναι R=∞ και η **(2 – 10)** δίνει :

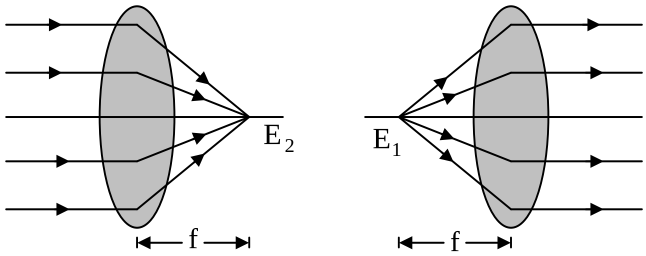
$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = 0 \Rightarrow \frac{s'}{s} = -\frac{n_2}{n_1}$$

Η παραπάνω συμπίπτει με την εξίσωση του επίπεδου διόπτρου **(2 – 7)**.
Επίσης για την εγκάρσια μεγέθυνση m, συνδυάζοντας την παραπάνω και την σχέση **(2 – 13)** προκύπτει ότι m=1. Δηλαδή το είδωλο που σχηματίζεται από επίπεδο δίοπτρο έχει πάντα το ίδιο μέγεθος με το αντικείμενο και είναι πάντα ορθό.

6) Η ανάλυση που προηγήθηκε για τα σφαιρικά δίοπτρα εφαρμόζεται άμεσα σε μερικά πραγματικά οπτικά συστήματα, όπως είναι ο ανθρώπινος οφθαλμός και επίσης αποτελεί τη βάση στην οποία στηρίζεται η μελέτη των φακών, οι οποίοι έχουν συνήθως δυο σφαιρικές επιφάνειες.

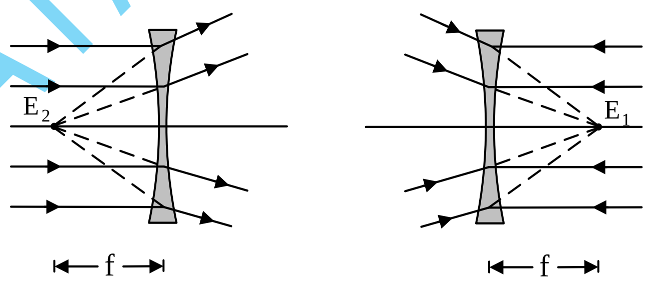
2.5 Φακοί

Ένα οπτικό σύστημα με δύο διαθλαστικές επιφάνειες ονομάζεται **φακός**. Οι φακοί διακρίνονται ως προς το πάχος τους σε **λεπτούς** και **παχείς**.
Χαρακτηριστικά μεγέθη κατά τη μελέτη ενός φακού αποτελούν οι ακτίνες καμπυλότητας R_1 και R_2 (προκειμένου για φακό που αποτελείται από δυο σφαιρικές επιφάνειες), το οπτικό κέντρο του φακού, ο οπτικός άξονας και οι εστίες του φακού.



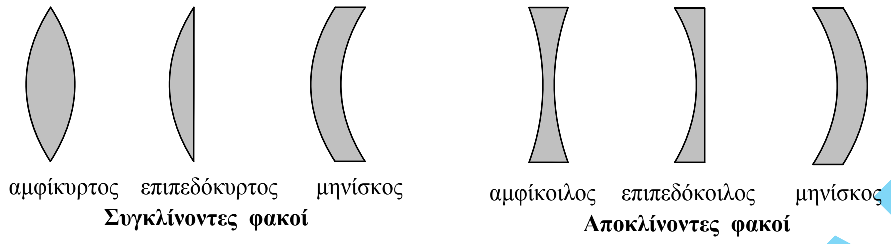
Σχήμα 2.11

Στο λεπτό φακό του **Σχήματος 2.11** όταν διέρχεται μια δέσμη παράλληλων ακτίνων, αυτές συγκλίνουν στο σημείο E_2, ενώ οι ακτίνες που διέρχονται από το σημείο E_1 εξέρχονται από το φακό ως δέσμη παράλληλων ακτινών. Τα σημεία E_1 και E_2 ονομάζονται **εστιακά σημεία ή εστίες** και η απόστασή τους από το κέντρο του φακού ονομάζεται **εστιακή απόσταση f**. Στην περίπτωση λεπτού φακού οι εστιακές αποστάσεις είναι πάντα ίσες, ακόμη και αν οι δυο επιφάνειες έχουν διαφορετικές καμπυλότητες.
Έτσι όταν μια παράλληλη δέσμη ακτίνων προσπίπτει σε φακό, συγκλίνει και σχηματίζει πραγματικό είδωλο μετά τη διέλευσή της από το φακό ονομάζεται **συγκλίνων φακός** και η εστιακή του απόσταση είναι θετική. Αντίθετα όταν μια δέσμη παράλληλων ακτίνων προσπίπτει σε φακό, αποκλίνει μετά τη διάθλαση και σχηματίζει φανταστικό είδωλο ονομάζεται **αποκλίνων φακός** και η εστιακή του απόσταση είναι αρνητική. Ένας τέτοιος φακός φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



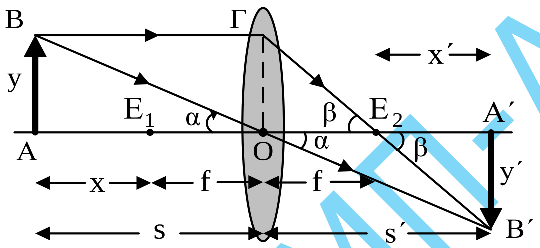
Σχήμα 2.12

Παρατηρείται ότι τα εστιακά σημεία του αποκλίνοντα φακού έχουν αντίστροφη διάταξη σε σύγκριση με τα αντίστοιχα σημεία του συγκλίνοντα φακού και γι' αυτό οι εστιακές τους αποστάσεις έχουν αντίθετο πρόσημο.
Στο **Σχήμα 2.13** παρατίθονται διάφορες μορφές συγκλίνοντων και αποκλίνοντων φακών. Παρατηρείται ότι κάθε φακός παχύτερος στο κέντρο και λεπτότερος στην περιφέρεια είναι συγκλίνων , ενώ κάθε φακός λεπτότερος στο κέντρο και παχύτερος στην περιφέρεια είναι αποκλίνων.



Σχήμα 2.13

Α. Συγκλίνων φακός



Σχήμα 2.14

Έστω ένα αντικείμενο ΑΒ ύψους y σε απόσταση s από το κέντρο ενός λεπτού αμφίκυρτου φακού. Η ακτίνα ΒΓ προσπίπτει πάνω στο φακό παράλληλα με τον οπτικό άξονα και όταν αναδύεται περνά από την εστία E_2 , ενώ η ακτίνα ΒΟ περνάει από το οπτικό κέντρο του φακού και δεν υφίσταται εκτροπή. Έτσι από την πορεία των δυο αυτών ακτίνων προσδιορίζεται γεωμετρικά η θέση του ειδώλου Α΄Β΄ σε απόσταση s΄ από το οπτικό κέντρο Ο.

Από το σχήμα φαίνεται εύκολα ότι λόγω των ίσων γωνιών β, τα ορθογώνια τρίγωνα $ΟΓΕ_2$ και $Α'Β'Ε_2$ είναι όμοια και ισχύει :

$$\tan\beta = \frac{ΟΓ}{ΟΕ_2} = \frac{Α'Β'}{Α'Ε_2} \Rightarrow \frac{y}{f} = \frac{-y'}{s'-f} \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{s'-f}{f}$$

Επίσης από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΟΒ και Α΄ΟΒ΄ (λόγω των ίσων γωνιών α) ισχύει:

$$\tan\alpha = \frac{ΑΒ}{ΑΟ} = \frac{Α'Β'}{ΟΑ'} \Rightarrow \frac{y}{s} = \frac{-y'}{s'} \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

Το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στο ότι το είδωλο είναι ανεστραμμένο και συνεπώς το ύψος του ειδώλου y΄ είναι αρνητικό.

Εξισώνοντας τις δυο παραπάνω εξισώσεις και διαιρώντας δια s΄προκύπτει :

$$\frac{s'-f}{f}=\frac{s'}{s}\Rightarrow\frac{s'-f}{fs'}=\frac{s'}{ss'}\Rightarrow\frac{1}{f}-\frac{1}{s'}=\frac{1}{s}\Rightarrow\boxed{\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}} \qquad \textbf{(2 – 14)}$$

Η **(2-14)** αποτελεί τον **τύπο του Gauss των φακών** και συνδέει τις αποστάσεις αντικειμένου και ειδώλου με την εστιακή απόσταση.

Η εγκάρσια μεγέθυνση του ειδώλου σύμφωνα με τα παραπάνω είναι :

$$m=\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s} \qquad \textbf{(2 – 15)}$$

Δηλαδή η μεγέθυνση του ειδώλου είναι ο λόγος των αποστάσεων ειδώλου – αντικειμένου από το φακό και όταν είναι θετική το είδωλο είναι ορθό, ενώ όταν είναι αρνητική το είδωλο είναι ανεστραμμένο.
Αν ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων θεωρηθούν οι εστίες E_1 και E_2, τότε αν x είναι η απόσταση του αντικειμένου από την εστία E_1 και x΄ η απόσταση του ειδώλου από τη εστία E_2, θα είναι s=x+f και $s'=x'+f$, οπότε η σχέση **(2-14)** δίνει:

$$\frac{1}{x+f}+\frac{1}{x'+f}=\frac{1}{f}\Rightarrow\frac{x'+f+x+f}{(x+f)(x'+f)}=\frac{1}{f}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'f+f^2+xf+f^2=xx'+xf+x'f+f^2\Rightarrow\boxed{xx'=f^2} \qquad \textbf{(2 – 16)}$$

Η **(2-16)** ονομάζεται **τύπος του Newton των φακών**.

🗐 Παρατήρηση

Από τη διερεύνηση της σχέσης **(2-14)** βρίσκονται οι διάφορες θέσεις και είδη των ειδώλων που σχηματίζονται από συγκλίνοντα φακό. Έτσι η **(2-14)** δίνει:

$$s'=\frac{f}{1-f/s}$$

Οπότε:

1) Για $s=\infty$, δηλαδή όταν οι ακτίνες είναι παράλληλες προς τον οπτικό άξονα, είναι $s'=f$, δηλαδή πραγματικό είδωλο στο σημείο της εστίας.

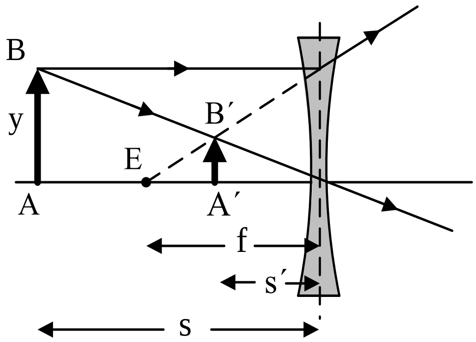
2) Για s>f είναι $s'>f$, δηλαδή το είδωλο είναι πραγματικό και ανεστραμμένο και σχηματίζεται μετά το φακό πέρα από τη εστία.

3) Για s=2f είναι $s'=2f$, δηλαδή το είδωλο είναι πραγματικό, ανεστραμμένο και ίσο με το αντικείμενο.

4) Για s=f είναι $s'=\infty$, δηλαδή δεν σχηματίζεται είδωλο.

5) Για s<f είναι $s'<0$, δηλαδή το είδωλο σχηματίζεται από την πλευρά που βρίσκεται και το αντικείμενο κι επομένως είναι φανταστικό, ορθό και μεγαλύτερο από το αντικείμενο.

Β. Αποκλίνων φακός



Σχήμα 2.15

Στο **Σχήμα 2.15** απεικονίζεται η πορεία των ακτίνων και ο σχηματισμός του ειδώλου στην περίπτωση ενός αποκλίνοντα φακού. Με την ίδια πορεία όπως στο συγκλίνων φακό αποδεικνύεται εύκολα ότι ισχύουν οι σχέσεις **(2-14)**, **(2-15)**, **(2-16)** και για κάθε αποκλίνων φακό.

Η διαφορά τώρα είναι ότι το είδωλο Α΄Β΄ του αντικειμένου ΑΒ είναι πάντοτε φανταστικό, αφού σχηματίζεται από την πλευρά του φακού που βρίσκεται και το αντικείμενο. Επίσης το είδωλο είναι ορθό, αφού το y΄ είναι θετικό κι επομένως και η μεγέθυνση είναι θετική, και είναι μικρότερο του αντικείμενου, αφού $m<1$.

Προσέξτε ότι για κάθε αποκλίνων φακό η εστιακή απόσταση f και η απόσταση του ειδώλου s΄ είναι αρνητικά.

✎ Σημείωση

Κατά τη μελέτη των φακών θεωρείται ότι ο δείκτης διάθλασης του φακού είναι μεγαλύτερος από το δείκτη διάθλασης του περιβάλλοντος μέσου, που συνήθως είναι ο αέρας. Κι αυτό γιατί αν θεωρηθεί το αντίθετο τότε οι φακοί που ορίστηκαν ως συγκλίνοντες θα συμπεριφέρονται ως αποκλίνοντες και αντίθετα.

Στον **Πίνακα 2.3** παρατίθεται η φυσική σημασία των μεγεθών που αναφέρονται σε ένα λεπτό φακό.

Μέγεθος	**Πρόσημο**	
	+	–
Απόσταση αντικειμένου s	Πραγματικό αντικείμενο	Φανταστικό αντικείμενο
Απόσταση ειδώλου s΄	Πραγματικό είδωλο	Φανταστικό είδωλο
Εστιακή απόσταση f	Συγκλίνων φακός	Αποκλίνων φακός
Ύψος αντικειμένου y	Ορθό αντικείμενο	Ανεστραμμένο αντικείμενο
Ύψος ειδώλου y΄	Ορθό είδωλο	Ανεστραμμένο είδωλο
Εγκάρσια μεγέθυνση m	Ορθό είδωλο	Ανεστραμμένο είδωλο

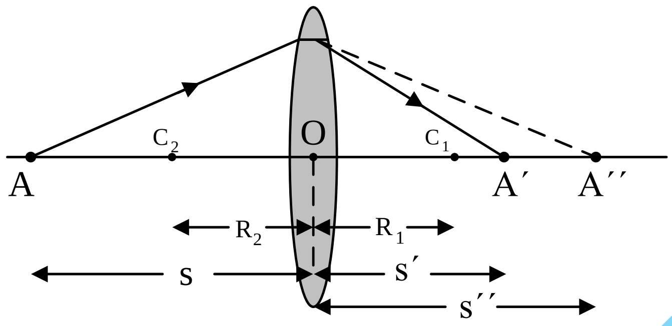
Πίνακας 2.3

Στον **Πίνακα 2.4** συνοψίζονται τα χαρακτηριστικά ειδώλου που σχηματίζεται μέσω ενός λεπτού φακού.

Συγκλίνων φακός				
Αντικείμενο	**Είδωλο**			
Θέση	**Είδος**	**Θέση**	**Προσανατολισμός**	**Μεγέθυνση**
$\infty > s > 2f$	πραγματικό	$f < s' < 2f$	ανεστραμμένο	$m < 1$
$s = 2f$	πραγματικό	$s' = 2f$	ανεστραμμένο	$m = 1$
$f < s < 2f$	πραγματικό	$\infty > s' > 2f$	ανεστραμμένο	$m > 1$
$s = f$	–	$s' = \infty$	–	–
$s < f$	φανταστικό	$\lvert s' \rvert > s$	ορθό	$m > 1$
Αποκλίνων φακός				
Αντικείμενο	**Είδωλο**			
Θέση	**Είδος**	**Θέση**	**Προσανατολισμός**	**Μεγέθυνση**
οπουδήποτε	φανταστικό	$\lvert s' \rvert < \lvert f \rvert$	ορθό	$m<1$

Πίνακας 2.4

2.6 Εξίσωση των Κατασκευαστών των Φακών



Σχήμα 2.16

Έστω ο αμφίκυρτος φακός του **Σχήματος 2.16**, που αποτελείται από δυο σφαιρικά δίοπτρα ακτινών καμπυλότητας R_1 και R_2. Το περιβάλλον μέσο του φακού θεωρείται ότι είναι ο αέρας με δείκτη διάθλασης $n_\alpha=1$ και ο φακός έχει δείκτη διάθλασης n. Το είδωλο ενός σημειακού αντικειμένου Α, που απέχει απόσταση s από το οπτικό κέντρο Ο, αν δεν υπήρχε η σφαιρική επιφάνεια ακτίνας R_2 θα σχηματιζόταν στο σημείο A'' σε απόσταση s''. Τότε η εξίσωση απεικόνισης σφαιρικού δίοπτρου **(2-10)** παίρνει τη μορφή:

$$\frac{1}{s}+\frac{n}{s''}=\frac{n-1}{R_1}$$

Το είδωλο A'' όμως αποτελεί το φανταστικό αντικείμενο (δηλαδή $s''<0$) για το δεύτερο κοίλο δίοπτρο με ακτίνα καμπυλότητας R_2 και απέχει απόσταση s'' από αυτό. Επομένως προκύπτει το τελικό είδωλο Α΄ σε απόσταση s΄ από το οπτικό κέντρο και ικανοποιεί την εξίσωση **(2-10)** ως εξής :

$$-\frac{n}{s''}+\frac{1}{s'}=\frac{1-n}{-R_2}$$

Προσθέτοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

ή λόγω της **(2-14)**: $$\boxed{\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}$$ **(2 – 17)**

Η σχέση **(2-17)** ονομάζεται **εξίσωση των κατασκευαστών των φακών** και εκφράζει την εστιακή απόσταση f του φακού συναρτήσει του δείκτη διάθλασης n και των ακτίνων καμπυλότητας R_1 και R_2 των επιφανειών του.

Παρατηρήσεις

1) Κατά την εφαρμογή της εξίσωσης **(2-17)** πρέπει να προσεχθεί ότι για κάθε φακό η ακτίνα καμπυλότητας για κοίλη σφαιρική επιφάνεια λαμβάνεται με αρνητικό πρόσημο, ενώ για κυρτή σφαιρική επιφάνεια λαμβάνεται με θετικό πρόσημο. Έτσι έναν αμφίκυρτο φακό όπως στο **Σχήμα 2.16** θα είναι $R_1 = +R_1$ και $R_2 = -R_2$, οπότε η σχέση **(2-17)** θα είναι:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

2) Σε φακούς με μια επίπεδη επιφάνεια (επιπεδόκυρτος ή επιπεδόκοιλος) προφανώς είναι $R_2 = \infty$ και η σχέση **(2-17)** δίνει για την εστιακή τους απόσταση :

$$\frac{1}{f} = (n-1)\frac{1}{R}$$

3) Για παχείς φακούς η εξίσωση **(2-17)** αποδεικνύεται ότι έχει την μορφή:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n-1)d}{nR_1R_2}\right] \qquad \textbf{(2 – 18)}$$

όπου d το πάχος του φακού και η οποία δίνει την εξίσωση του λεπτού φακού, όταν το πάχος γίνει αμελητέο , δηλαδή όταν $d \to 0$.

Εφαρμογή

Ποιο είδος φακού που περιβάλλεται από αέρα έχει εστιακή απόσταση ανεξάρτητη από το πάχος του ;

Λύση

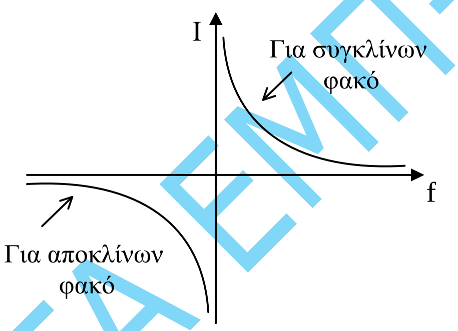
Από την **(2-18)** φαίνεται ότι η εστιακή απόσταση θα είναι ανεξάρτητη από το πάχος του φακού αν μηδενιστεί ο τρίτος όρος της αγκύλης, δηλαδή αν $R_1=\infty$ ή $R_2=\infty$. Άρα θα πρέπει να είναι επιπεδόκυρτος ή επιπεδόκοιλος φακός.

2.7 Ισχύς Φακού

Το αντίστροφο της εστιακής απόστασης ενός φακού ονομάζεται **ισχύς ή διαθλαστική ικανότητα Ι** του φακού. Δηλαδή:

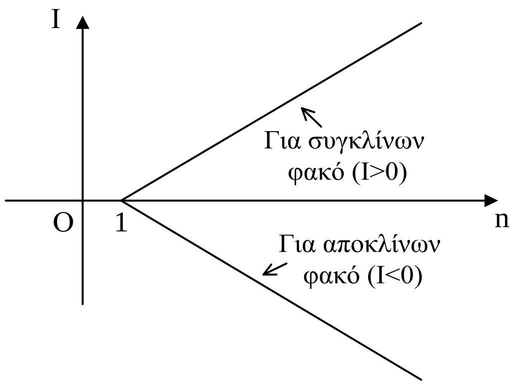
$$\boxed{I = \frac{1}{f}} \qquad \textbf{(2 – 19)}$$

Μονάδα μέτρησης της ισχύος φακού είναι το $1m^{-1}$ και ονομάζεται **διοπτρία dp**, δηλαδή είναι $1dp = 1m^{-1}$.
Παρατηρείται ότι όσο μικρότερη είναι η εστιακή απόσταση ενός φακού, τόσο μεγαλύτερη είναι η ισχύς του , δηλαδή ο φακός είναι πιο συγκεντρωτικός. Επίσης στους συγκλίνοντες φακούς η ισχύς Ι παίρνει θετικές τιμές αφού η εστιακή απόσταση f είναι θετική, ενώ στους αποκλίνοντες φακούς παίρνει αρνητικές τιμές εφόσον η f είναι αρνητική.
Η γραφική παράσταση της μεταβολής της ισχύος ενός φακού με την εστιακή απόσταση φαίνεται στο ακόλουθο γράφημα.



Σχήμα 2.17

Η εξάρτηση της ισχύος ενός φακού από το δείκτη διάθλασής του φαίνεται από την εξίσωση **(2-17)** και για ένα συγκλίνοντα φακό είναι $I = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$, ενώ για έναν αποκλίνοντα φακό είναι $I = -(n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ (επειδή στη **(2-17)** είναι $R_1<0$ και $R_2>0$).
Η γραφική παράσταση της μεταβολής αυτής φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 2.18

Ένα σύστημα λεπτών φακών που βρίσκονται σε επαφή ισοδυναμεί με ένα φακό, του οποίου η ισχύς είναι:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots \quad \text{ή} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \dots \qquad \textbf{(2 – 20)}$$

Επίσης ένα σύστημα που αποτελείται από δυο λεπτούς φακούς , που βρίσκονται σε απόσταση d μεταξύ τους ισοδυναμεί με ένα φακό , του οποίου η ισχύς είναι:

$$I = I_1 + I_2 - dI_1I_2 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1f_2} \qquad \textbf{(2 – 21)}$$