ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΜΕΣΑ ΣΕ ΡΕΥΣΤΟ

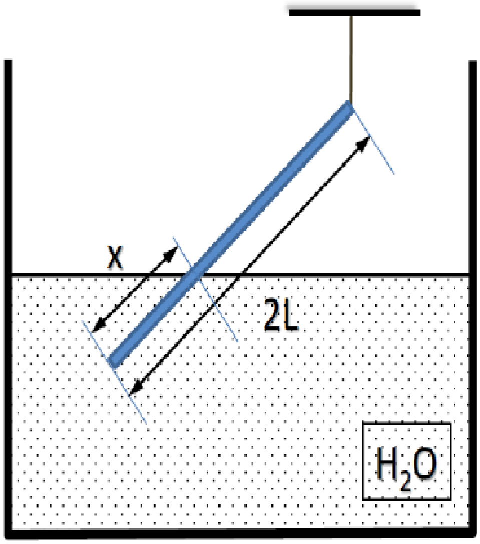
Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

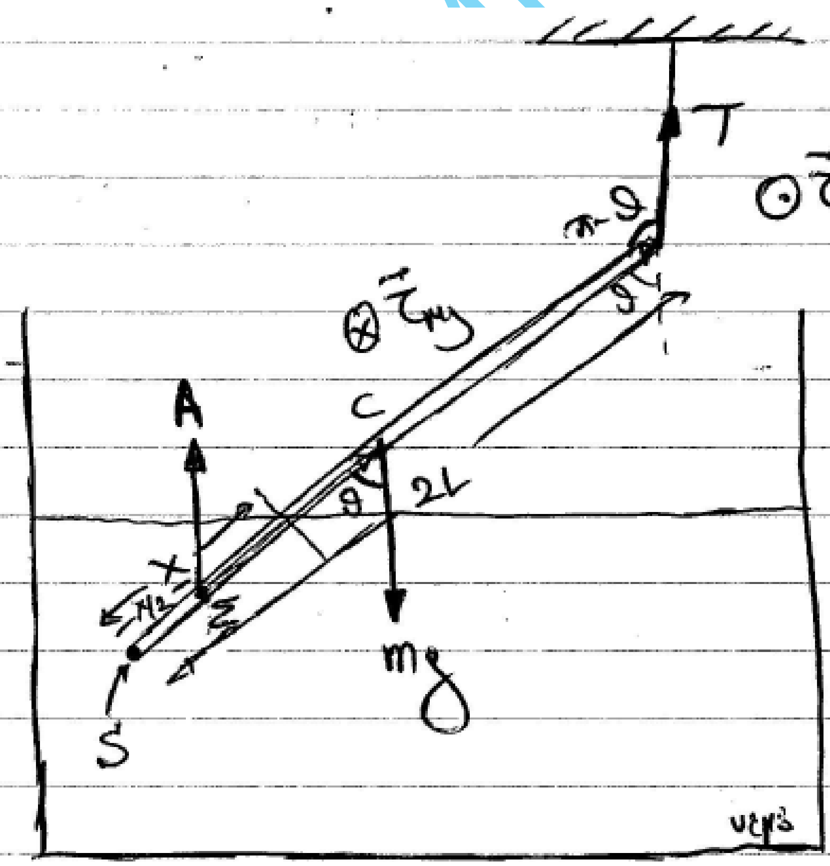
4ο ΘΕΜΑ

Λεπτή ομογενής ράβδος μήκους 2L ισορροπεί επιπλέοντας εν μέρει σε νερό και κρέμεται από το ένα άκρο της με αβαρές νήμα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Εάν η πυκνότητα της ράβδου είναι $\rho = 0.75\times10^3$ kg/m^3 και του νερού $\rho_N = 1.00\times10^3$ kg/m^3, να βρείτε το ποσοστό της ράβδου που ευρίσκεται πάνω από την επιφάνεια του νερού.



Λύση



Αρχή Αρχιμήδη: $A = B_{\text{εκτοπ. νερού}} = m_{\text{εκτοπ. νερού}} \cdot g$

αλλά: $m_{\text{εκτοπ. νερού}} = \rho_\nu V_{\text{εκτοπ. νερού}} = \rho_\nu V_{\text{βυθισμ. σώματος}} = \rho_\nu S x$

$\rightarrow A = \rho_\nu S g x$ (1)

Συνθήκη μεταφορικής ισορροπίας:

$\Sigma \vec{F}_y = 0 \rightarrow T + A = mg$ (2)

• Συνθήκη περιστροφικής ισορροπίας:

$\Sigma \vec{\tau}_z = 0 \rightarrow \left(L - \frac{x}{2}\right) mg \sin\vartheta - \left(2L - \frac{x}{2}\right) T \sin(\pi - \vartheta) = 0 \rightarrow$

$\Sigma C = L - \frac{x}{2}$ $\rightarrow \left(L - \frac{x}{2}\right) mg \cancel{\sin\vartheta} - \left(2L - \frac{x}{2}\right) T \cancel{\sin\vartheta} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \left(L - \frac{x}{2}\right) mg = \left(2L - \frac{x}{2}\right) T \rightarrow$

$\rightarrow T = \dfrac{\left(L - \frac{x}{2}\right)}{\left(2L - \frac{x}{2}\right)} mg$ (3)

Άρα: (2) $\overset{(1,3)}{\rightsquigarrow}$ $\dfrac{\left(L - \frac{x}{2}\right)}{2L - \frac{x}{2}} \cdot mg + \rho_\nu S g x = mg$

όπου $m = \rho V_{\text{ράβδου}} = \rho S 2L$

$$\rightarrow \frac{\left(L-\frac{x}{2}\right)}{2L-\frac{x}{2}} \cdot \rho \cancel{S} 2L \cancel{g} + \rho_v \cancel{S} \cancel{g} x = \rho \cancel{S} 2L \cancel{g} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\left(L-\frac{x}{2}\right)}{2L-\frac{x}{2}} \cdot 2L \cdot \rho + \rho_v x = \rho 2L \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(L-\frac{x}{2}\right) \cdot 2L \cdot \rho + \rho_v x\left(2L-\frac{x}{2}\right) = \rho 2L\left(2L-\frac{x}{2}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow 2L^2\rho - \cancel{L\rho x} + 2\rho_v L x - \frac{\rho_v}{2}x^2 = 4\rho L^2 - \cancel{\rho L x} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\rho_v}{2}x^2 - 2\rho_v L x + 2\rho L^2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \rho_v x^2 - 4\rho_v L x + 4\rho L^2 = 0$$

$$x = \frac{4\rho_v L \pm \sqrt{16\rho_v^2 L^2 - 16\rho_v \rho L^2}}{2\rho_v} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\rho_v L \pm \overset{2}{\cancel{4}} L\sqrt{\rho_v^2 - \rho_v \rho}}{\cancel{2}\rho_v}$$

$$\rightarrow x = 2L\left(\frac{\rho_v \pm \sqrt{\rho_v^2 - \rho_v \rho}}{\rho_v}\right)$$

το (+) απορρίπτεται γιατί δίνει $x > 2L$.

Άρα: $x = 2L\left(\frac{\rho_\nu - \sqrt{\rho_\nu^2 - \rho_\nu \rho}}{\rho_\nu}\right) = 2L\left(1 - \frac{\sqrt{\rho_\nu^2 - \rho_\nu \rho}}{\rho_\nu}\right) =$

$= 2L\left(1 - \sqrt{\frac{\rho_\nu^2 - \rho_\nu \rho}{\rho_\nu^2}}\right) = 2L\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_\nu}}\right) =$

$= 2L\left(1 - \sqrt{1 - \frac{0{,}75 \cdot \cancel{10^3}}{1 \cdot \cancel{10^3}}}\right) = 2L\left(1 - \sqrt{1 - 0{,}75}\right) =$

$= 2L\left(1 - \sqrt{0{,}25}\right) = 2L(1 - 0{,}5) = 2L \cdot 0{,}5 \rightarrow \boxed{x = L}$

Δηλ. η μισή ράβδος είναι βυθισμένη και η άλλη μισή είναι πάνω απ' την επιφάνεια του νερού.