# ΙΔΙΟΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ & ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ HAMILTONIAN ΤΕΛΕΣΤΗΣ ΧΡΟΝΙΚΗΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ

Κάθε ιδιοσυνάρτηση $\psi_n(x)$ της Hamiltonian που ανήκει στην ιδιοτιμή $E_n$ ικανοποιεί την **εξίσωση ιδιοτιμών της Hamiltonian** ή **χρονικά ανεξάρτητη εξίσωση Schrodinger:**

$$\hat{H}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x) \quad \textbf{(1)}$$

όπου ο τελεστής Hamilton είναι : $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$

και η **(1)** δίνει τη γνωστή αναλυτική μορφή της χρονοανεξάρτητης εξίσωσης Schrodinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_n(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)$$

Η χρονοεξαρτημένη εξίσωση Schrodinger θα είναι:

$\hat{H}\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$ και η λύση της ως προς t είναι $U(t) = e^{-iEt/\hbar}$.

Συνεπώς οι λύσεις της εξίσωσης Schrodinger αποτελούν τις στάσιμες καταστάσεις και θα έχουν την μορφή:

$$\psi_n(x,t) = \psi_n(x)e^{-iE_nt/\hbar}$$

Η γενική λύση της εξίσωσης Schrodinger θα δίνεται ως υπέρθεση των στάσιμων αυτών καταστάσεων:

$$\psi(x,t) = \sum_n c_n\psi_n(x)e^{-iE_nt/\hbar}$$

Ο **τελεστής χρονικής εξέλιξης** ορίζεται έτσι ώστε να αποτελεί έναν εναλλακτικό και εύκολο τρόπο εύρεσης της κυματοσυνάρτησης ενός σωματιδίου οποιαδήποτε χρονική στιγμή t αν γνωρίζουμε την κυματοσυνάρτηση του σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή (πχ. για t=0). Συγκεκριμένα το αποτέλεσμα της δράσης του τελεστή χρονικής εξέλιξης $\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ στην κυματοσυνάρτηση ψ(x,t=0) ενός σωματιδίου τη χρονική στιγμή t=0 είναι η κυματοσυνάρτησή του τη χρονική στιγμή t.Δηλαδή:

$$\psi(x,t) = \hat{U}(t)\psi(x,0) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}\psi(x,0)$$

***Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας***

**ΑΣΚΗΣΗ 1**

Η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου που κινείται σε μία διάσταση, δίνεται την χρονική στιγμή $t = 0$ από την

$$\psi(x, t=0) = N(\psi_1 + 2\psi_2)$$

όπου $\psi_1(x)$ και $\psi_2(x)$ κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας με ιδιοτιμές $E_1$ και $E_2$ αντίστοιχα.

(α) Υπολογίστε την μέση τιμή και την αβεβαιότητα της ενέργειας,
(β) Αν υποθέσουμε ότι $\psi_1(x)$ και $\psi_2(x)$ είναι αντίστοιχα άρτια και περιττή συνάρτηση, να υπολογίσετε την μέση τιμή της θέσης του σωματιδίου σαν συνάρτηση του χρόνου.

**ΑΣΚΗΣΗ 2**

Η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου που κινείται σε μία διάσταση, δίνεται την χρονική στιγμή $t = 0$ από την

$$\psi(x, t=0) = N(3\psi_1 + 2\psi_2)$$

όπου $\psi_1(x)$ και $\psi_2(x)$ κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας με ιδιοτιμές $E_1$ και $E_2$ αντίστοιχα.

(α) Υπολογίστε την μέση τιμή και την αβεβαιότητα της ενέργειας,
(β) Αν υποθέσουμε ότι $\psi_1(x)$ και $\psi_2(x)$ είναι αντίστοιχα άρτια και περιττή συνάρτηση, να υπολογίσετε την μέση τιμή της θέσης του σωματιδίου σαν συνάρτηση του χρόνου.

**ΑΣΚΗΣΗ 3**

Η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου που κινείται σε μία διάσταση, δίνεται την χρονική στιγμή $t = 0$ από την

$$\psi(x, t=0) = N(3\psi_1 + 4\psi_2)$$

όπου $\psi_1(x)$ και $\psi_2(x)$ κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας με ιδιοτιμές $E_1$ και $E_2$ αντίστοιχα.

(α) Υπολογίστε την μέση τιμή και την αβεβαιότητα της ενέργειας,
(β) Αν υποθέσουμε ότι $\psi_1(x)$ και $\psi_2(x)$ είναι αντίστοιχα άρτια και περιττή συνάρτηση, να υπολογίσετε την μέση τιμή της θέσης του σωματιδίου σαν συνάρτηση του χρόνου.

*Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας*

EMC²

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com