ΘΕΩΡΙΑ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΥ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

EMC²

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ – ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

1.1. ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ – ΝΟΜΟΣ COULOMB

Η μελέτη της αλληλεπιδράσεως μεταξύ των υλικών σωμάτων οδηγεί στην παραδοχή μιας φυσικής ποσότητας, του **ηλεκτρικού φορτίου**, η παρουσία του οποίου γίνεται αντιληπτή μεταξύ άλλων και από τις αναπτυσσόμενες ελκτικές ή απωστικές δυνάμεις οι οποίες ονομάζονται **δυνάμεις Coulomb**.
Οι δυνάμεις Coulomb μεταξύ δυο ακίνητων σημειακών φορτίων (δηλαδή δυο μικρών φορτισμένων σωμάτων που βρίσκονται σε μεγάλη απόσταση μεταξύ τους σε σχέση με τις διαστάσεις τους) ακολουθούν νόμο ανάλογο με το νόμο της παγκόσμιας έλξεως. Δηλαδή:

$$\boxed{\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}}$$

όπου η σταθερά αναλογίας k είναι στο S.I. $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9 \ \ Nm^2/C^2$

και ε_0 είναι η διηλεκτρική σταθερά του κενού.

Επομένως το μέτρο της δύναμης , που προκύπτει από την αλληλεπίδραση δυο σημειακών φορτίων, είναι ανάλογο του γινομένου των φορτίων και αντιστρόφως ανάλογο του τετραγώνου της απόστασης μεταξύ τους. Επίσης η δύναμη αυτή είναι κεντρική, δηλαδή διευθύνεται κατά μήκος της ευθείας που συνδέει τα δυο φορτία και εξαρτάται από το μέσο στο οποίο είναι τοποθετημένα τα φορτία (μεταβάλλεται η τιμή της σταθεράς k).
Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση του **νόμου του Coulomb**.
Γενικά οι δυνάμεις Coulomb είναι αρκετές τάξεις μεγέθους ισχυρότερες από τις δυνάμεις της παγκόσμιας έλξεως (βαρυτικές).

Το ηλεκτρικό φορτίο έχει τις ακόλουθες χαρακτηριστικές ιδιότητες :

α) Τα φορτία στη φύση διακρίνονται σε δυο είδη τα οποία ονομάζουμε αρνητικό και θετικό αντίστοιχα. Ο χαρακτηρισμός αυτός είναι αυθαίρετος και συμβατικός επειδή δεν υπάρχει ιδιότητα του ηλεκτρικού φορτίου που να τον δικαιολογεί .Αυτό που χαρακτηρίζει τα φορτία είναι η έλξη μεταξύ των ετεροσήμων και η άπωση μεταξύ των ομοσήμων φορτίων.
Η ύπαρξη του φορτίου σε δυο είδη ονομάζεται **δυϊσμός του ηλεκτρικού φορτίου**.

β) Για το ηλεκτρικό φορτίο ισχύει η **αρχή διατηρήσεως** του, σύμφωνα με την οποία το ολικό άθροισμα των θετικών και αρνητικών φορτίων ενός μεμονωμένου συστήματος είναι το ίδιο σε κάθε χρονική στιγμή. Μεμονωμένο θεωρούμε το σύστημα εκείνο στο οποίο δεν γίνεται ανταλλαγή μάζας (άρα και φορτίου) με το περιβάλλον.

γ) Οποιαδήποτε ποσότητα ηλεκτρικού φορτίου είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του φορτίου e του ηλεκτρονίου. Η ιδιότητα αυτή λέγεται **κβάντωση** του ηλεκτρικού φορτίου.

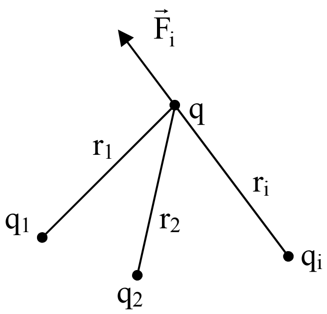
δ) Το ηλεκτρικό φορτίο έχει την ιδιότητα να διατηρείται αναλλοίωτο κατά τους μετασχηματισμούς Lorentz μεταξύ αδρανειακών συστημάτων αναφοράς. Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή το αποτέλεσμα της μετρήσεως δεδομένης ποσότητας ηλεκτρικού φορτίου είναι το ίδιο , ανεξάρτητα από το σύστημα συντεταγμένων ως προς το οποίο αναφέρεται η μέτρηση.

Μονάδα μέτρησης του ηλεκτρικού φορτίου στο S.I. είναι το 1 Coulomb .

Όταν οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις που δρουν σ΄ ένα φορτίο οφείλονται σε δυο ή περισσότερα άλλα φορτία, η ολική δύναμη στο φορτίο είναι το διανυσματικό άθροισμα των επιμέρους δυνάμεων. Δηλαδή για τις δυνάμεις μεταξύ φορτισμένων σωμάτων ισχύει η **αρχή της επαλληλίας**. Η μελέτη της αλληλεπίδρασης μεταξύ ακίνητων φορτίων ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς αποτελεί το περιεχόμενο της Ηλεκτροστατικής.

1.2 ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Οι δυνάμεις μεταξύ ακίνητων φορτισμένων σωμάτων μπορούν να περιγραφούν με γενικότερο τρόπο βάσει της έννοιας του ηλεκτρικού πεδίου.
Έτσι τα προβλήματα της Ηλεκτροστατικής μπορούν να μελετηθούν ισοδύναμα είτε με το νόμο του Coulomb, είτε με το ηλεκτρικό πεδίο .
Θεωρούμε σύστημα n σημειακών φορτίων $q_1,q_2,\ldots,q_n$ σταθερά διατεταγμένων στο χώρο . Σύμφωνα με το νόμο του Coulomb και την αρχή της επαλληλίας σε οποιοδήποτε θετικό σημειακό φορτίο εξασκείται η συνισταμένη δύναμη :



$$\boxed{\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = q \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i}$$

όπου r_i η απόσταση μεταξύ των φορτίων q_i και q και $\hat{r}_i$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση των δυο φορτίων.

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα της ανωτέρω εξίσωσης είναι μια διανυσματική ποσότητα, ανεξάρτητη από το φορτίο q, η οποία καθορίζεται αποκλειστικά από το σύστημα των φορτίων q_i και το σημείο (x,y,z) στο οποίο θεωρούμε το φορτίο q .

Ο χώρος γύρω από τα φορτία q_i εντός του οποίου ηλεκτρικό φορτίο δέχεται δύναμη $\vec{F}$ καλείται **ηλεκτρικό πεδίο** . Το ηλεκτρικό πεδίο περιγράφεται από μια διανυσματική συνάρτηση θέσεως $\vec{E}(x,y,z)$ η οποία ονομάζεται **ένταση** του ηλεκτρικού πεδίου και δίνεται από τη σχέση του αθροίσματος της παραπάνω εξίσωσης, δηλαδή:

$$\boxed{\vec{E}(x,y,z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i}$$

όπου (x,y,z) η θέση στην οποία θεωρούμε την τιμή της συναρτήσεως $\vec{E}$.
Αν συγκρίνουμε τις δυο ανωτέρω εξισώσεις προκύπτει ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου εκφράζει τη δύναμη ανά μονάδα φορτίου, δηλαδή :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}}$$

Στην απλή περίπτωση του ηλεκτρικού πεδίου σημειακού φορτίου q έχουμε :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

δηλαδή η ένταση του πεδίου διευθύνεται ακτινικά από το φορτίο.
Συνεπώς το ηλεκτρικό πεδίο που προκαλείται από εκτεταμένη κατανομή πηγών, η οποία αποτελείται από n σημειακά φορτία $q_1, q_2, \ldots, q_n$ υπολογίζεται σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, δηλαδή :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n$$

Στην περίπτωση που το ηλεκτρικό πεδίο οφείλεται σε ηλεκτρικό φορτίο που κατανέμεται συνεχώς κατά μήκος γραμμής, πάνω σε επιφάνεια ή μέσα σε κάποιο τρισδιάστατο χώρο το άθροισμα της $\vec{E}(x,y,z)$ αντικαθίσταται από ολοκλήρωμα. Έτσι θα χρησιμοποιούνται οι έννοιες της γραμμικής πυκνότητας φορτίου λ=dq/dl (C/m), επιφανειακής πυκνότητας σ=dq/ds (C/m^2) ή χωρικής πυκνότητας ρ=dq/dV (C/m^3) μέσω των οποίων μπορεί να εκφραστεί το φορτίο.

Άρα το παραγόμενο ηλεκτρικό πεδίο μιας συνεχής κατανομής φορτίου σε οποιοδήποτε σημείο P υπολογίζεται με χωρισμό του φορτίου σε απειροστά στοιχεία dq. Το παραγόμενο πεδίο $d\vec{E}$ από κάθε στοιχείο στο θεωρούμενο σημείο, βρίσκεται αν θεωρήσουμε τα στοιχεία σαν σημειακά φορτία και το μέτρο του είναι :

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}$$

όπου r είναι η απόσταση του σημείου P από το στοιχείο φορτίου dq.
Οπότε το ολικό πεδίο στο P υπολογίζεται με ολοκλήρωση των πεδίων από όλα τα στοιχεία φορτίου, δηλαδή :

$$E = \int dE$$

1.3 ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ

Το ηλεκτρικό πεδίο συνήθως περιγράφεται με τη βοήθεια των ηλεκτρικών δυναμικών γραμμών, οι οποίες αποτελούν ένα σύστημα καμπυλών μέσω των οποίων μπορεί να προσδιοριστεί η ένταση του πεδίου σε οποιοδήποτε σημείο αυτού. Η πυκνότητα , η καμπυλότητα και η φορά των ηλεκτρικών δυναμικών γραμμών ηλεκτρικού πεδίου χαράσσονται έτσι ώστε :

α) Η διεύθυνση της εφαπτομένης σε κάθε σημείο της ηλεκτρικής γραμμής να συμπίπτει με τη διεύθυνση της εντάσεως του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο αυτό.

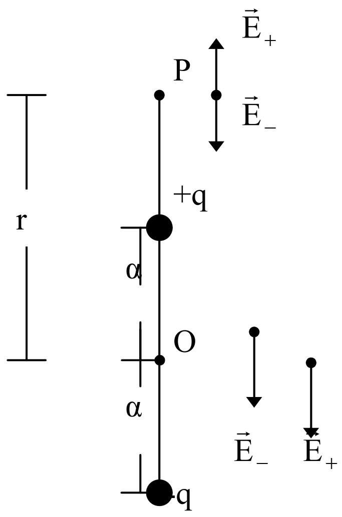
β) Η ηλεκτρική δυναμική γραμμή να έχει παντού τη φορά του ηλεκτρικού πεδίου, δηλαδή οι δυναμικές γραμμές ξεκινούν από θετικά φορτία και καταλήγουν σε αρνητικά και

γ) Η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών σε κάθε σημείο να είναι ανάλογη του μέτρου της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο θεωρούμενο σημείο.

Συνεπώς όταν το ηλεκτρικό πεδίο είναι ισχυρό απεικονίζεται με πυκνές δυναμικές γραμμές ενώ όπου είναι πιο ασθενές απεικονίζεται με πιο αραιές γραμμές. Επίσης σε κάθε σημείο του χώρου , το ηλεκτρικό πεδίο έχει μια μοναδική κατεύθυνση , οπότε από κάθε σημείο περνάει μόνο μια δυναμική γραμμή. Δηλαδή οι δυναμικές γραμμές δεν τέμνονται ποτέ. Γενικά οι ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές παρέχουν γραφικές αναπαραστάσεις των ηλεκτρικών πεδίων.

1.4 ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΔΙΠΟΛΟ

Ένα ζεύγος ηλεκτρικών φορτίων με ίσα μέτρα και αντίθετα πρόσημα, +q και –q τα οποία απέχουν απόσταση 2α αποτελούν ένα **ηλεκτρικό δίπολο**.



Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου του διπόλου στο σημείο O του μέσου της απόστασης των δυο φορτίων είναι :

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \quad \text{ή} \quad E = E_+ + E_-$$

αφού οι εντάσεις E_+, E_- που οφείλονται στα φορτία +q και –q αντίστοιχα είναι ομόρροπες.
Οι φορές των $\vec{E}_+$, $\vec{E}_-$ προκύπτουν από την ιδιότητα των δυναμικών γραμμών να ξεκινούν από θετικά και να καταλήγουν σε αρνητικά φορτία.

Αλλά : $E_+ = k\dfrac{q}{\alpha^2}$ και $E_- = k\dfrac{q}{\alpha^2}$ οπότε :

$$E = 2k\frac{q}{\alpha^2}$$

Στο σημείο P η ένταση του πεδίου του ηλεκτρικού διπόλου είναι :

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \quad \text{ή} \quad E = E_+ - E_-$$

αφού στην περίπτωση αυτή τα διανύσματα $\vec{E}_+$, $\vec{E}_-$ είναι αντίρροπα.

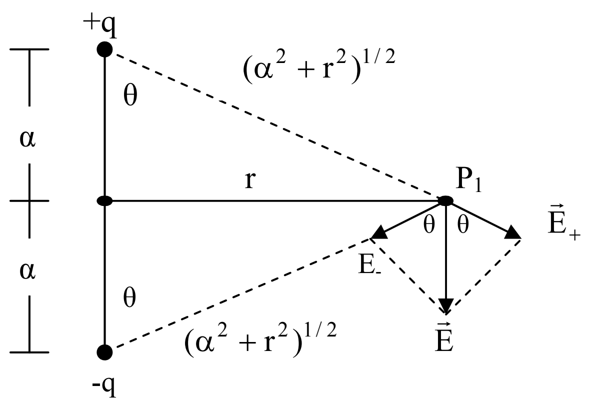
Αλλά : $E_+ = k\dfrac{q}{(r-\alpha)^2}$ και $E_- = k\dfrac{q}{(r+\alpha)^2}$ οπότε :

$$E = k\frac{q}{(r-\alpha)^2} - k\frac{q}{(r+\alpha)^2} \Rightarrow E = 4k\frac{q\alpha r}{(r^2-\alpha^2)^2}$$

Αν r>>α τότε προσεγγιστικά ισχύει : $r^2 - \alpha^2 \cong r^2$ οπότε :

$$E \cong 4k\frac{q\alpha r}{r^4} \quad \text{ή} \quad E \cong 4k\frac{q\alpha}{r^3}$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται η ένταση του πεδίου του ηλεκτρικού διπόλου σε ένα σημείο P_1 της μεσοκαθέτου.



Στο σημείο P_1 είναι : $E_+ = E_- = k\dfrac{q}{\alpha^2 + r^2}$

Το διανυσματικό άθροισμα $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$ έχει φορά προς τα κάτω και μέτρο :

$$E = \sqrt{E_+^2 + E_-^2 + 2E_+E_-\cos\phi} = \sqrt{2E_+^2 + 2E_+^2\cos\phi} = \sqrt{2E_+^2(1+\cos\phi)}$$

Αλλά φ=2θ οπότε : $E=\sqrt{2E_+^2(1+\cos 2\theta)}$

και λόγω της τριγωνομετρικής σχέσης : $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \Rightarrow 1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$ έχουμε :

$$E = \sqrt{2E_+^2 \, 2\cos^2\theta} \Rightarrow E = 2E_+\cos\theta$$

Αλλά $\cos\theta = \dfrac{\alpha}{\left(\alpha^2 + r^2\right)^{1/2}}$ οπότε :

$$E = 2k\frac{q}{\left(\alpha^2 + r^2\right)}\frac{\alpha}{\left(\alpha^2 + r^2\right)^{1/2}} \quad \text{ή} \quad E = 2k\frac{q\alpha}{\left(\alpha^2 + r^2\right)^{3/2}}$$

Αν r>>α τότε προσεγγιστικά $\alpha^2 + r^2 \cong r^2$ οπότε :

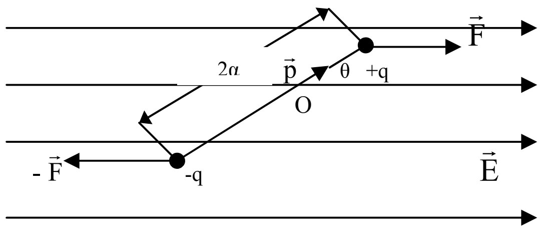
$$E \cong 2k\frac{q\alpha}{r^3}$$

1.5 ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΔΙΠΟΛΙΚΗ ΡΟΠΗ

Η ηλεκτρική ροπή του διπόλου μπορεί να θεωρηθεί ως ένα διάνυσμα $\vec{p}$ του οποίου το μέτρο είναι το γινόμενο του καθενός φορτίου q και της μεταξύ τους απόστασης 2α, δηλαδή :

$$\boxed{p=2\alpha q}$$

Η φορά του $\vec{p}$ για κάθε δίπολο είναι από το αρνητικό προς το θετικό φορτίο πάνω στον άξονα του διπόλου.



Στο παραπάνω σχήμα ένα δίπολο τοποθετείται σε ομογενές εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$, με τη διπολική του ροπή $\vec{p}$ να σχηματίζει γωνία θ με το πεδίο . Στο δίπολο εξασκούνται δυο ίσες και αντίθετες δυνάμεις $\vec{F}$ και $-\vec{F}$ με μέτρο F=qE.
Η συνισταμένη δύναμη του διπόλου είναι μηδέν , αλλά η ολική ροπή ως προς τον άξονα O είναι :

$$\tau=2F\alpha\sin\theta=2\alpha F\sin\theta=2\alpha qE\sin\theta=pE\sin\theta$$

ή σε διανυσματική μορφή $\boxed{\vec{\tau}=\vec{p}\times\vec{E}}$

Δηλαδή το ηλεκτρικό δίπολο μέσα σε εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$, δέχεται ροπή που τείνει να το ευθυγραμμίσει με το πεδίο.
Για τον προσανατολισμό του διπόλου μέσα σε εξωτερικό πεδίο πρέπει να καταναλωθεί έργο από εξωτερικό αίτιο. Το έργο αυτό αποθηκεύεται ως δυναμική ενέργεια U στο σύστημα του διπόλου και του εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου και είναι :

$$W=\int dW=\int_{\theta_0}^{\theta}\tau d\theta=\int_{\theta_0}^{\theta}pE\sin\theta d\theta=pE[-\cos\theta]_{\theta_0}^{\theta}=U$$

όπου θ_0 είναι η αρχική διεύθυνση του διπόλου και τ η ροπή που εξασκείται από το αίτιο που παράγει το έργο.

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

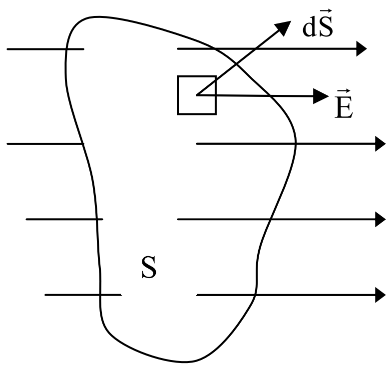
Αν $\theta_0=90^0$ προκύπτει ότι :

$W=U= -pE\cos\theta$ ή $\boxed{W = U = -\vec{p} \cdot \vec{E}}$

2. ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ GAUSS – ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ

2.1 ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΡΟΗ

Θεωρούμε μια επιφάνεια S εντός ενός ηλεκτρικού πεδίου και μια στοιχειώδη επιφάνεια αυτής $d\vec{S}$, στην οποία η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι $\vec{E}$.



Ως ηλεκτρική ροή $d\Phi_E$ της επιφάνειας $d\vec{S}$ ορίζεται το μονόμετρο μέγεθος $\vec{E}d\vec{S}$. Σύμφωνα με τις ιδιότητες των ηλεκτρικών δυναμικών γραμμών, η ροή που διέρχεται από μια επιφάνεια μπορεί να εκφραστεί από τον αριθμό των ηλεκτρικών δυναμικών γραμμών που διαπερνούν την επιφάνεια.

Η συνολική δια της επιφάνειας S διερχόμενη ηλεκτρική ροή υπολογίζεται αν χωρίσουμε την επιφάνεια S σε στοιχειώδεις επιφάνειες $\vec{S}_i$ και αθροίσουμε όλα τα γινόμενα $\vec{E}_i \cdot \vec{S}_i$.

Άρα η **ολική ροή Φ_E** παρέχεται από το ακόλουθο επιφανειακό ολοκλήρωμα :

$$\boxed{\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$

Η μονάδα μέτρησης της ηλεκτρικής ροής στο S.I. είναι το 1 Nm^2/Cb.

Αν τα διανύσματα $\vec{E}$ και $d\vec{S}$ σχηματίζουν γωνία θ τότε το εσωτερικό τους γινόμενο είναι :

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = EdS\cos\theta$$

Άρα :

$$\Phi_E = \oint_S E\cos\theta dS$$

2.2 ΝΟΜΟΣ GAUSS

Η σχέση μεταξύ της ηλεκτρικής ροής που διέρχεται από μια κλειστή επιφάνεια και του ηλεκτρικού φορτίου που την παράγει είναι θεμελιώδης και ονομάζεται **νόμος του Gauss**. Η σχέση αυτή διατυπώνεται ως :

$$\varepsilon_0\Phi_E=q$$

ή χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ηλεκτρικής ροής έχουμε :

$$\varepsilon_0\oint_S \vec{E}d\vec{S}=q \quad \text{ή} \quad \boxed{\oint_S \vec{E}d\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}}$$

όπου q είναι το ολικό φορτίο που περιέχεται στην κλειστή επιφάνεια S.

Η κλειστή επιφάνεια πάνω στην οποία εφαρμόζεται ο νόμος του Gauss ονομάζεται **επιφάνεια Gauss**, η οποία συνήθως είναι μια φανταστική γεωμετρική επιφάνεια το σχήμα της οποίας υποδεικνύεται από το γεωμετρικό σχήμα της κατανομής φορτίου . Δηλαδή οι σφαιρικές κατανομές φορτίων υποδεικνύουν τη χρήση σφαιρικής επιφάνειας, οι κυλινδρικές την κυλινδρική επιφάνεια κλπ. Στην περίπτωση τέλος φορτίου με συνεχή κατανομή πυκνότητας ρ το ολικό φορτίο είναι :

$$q=\int_V \rho dV,$$

όπου ο όγκος V είναι αυτός που περικλείεται από την επιφάνεια S. Επομένως ο νόμος του Gauss παίρνει την μορφή :

$$\boxed{\oint_s \vec{E}d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV}$$

Συνήθως κατά την εφαρμογή του νόμου Gauss, λόγω συμμετρίας των προβλημάτων η επιλεγμένη επιφάνεια είναι έντασης $\vec{E}$ σταθερού μέτρου.

2.3 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ GAUSS

α) Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένης αγώγιμης σφαίρας

Σε μια αγώγιμη φορτισμένη σφαίρα ακτίνας R, το φορτίο της Q είναι κατανεμημένο ομοιόμορφα πάνω σε όλη την επιφάνειά της.
Επίσης λόγω της συμμετρίας κατανομής του φορτίου η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου θα έχει ακτινική διεύθυνση και το μέτρο της θα είναι το ίδιο σε όλα τα σημεία της σφαιρικής επιφάνειας, της οποίας το κέντρο συμπίπτει με το κέντρο συμμετρίας του φορτίου.

Επομένως το επιφανειακό ολοκλήρωμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στην σφαιρική επιφάνεια S, δηλαδή η ηλεκτρική ροή που διέρχεται της επιφάνειας S είναι :

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = E\oint_S d\vec{S} = 4\pi r^2 E$$

Συνεπώς για να υπολογίσουμε την ένταση του πεδίου εντός και εκτός της σφαίρας (παντού στο χώρο) θα θεωρήσουμε επιφάνεια Gauss με ακτίνα r<R και r>R αντίστοιχα και θα εφαρμόσουμε το νόμο του Gauss. Δηλαδή:

Για r<R : $4\pi r^2 E_{εσ}=Q_{εσ}/\varepsilon_0$ δηλ. $E_{εσ}=0$ επειδή $Q_{εσ}=0$.

Για r>R : $4\pi r^2 E_{εξ}=Q_{εξ}/\varepsilon_0$ ή $E_{εξ}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$ αφού το περικλειόμενο φορτίο είναι το ολικό φορτίο της σφαίρας.

β) Ηλεκτρικό πεδίο ομοιόμορφα φορτισμένης σφαίρας (μονωτικής)

Σε μια μονωτική σφαίρα ακτίνας R , το ηλεκτρικό φορτίο της Q είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο σε ολόκληρο τον όγκο της.
Επιλέγοντας επιφάνεια Gauss μια σφαίρα ακτίνας r ομόκεντρη με την κατανομή φορτίου, εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss.

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV$$

όπου η πυκνότητα φορτίου ρ (φορτίο ανά μονάδα όγκου) είναι :

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Οπότε για r<R έχουμε για την ένταση στο εσωτερικό της σφαίρας :

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{ή} \quad E_{\varepsilon\sigma} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3} r$$

ενώ για r>R το περικλειόμενο φορτίο είναι το ολικό φορτίο Q και

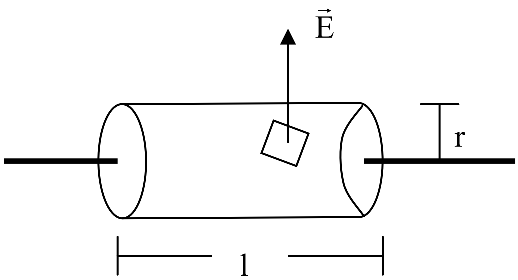
$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0} Q \quad \text{ή} \quad E_{\varepsilon\xi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

Παρατηρείται ότι το πεδίο $E_{\varepsilon\xi}$ είναι το ίδιο με το πεδίο που θα προέκυπτε αν το περικλειόμενο από την επιφάνεια S φορτίο ήταν συγκεντρωμένο στο κέντρο της σφαίρας.

γ) Ηλεκτρικό πεδίο γραμμικού φορτίου

Θεωρούμε ηλεκτρικό θετικό φορτίο Q κατανεμημένο σε ευθεία πολύ μεγάλου μήκους με σταθερή γραμμική πυκνότητα λ=Q/l (φορτίο ανά μονάδα μήκους). Λόγω συμμετρίας, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου από την ομογενή αυτή γραμμική κατανομή φορτίου έχει μόνο ακτινική διεύθυνση κι έτσι εκλέγουμε ως επιφάνεια Gauss κύλινδρο ακτίνας r και μήκους l.

Η ένταση του πεδίου είναι σταθερή σ΄ όλη την κυλινδρική επιφάνεια και η ροή είναι Ε2πrl, όπου 2πrl είναι το εμβαδόν της κυλινδρικής επιφάνειας.
Η ροή από τις κυκλικές βάσεις είναι μηδέν αφού το $\vec{E}$ δεν τις τέμνει.



Επομένως ο νόμος του Gauss δίνει :

$$\oint_S E dS = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

όπου Q=λl το φορτίο που περικλείει η επιφάνεια Gauss.

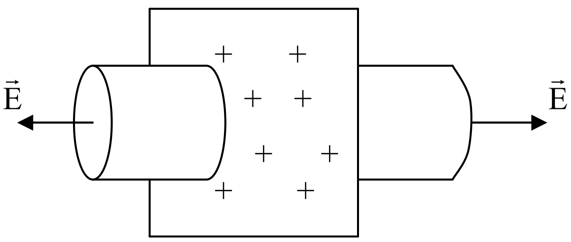
Άρα :

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

Η διεύθυνση του $\vec{E}$ για γραμμή φορτίου είναι ακτινική με φορά προς τα έξω.

δ) Ηλεκτρικό πεδίο ομοιόμορφα φορτισμένης επιφάνειας

Θεωρούμε θετικό φορτίο κατανεμημένο σε λεπτή επίπεδη επιφάνεια άπειρης έκτασης με σταθερή επιφανειακή πυκνότητα σ. Χρησιμοποιούμε ως επιφάνεια Gauss έναν κύλινδρο με τον άξονα του κάθετο στην επιφάνεια του φορτίου με εμβαδόν βάσης Α.



Σε κάθε σημείο το $\vec{E}$ είναι κάθετο στην επιφάνεια και λόγω συμμετρίας το πεδίο έχει σταθερό μέτρο Ε και διεύθυνση κάθετη προς το επίπεδο με φορά προς τα έξω. Άρα αφού το $\vec{E}$ δεν διαπερνά την κυλινδρική επιφάνεια , η επιφάνεια αυτή δεν συμμετέχει στην ροή.
Οπότε από το νόμο του Gauss προκύπτει :

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow EA + EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \quad \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}} \quad ή$$

όπου σΑ είναι το περικλειόμενο φορτίο.

Συνεπώς το πεδίο είναι ομογενές και κάθετο προς την επιφάνεια , με μέτρο ανεξάρτητο της απόστασης απ΄ αυτήν. Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου είναι ευθείες παράλληλες και ομοιόμορφα κατανεμημένες.

Γενικά η εφαρμογή του νόμου του Gauss είναι δυνατή μόνο όταν η κατανομή φορτίου έχει πολύ υψηλή συμμετρία.

2.4 ΔΙΑΦΟΡΑ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ - ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Η χαρακτηριστικότερη ιδιότητα του ηλεκτροστατικού πεδίου είναι ότι το έργο το οποίο χρειάζεται για την μετακίνηση φορτίου q, μεταξύ δυο οποιωνδήποτε σημείων του, είναι ανεξάρτητο της διαδρομής, εξαρτώμενο αποκλειστικά από τα σημεία μεταξύ των οποίων γίνεται η μετακίνηση. Τα πεδία που έχουν τη θεμελιώδη αυτή ιδιότητα ονομάζονται ***συντηρητικά ή αστρόβιλα πεδία***.

Στα συντηρητικά πεδία είναι πάντοτε δυνατό να βρούμε μια βαθμωτή συνάρτηση V(x,y,z) από την οποία να απορρέει το πεδίο.
Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **δυναμική συνάρτηση ή δυναμικό** και είναι ιδιαίτερα χρήσιμη τόσο για την κατανόηση της φύσεως του ηλεκτρικού πεδίου, όσο και στην επίλυση προβλημάτων ηλεκτροστατικής.

Επίσης λόγω της συντηρητικότητας του ηλεκτροστατικού πεδίου ισχύουν και οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\oint_C \vec{E}d\vec{l} = 0 \qquad \text{και} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Ορίζουμε ως διαφορά δυναμικού V_{AB} μεταξύ δυο σημείων Α,Β ηλεκτροστατικού πεδίου $\vec{E}$, το βαθμωτό μέγεθος :

$$\boxed{V_{AB} = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}d\vec{l}}$$

Δηλαδή η διαφορά δυναμικού είναι το έργο ανά μονάδα φορτίου κατά τη μετακίνηση ενός θετικού φορτίου από το Α στο Β, αφού :

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}d\vec{l} = -\int_A^B q\vec{E}d\vec{l} = -q\int_A^B \vec{E}d\vec{l} \Rightarrow -\int_A^B \vec{E}d\vec{l} = \frac{W_{AB}}{q}$$

(Το αρνητικό πρόσημο εκφράζει το γεγονός ότι το έργο παράγεται από εξωτερική δύναμη που αντιτίθεται στην δύναμη από το πεδίο).

Διαλέγοντας αυθαίρετα ένα σημείο αναφοράς Α, μπορούμε σε κάθε ηλεκτροστατικό πεδίο να ορίσουμε μια βαθμωτή συνάρτηση της οποίας η τιμή σε κάθε σημείο Β να ισούται με το έργο ανά μονάδα φορτίου το οποίο χρειάζεται για τη μεταφορά φορτίου από το σημείο αναφοράς Α στο θεωρούμενο σημείο Β.
Η συνάρτηση αυτή λέγεται **δυναμικό** και το δυναμικό του σημείου αναφοράς είναι μηδέν.

Συνήθως ως σημείο αναφοράς λαμβάνουμε το άπειρο, οπότε το δυναμικό σε σημείο Σ δίνεται από τη σχέση :

$$\boxed{V_\Sigma = -\int_\infty^\Sigma \vec{E}d\vec{l} = \int_\Sigma^\infty \vec{E}d\vec{l}}$$

Μονάδα μέτρησης του δυναμικού στο S.I. είναι το Volt (1Volt=1Joule/Cb).
Σύμφωνα με την προηγούμενη εξίσωση το δυναμικό του πεδίου που οφείλεται σε σημειακό φορτίο q είναι :

$$V_\Sigma = -\int_\infty^\Sigma \vec{E}d\vec{l} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^\Sigma \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

όπου r η απόσταση του φορτίου q από το σημείο στο οποίο αναφέρεται το δυναμικό V_Σ .

Στην περίπτωση συστήματος σημειακών φορτίων $q_1, q_2, \ldots, q_n$ που βρίσκονται σε πεπερασμένες μεταξύ τους αποστάσεις, εκλέγοντας ως σημείο αναφοράς το άπειρο, το δυναμικό σε σημείο Σ είναι το αλγεβρικό άθροισμα του δυναμικού κάθε φορτίου, δηλαδή :

$$V_\Sigma = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}$$

ενώ για συνεχή κατανομή φορτίου το άθροισμα αντικαθίσταται από ολοκλήρωμα , δηλαδή :

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r}$$

όπου dq είναι στοιχειώδες φορτίο της κατανομής, και r η απόστασή του από το σημείο όπου υπολογίζεται το δυναμικό

Όπως παρατηρείται το ηλεκτρικό πεδίο και το δυναμικό συνδέονται μέσω της σχέσης ορισμού του δυναμικού :

$$V = -\int E dl$$

Ισοδύναμα μπορεί να υπολογιστεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μέσω του δυναμικού, σύμφωνα με τη σχέση :

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V} \qquad \text{ή} \qquad \vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)$$

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τα οποία έχουν το ίδιο ηλεκτρικό δυναμικό λέγεται **ισοδυναμική επιφάνεια** . Οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι κάθετες πάνω στις δυναμικές γραμμές και επομένως και προς το διάνυσμα της έντασης $\vec{E}$ του ηλεκτρικού πεδίου. Μια οικογένεια ισοδυναμικών επιφανειών, όπου σε κάθε μια αντιστοιχεί διαφορετική τιμή δυναμικού, μπορεί να δώσει μια γενική περιγραφή του ηλεκτρικού πεδίου σε μια περιοχή.

2.5 ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Έστω σύστημα από δυο θετικά φορτία q_1,q_2 και r_{12} η μεταξύ τους απόσταση. Για τη δημιουργία του συστήματος, δηλαδή τη μετακίνηση π.χ. του φορτίου q_2 από το άπειρο σε απόσταση r_{12} από το q_1 απαιτείται η κατανάλωση έργου :

$$W_{12} = \int_{\infty}^{r_{12}} \vec{F} d\vec{l} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^{r_{12}} \frac{q_1 q_2}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

Το έργο αυτό μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια U του συστήματος των φορτίων δηλαδή:

$$\boxed{U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}}}$$

Στην περίπτωση n σημειακών φορτίων q_1,q_2,…,q_i,…,q_n η δυναμική ενέργεια λόγω αλληλεπίδρασης του φορτίου q_i με όλα τα υπόλοιπα φορτία $q_{j\neq i}$ θα είναι ,
σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση και την αρχή της επαλληλίας :

$$\boxed{U = \sum_{j\neq i}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_i q_j}{r_{ij}}}$$

όπου r_{ij} η απόσταση των φορτίων q_i , q_j .

Δηλαδή για τον υπολογισμό της δυναμικής ενέργειας ενός συστήματος φορτίων λαμβάνουμε το άθροισμα των δυναμικών ενεργειών όλων των δυνατών ζευγών φορτίων.

Συνεπώς ως **ηλεκτρική δυναμική ενέργεια** ενός συστήματος σημειακών φορτίων ορίζουμε το έργο που απαιτείται για να μεταφερθούν τα φορτία αυτά από το άπειρο στις θέσεις που καταλαμβάνουν μέσα στο σύστημα.

2.6 ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ ΤΟΥ GAUSS-ΕΞΙΣΩΣΗ POISSON

Σύμφωνα με το θεώρημα Gauss μπορεί ένα κλειστό επιφανειακό ολοκλήρωμα να συνδεθεί με ένα τριπλό, δηλαδή :

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla}\vec{E}dV$$

όπου V ο όγκος που περιέχεται από την κλειστή επιφάνεια S.
Επομένως ο νόμος του Gauss γράφεται :

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV = \int_V \vec{\nabla}\vec{E}dV$$

Επειδή η ανωτέρω εξίσωση ισχύει για κάθε όγκο V, προκύπτει ότι :

$$\boxed{\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Η εξίσωση αυτή αποτελεί τη **διαφορική μορφή του νόμου του Gauss**.

Λαμβάνοντας υπόψιν την σχέση που συνδέει την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου με το δυναμικό, δηλαδή $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ προκύπτει :

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \vec{\nabla}\left(-\vec{\nabla}V\right) = -\nabla^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

ή

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Η σχέση αυτή αποτελεί την **εξίσωση Poisson**.

Στα σημεία του χώρου, στα οποία η πυκνότητα φορτίου είναι μηδέν ισχύει η σχέση :

$$\boxed{\nabla^2 V = 0}$$

η οποία αποτελεί την **εξίσωση Laplace**.

3. ΠΥΚΝΩΤΕΣ

3.1 ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ ΠΥΚΝΩΤΗ

Μια διάταξη δυο γειτονικών αγωγών οποιουδήποτε σχήματος, που φέρουν ίσα και αντίθετα φορτία λέγεται **πυκνωτής** και οι αγωγοί **οπλισμοί**. Η **χωρητικότητα C** οποιουδήποτε πυκνωτή ορίζεται ως το πηλίκο του μέτρου του φορτίου q του κάθε οπλισμού προς τη διαφορά δυναμικού V μεταξύ των οπλισμών. Δηλαδή :

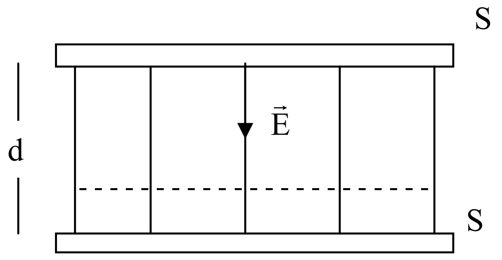
$$\boxed{C = \frac{q}{V}}$$

Το φορτίο q δεν πρέπει να λαμβάνεται ως το συνολικό φορτίο του πυκνωτή το οποίο είναι μηδέν. Η χωρητικότητα του πυκνωτή εξαρτάται από το σχήμα κάθε οπλισμού , τη διάταξη των οπλισμών στο χώρο και το υλικό μέσα στο οποίο βρίσκονται οι οπλισμοί. Μονάδα μέτρησης της χωρητικότητας στο S.I. είναι το farad (1F=1Cb/Volt).

Στη συνέχεια εξετάζονται ορισμένες απλές περιπτώσεις πυκνωτών.

α) Επίπεδος πυκνωτής :

Θεωρούμε έναν επίπεδο πυκνωτή , δηλαδή σύστημα από δυο μεταλλικές παράλληλες επίπεδες πλάκες, φορτισμένο με ίσα και αντίθετα φορτία $\pm Q$. Λόγω αμοιβαίας έλξεως τα φορτία κατανέμονται στην εσωτερική επιφάνεια των πλακών. Αν παραβλέψουμε την ανωμαλία στις άκρες των πλακών, η επιφανειακή πυκνότητα σ του φορτίου είναι σταθερή σε ολόκληρη την έκταση της εσωτερικής επιφάνειας κάθε πλάκας.



Συνεπώς μεταξύ των δυο πλακών δημιουργείται ομογενές ηλεκτρικό πεδίο εντάσεως σ/ε_0 και διαφορά δυναμικού :

$$V = Ed = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = \frac{Q}{S} \cdot \frac{d}{\varepsilon_0}$$

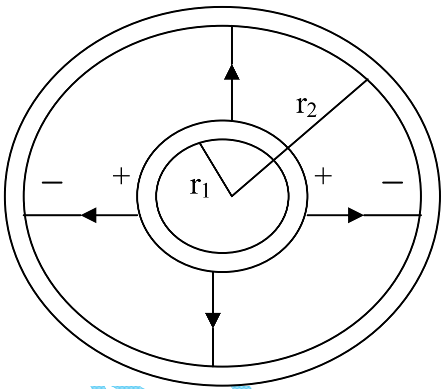
όπου d η απόσταση και S το εμβαδόν των πλακών αντίστοιχα.

Άρα η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{S} \cdot \frac{d}{\varepsilon_0}} \quad \text{ή} \quad \boxed{C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}}$$

β) Σφαιρικός πυκνωτής :

Θεωρούμε σφαιρικό πυκνωτή, δηλαδή σύστημα από δυο ομόκεντρες σφαιρικές μεταλλικές επιφάνειες, φορτισμένο με ίσα και αντίθετα φορτία $\pm Q$.



Σύμφωνα με το νόμο του Gauss, τόσο στον εσωτερικό χώρο της μικρότερης σφαίρας, όσο και στον εξωτερικό χώρο της μεγαλύτερης σφαίρας η ένταση του πεδίου είναι μηδέν (αφού το ολικό περικλειόμενο φορτίο είναι μηδέν). Η ένταση του πεδίου είναι διαφορετική από μηδέν μόνο στο χώρο μεταξύ των σφαιρικών επιφανειών. Από τη συμμετρία του προβλήματος προκύπτει ότι η ένταση έχει ακτινική διεύθυνση και το μέτρο της υπολογίζεται με εφαρμογή του νόμου του Gauss σε σφαιρική επιφάνεια S ακτίνας $r_1<r<r_2$. Δηλαδή :

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \text{ή} \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δυο επιφανειών είναι :

$$V_{12} = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E}d\vec{r} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

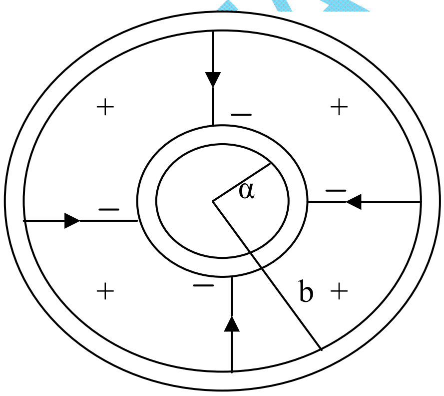
ή $$V_{12} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r_1-r_2}{r_1 r_2}$$

Επομένως η χωρητικότητα του σφαιρικού πυκνωτή είναι :

$$C = \frac{Q}{V_{12}} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r_1-r_2}{r_1 r_2}}$$ ή $$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0\frac{r_1 r_2}{r_1-r_2}}$$

γ) Κυλινδρικός πυκνωτής :

Θεωρούμε έναν κυλινδρικό πυκνωτή , ο οποίος αποτελείται από δυο ομοαξονικούς κυλίνδρους ακτίνων α και b και μήκους l, φορτισμένο με ίσα και αντίθετα φορτία $\pm Q$.



Θεωρούμε ως επιφάνεια Gauss ομοαξονικό κύλινδρο ακτίνας α<r<b και μήκους l και εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss :

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E2\pi r l = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

(Η ροή διέρχεται μόνο από την κυλινδρική επιφάνεια και όχι από τα τοιχώματα).

Επομένως : $E = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r l}$

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών είναι :

$$V_{\alpha b} = -\int_{\alpha}^{b} E dr = -\int_{\alpha}^{b} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \cdot \frac{dr}{r} = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln\frac{\alpha}{b} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln\frac{b}{\alpha}$$

Άρα η χωρητικότητα του κυλινδρικού πυκνωτή είναι :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln\dfrac{b}{\alpha}} \qquad \text{ή} \qquad \boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\dfrac{b}{\alpha}}}$$

3.2 ΣΥΝΔΕΣΜΟΛΟΓΙΑ ΠΥΚΝΩΤΩΝ – ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΥΚΝΩΤΗ

Σύνδεση πυκνωτών σε σειρά :

$$\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}+.....$$

Δηλαδή το αντίστροφο της ισοδύναμης χωρητικότητας C_{eq} του συνδυασμού σε σειρά ισούται με το άθροισμα των αντιστρόφων των επί μέρους χωρητικοτήτων.

Παράλληλη σύνδεση πυκνωτών :

$$C_{eq}=C_1+C_2+C_3+\ldots.$$

Δηλαδή η ισοδύναμη χωρητικότητα C_{eq} του συνδυασμού σε παράλληλη σύνδεση, ισούται με το άθροισμα των επί μέρους χωρητικοτήτων.

Κάθε φορτισμένος πυκνωτής έχει αποθηκευμένη δυναμική ενέργεια U ίση με το έργο που απαιτείται για τη φόρτιση του.
Η ενέργεια αυτή αποδίδεται αν επιτραπεί στον πυκνωτή να εκφορτιστεί.
Υποθέτοντας ότι σε χρόνο t έχει μεταφερθεί στον πυκνωτή φορτίο q, η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του είναι V=q/C.
Το στοιχειώδες έργο dW που απαιτείται για να μεταφερθεί επιπλέον φορτίο dq είναι :

$$dW=Vdq=\frac{q}{C}dq$$

Επομένως το ολικό έργο W που απαιτείται να αυξηθεί το φορτίο q από το μηδέν ως την τελική τιμή Q είναι :

$$W=\int_0^W dW=\frac{1}{C}\int_0^Q qdq=\frac{Q^2}{2C}$$

Άρα η ενέργεια U ενός πυκνωτή μπορεί να εκφραστεί ως :

$$\boxed{U=\frac{Q^2}{2C}=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}QV}$$

3.3 ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΑ

Οι περισσότεροι πυκνωτές έχουν ένα μη αγώγιμο υλικό δηλαδή ένα **διηλεκτρικό**, μεταξύ των οπλισμών τους. Με την τοποθέτηση ενός διηλεκτρικού μεταξύ των οπλισμών ενός πυκνωτή επιτυγχάνεται τόσο η συγκράτηση των οπλισμών σε πολύ μικρή απόσταση μεταξύ τους χωρίς να εφάπτονται, όσο και η αύξηση της χωρητικότητας του πυκνωτή σε σύγκριση με την παρουσία κενού. Έτσι αν πλάκα διηλεκτρικού τοποθετηθεί μέσα σε πυκνωτή παράλληλων οπλισμών τότε :

$$\frac{E_0}{E} = \frac{V_0}{V} = \frac{C}{C_0} = k$$

όπου E_0 ,V_0 , C_0 οι τιμές των μεγεθών χωρίς την παρουσία διηλεκτρικού.

Συνεπώς ο λόγος της χωρητικότητας με διηλεκτρικό προς εκείνη χωρίς διηλεκτρικό καλείται **διηλεκτρική σταθερά k** του υλικού και είναι :

$$\boxed{k = \frac{C}{C_0}}$$

4. ΜΑΓΝΗΤΟΣΤΑΤΙΚΗ

4.1 ΜΑΓΝΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ – ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Η συνολικά εξασκούμενη δύναμη επί ηλεκτρικού φορτίου δεν εξαρτάται μόνο από τη θέση του στο χώρο, δηλαδή από την απόσταση του από τα άλλα φορτία, αλλά και από την ταχύτητά του.
Σε κάθε σημείο της τροχιάς του το φορτίο δέχεται την επίδραση δυο δυνάμεων. Η μια περιγράφεται με την βοήθεια της εντάσεως $\vec{E}$ του ηλεκτρικού πεδίου και ισούται με $q\vec{E}$, ενώ η δεύτερη είναι συνάρτηση της ταχύτητας του φορτίου και ονομάζεται **μαγνητική δύναμη**.
Βρίσκεται πειραματικά και αποδεικνύεται θεωρητικά ότι η εξαρτωμένη από την ταχύτητα δύναμη επί σημειακού φορτίου q κινούμενου με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια μιας ανυσματικής συνάρτησης $\vec{B}(x, y, z)$ από τη σχέση :

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{\upsilon} \times \vec{B}}$$

Ο χώρος σε κάθε σημείο του οποίου ασκείται μαγνητική δύναμη εξαρτώμενη από την ταχύτητα του φορτίου καλείται **μαγνητικό πεδίο**, η δε ανυσματική συνάρτηση $\vec{B}(x, y, z)$ καλείται **ένταση** αυτού.
Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί συγχρόνως και τον ορισμό της εντάσεως του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$.
Μονάδα μέτρησης του B στο S.I. είναι το Tesla ($1T = 1N/A \cdot m$).
Συνεπώς η συνολικά εξασκούμενη δύναμη στο φορτίο είναι :

$$\boxed{\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{\upsilon} \times \vec{B}\right)}$$

και ονομάζεται **δύναμη Lorentz**.

4.2 ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ – ΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΡΟΗ

Το μαγνητικό πεδίο μπορεί να παρασταθεί με μαγνητικές γραμμές, όπως ακριβώς το ηλεκτρικό πεδίο παριστάνεται με δυναμικές γραμμές.
Το διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ συνδέεται με τις μαγνητικές γραμμές σύμφωνα με τις ακόλουθες ιδιότητες:

α) Η εφαπτόμενη σε κάθε σημείο της μαγνητικής γραμμής δίνει τη διεύθυνση του $\vec{B}$ στο σημείο αυτό.

β) Οι μαγνητικές γραμμές σχεδιάζονται έτσι ώστε ο αριθμός αυτών που περνάει από τη μονάδα επιφάνειας όταν αυτή τοποθετηθεί κάθετα σ΄ αυτές να είναι ανάλογος με το μέτρο του διανύσματος του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$. Όπου οι γραμμές είναι πυκνές το $\vec{B}$ είναι μεγάλο, ενώ όπου είναι αραιές το $\vec{B}$ είναι μικρό.

Αντίθετα , όμως από τις ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές που ξεκινούν και καταλήγουν σε φορτία, οι γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι πάντοτε συνεχείς καμπύλες που δεν έχουν ποτέ αρχή και τέλος.

Η **μαγνητική ροή Φ_B** ορίζεται κατ΄ ανάλογο τρόπο με την ηλεκτρική ροή, δηλαδή :

$$\boxed{\Phi_B = \int_S \vec{B}d\vec{S}}$$

Η μονάδα της μαγνητικής ροής στο S.I. είναι το Weber ($1\text{Wb}=1\,\text{T}\cdot\text{m}^2$).

Επειδή στη φύση δεν υπάρχουν μεμονωμένα μαγνητικά μονόπολα (σε αντίθεση με τα μεμονωμένα ηλεκτρικά φορτία), η ολική μαγνητική ροή μέσα από μια κλειστή επιφάνεια είναι πάντοτε ίση με μηδέν. Δηλαδή :

$$\boxed{\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0}$$

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **νόμος του Gauss για τον μαγνητισμό**.

4.3 ΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ ΑΓΩΓΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

Θεωρούμε έναν ευθύγραμμο αγωγό ρεύματος, ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα Ι, δηλαδή από κινούμενα φορτία και βρίσκεται κάθετα σ΄ ένα μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$.

Σε κάθε κινούμενο φορτίο ασκείται μαγνητική δύναμη : $\vec{F} = q\vec{\upsilon} \times \vec{B}$.

Εάν τα κινούμενα φορτία του αγωγού έχουν ταχύτητα υ τότε διατρέχουν ένα μήκος l του αγωγού σε χρόνο t=l/υ. Το ολικό κινούμενο φορτίο q εξαρτάται από το ρεύμα και το χρόνο, δηλαδή :

$$q = It = I\frac{l}{\upsilon}$$

Αν το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ είναι κάθετο στον αγωγό τότε η μαγνητική δύναμη επί του αγωγού είναι :

$$F = q\upsilon B = \left(\frac{I \cdot l}{\upsilon}\right)\upsilon B \quad \text{ή} \quad \boxed{F = I \cdot lB} \quad (\text{για } \vec{l} \perp \vec{B})$$

Όταν ο αγωγός και το πεδίο δεν είναι κάθετα η σχέση $\vec{F} = q\vec{\upsilon} \times \vec{B}$ οδηγεί στη διανυσματική μορφή της δύναμης Laplace ρευματοφόρου αγωγού :

$$\boxed{\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}}$$

όπου το $\vec{l}$ κατευθύνεται κατά μήκος του αγωγού στην κατεύθυνση του ρεύματος.

Στην περίπτωση που ο αγωγός ρεύματος δεν είναι ευθύγραμμος ή το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ μεταβάλλεται με τη θέση , η ολική δύναμη επί του αγωγού υπολογίζεται διαιρώντας τον σε στοιχειώδη τμήματα $d\vec{l}$, όπου στο κάθε ένα ασκείται στοιχειώδης δύναμη Laplace :

$$d\vec{F} = I \cdot d\vec{l} \times \vec{B}$$

Στη συνέχεια ολοκληρώνοντας προκύπτει η ολική δύναμη :

$$\vec{F} = \int_C I d\vec{l} \times \vec{B}$$

4.4 ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΚΑΙ ΡΕΥΜΑΤΟΦΟΡΟΥ ΑΓΩΓΟΥ

Έχει δειχθεί πειραματικά ότι το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου B κινούμενου φορτίου είναι ανάλογο του q και του $1/r^2$.
Η διεύθυνση του $\vec{B}$ δεν είναι πάνω στην ευθεία που ενώνει το κινούμενο φορτίο με το σημείο παρατήρησης. Αντίθετα, το $\vec{B}$ είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από την ευθεία αυτή και το διάνυσμα $\vec{\upsilon}$ της ταχύτητας του φορτίου.

Επιπλέον το μέτρο B είναι ανάλογο του ημιτόνου της γωνίας φ μεταξύ των δυο αυτών διευθύνσεων και του μέτρου υ της ταχύτητας του φορτίου .
Δηλαδή :

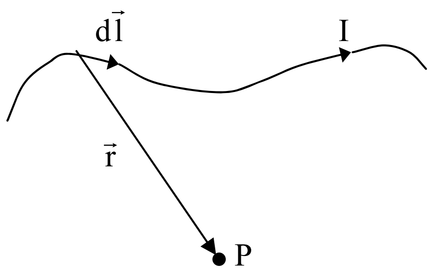
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q\upsilon \sin\phi}{r^2}$$

όπου $\mu_0/4\pi$ είναι μια σταθερά αναλογίας.
Η παραπάνω σχέση μπορεί να γράφει σε διανυσματική μορφή ως :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q\vec{\upsilon} \times \hat{r}}{r^2}}$$

Το μαγνητικό πεδίο, όπως και το ηλεκτρικό υπακούει στην **αρχή της επαλληλίας**, δηλαδή το ολικό μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από περισσότερα του ενός κινούμενα φορτία είναι ίσο με το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων των επιμέρους φορτίων.

Θεωρώντας έναν ρευματοφόρο αγωγό σε μορφή βρόγχου θα υπολογίσουμε την ένταση του μαγνητικού του πεδίου B σ΄ ένα τυχαίο σημείο του χώρου.



Για οποιοδήποτε στοιχείο $d\vec{l}$ του αγωγού που έχει την κατεύθυνση του ρεύματος, η έκφραση του στοιχειώδους $d\vec{B}$ μπορεί να γραφεί με τη μορφή :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} d\vec{l} \times \hat{r}$$

όπου $\hat{r} = \vec{r}/r$ και $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης του σημείου P από το $d\vec{l}$.
Για να υπολογίσουμε την ένταση $\vec{B}$ στο θεωρούμενο σημείο ολοκληρώνουμε σε όλο το μήκος του αγωγού, οπότε :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}}$$

Η σχέση αυτή αποτελεί το **νόμο των Biot-Savart**.

4.5 ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ AMPERE

Το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της έντασης $\vec{B}$ του μαγνητικού πεδίου για κλειστή καμπύλη που περικλείει ρευματοφόρο αγωγό οποιασδήποτε μορφής είναι :

$$\boxed{\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I}$$

όπου I είναι το άθροισμα των ρευμάτων που περικλείει η καμπύλη και $\mu_0 = 1/\varepsilon_0 c^2$.

Η εξίσωση αυτή παρέχει τη σχέση μεταξύ της εντάσεως $\vec{B}$ του μαγνητικού πεδίου και της εντάσεως I του παράγοντος το πεδίο ρεύμα και λέγεται **νόμος του Ampere**. Ο νόμος του Ampere παρέχει έναν εναλλακτικό τρόπο προσδιορισμού της σχέσης μεταξύ μαγνητικού πεδίου και των πηγών του και εφαρμόζεται σε προβλήματα με συμμετρία μεγάλου βαθμού .

Ο νόμος του Ampere μπορεί να διατυπωθεί και με διαφορική μορφή , η οποία είναι απλούστερη και έχει γενικότερη εφαρμογή. Θεωρούμε τη γενική περίπτωση ρεύματος στο χώρο, το οποίο περιγράφεται με την πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}(x, y, z)$, δηλαδή :

$$I = \int_S \vec{J} d\vec{S} \ .$$

Επομένως ο νόμος του Ampere γράφεται ως :

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J}d\vec{S}$$

και με τη βοήθεια του θεωρήματος του Stokes $\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B})d\vec{S}$

προκύπτει :

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B})\, d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J}d\vec{S}$$

Αφού η εξίσωση αυτή ισχύει για κάθε επιφάνεια, ανεξάρτητα απ΄ το σχήμα ή το μέγεθος της, θα ισχύει επίσης και

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}$$

Η εξίσωση αυτή αποτελεί τη **διαφορική μορφή του νόμου του Ampere**.
Επίσης σύμφωνα με το νόμο του Gauss για τον μαγνητισμό και το θεώρημα του Gauss:

$\int_S \vec{B}d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B}dV$ προκύπτει ότι : $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$

Απ΄ την εξίσωση αυτή φαίνεται η χαρακτηριστική ιδιότητα των μαγνητικών γραμμών, οι οποίες σε αντίθεση με τις ηλεκτρικές, είναι κλειστές.
Οι δυο παραπάνω εξισώσεις αποτελούν τις διαφορικές εξισώσεις του μαγνητοστατικού πεδίου.

4.6 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ ΤΟΥ AMPERE

α) Ευθύγραμμος αγωγός απείρου μήκους :

Θα υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό απείρου μήκους, που διαρρέεται από ρεύμα I.
Λόγω συμμετρίας επιλέγουμε ως καμπύλη ολοκλήρωσης κύκλο ακτίνας r, κάθετο στον αγωγό με το κέντρο του πάνω σ΄ αυτόν. Η ένταση του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ εφάπτεται στον κύκλο και ο νόμος του Ampere δίνει:

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 I \quad \text{ή} \quad \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

β) Κυλινδρικός αγωγός μεγάλου μήκους :

Για να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του κυλινδρικού αγωγού ακτίνας R επιλέγουμε ως δρόμο ολοκλήρωσης οποιονδήποτε κύκλο ακτίνας r<R. Λόγω συμμετρίας, το $\vec{B}$ έχει το ίδιο μέτρο σε κάθε σημείο αυτού του κύκλου και εφάπτεται σ΄ αυτόν.
Το ρεύμα I_{encl} που περικλείεται απ΄ την καμπύλη αυτή είναι : $I_{encl}=J\pi r^2$
όπου J είναι η πυκνότητα ρεύματος (ρεύμα ανά μονάδα επιφάνειας) και ισχύει για το ολικό ρεύμα $I=J\pi R^2 \Rightarrow J=I/\pi R^2$ οπότε προκύπτει ότι : $I_{encl}=Ir^2/R^2$.

Επομένως ο νόμος του Ampere δίνει :

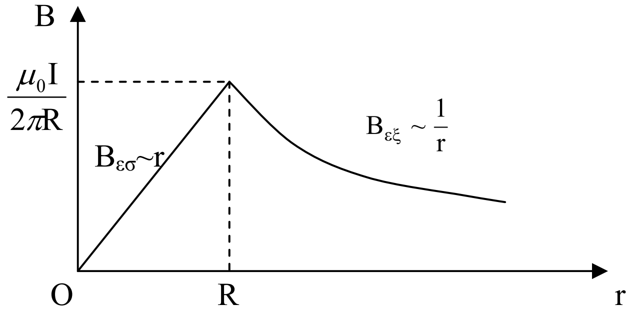
$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I_{encl} \Rightarrow 2\pi r B = \mu_0 \frac{Ir^2}{R^2} \Rightarrow \boxed{B_{\varepsilon\sigma} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{r}{R^2}}$$

Για να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό του κυλινδρικού αγωγού, θεωρούμε ως καμπύλη ολοκλήρωσης κύκλο ακτίνας r>R κι εφαρμόζουμε το νόμο του Ampere. Δηλαδή :

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 I \Rightarrow \boxed{B_{\varepsilon\xi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

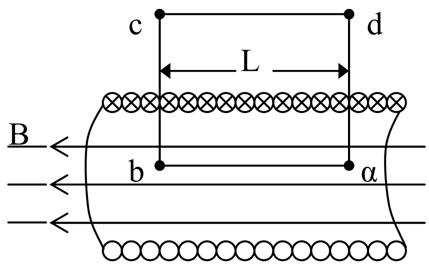
Παρατηρείται ότι για r=R , δηλαδή πάνω στην επιφάνεια του αγωγού οι δυο εξισώσεις του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό και εξωτερικό του αγωγού συμπίπτουν

Στη συνέχεια φαίνεται η γραφική παράσταση του B σαν συνάρτηση του r.



γ) Σωληνοειδές πηνίο :

Ένα σωληνοειδές αποτελείται από μια συρμάτινη ελικοειδή περιέλιξη γύρω από κύλινδρο, κυκλικής διατομής, η οποία διαρρέεται από το ίδιο ρεύμα I. Αν το μήκος του σωληνοειδούς είναι μεγάλο σε σύγκριση με τη διάμετρο της διατομής του, το εσωτερικό πεδίο κοντά στο κέντρο είναι σχεδόν ομογενές σε όλη την έκταση της διατομής και παράλληλο στον άξονα, ενώ το εξωτερικό πεδίο είναι σχεδόν μηδενικό.



Επιλέγοντας ως καμπύλη ολοκλήρωσης το ορθογώνιο abcd, εφαρμόζουμε το νόμο του Ampere για να υπολογίσουμε το πεδίο στο κέντρο και κοντά σε αυτό. Λόγω συμμετρίας, το πεδίο $\vec{B}$ κατά μήκος της πλευράς ab είναι παράλληλο σ΄ αυτή και σταθερό. Δηλαδή είναι :

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \int_\alpha^b \vec{B}d\vec{l} + \int_b^c \vec{B}d\vec{l} + \int_c^d \vec{B}d\vec{l} + \int_d^\alpha \vec{B}d\vec{l} = BL + 0 + 0 + 0 = BL$$

Το δεύτερο και το τέταρτο παραπάνω ολοκλήρωμα είναι μηδέν γιατί για κάθε στοιχείο αυτού του δρόμου το $\vec{B}$ είναι κάθετο στο δρόμο. Επίσης το τρίτο ολοκλήρωμα είναι μηδέν, γιατί το $\vec{B}$ θεωρείται μηδενικό για όλα τα εξωτερικά σημεία σε ένα ιδανικό σωληνοειδές. Αν θεωρήσουμε ότι η περιέλιξη περιέχει n σπείρες ανά μονάδα μήκους τότε ο συνολικός αριθμός σπειρών σε μήκος L είναι nL. Κάθε μια απ΄ αυτές περνά μέσα από το ορθογώνιο abcd μια φορά και διαρρέεται από ρεύμα I, όπου I είναι το ρεύμα στις σπείρες. Άρα το ολικό ρεύμα που περικλείεται απ΄ το ορθογώνιο είναι : $I_{encl} = nLI$.

Επομένως ο νόμος του Ampere δίνει :

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I_{encl} \Rightarrow BL = \mu_0 nLI \quad ή \quad \boxed{B = \mu_0 nI}$$

Η εξίσωση αυτή δείχνει ότι το μαγνητικό πεδίο B σωληνοειδούς δεν εξαρτάται από τη διάμετρο ή το μήκος του και είναι σταθερό για όλη την κάθετο τομή του (εφόσον η πλευρά ab δεν συμπίπτει αναγκαστικά με τον άξονα του σωληνοειδούς).

Παρατήρηση:

Η φορά του μαγνητικού πεδίου προσδιορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Κατά την εφαρμογή του κανόνα του δεξιού χεριού:

- στους ευθύγραμμους ρευματοφόρους αγωγούς ο αντίχειρας δείχνει τη φορά του ρεύματος I, ενώ
- στους κυκλικούς αγωγούς ο αντίχειρας δείχνει τη φορά του $\vec{B}$.

5. ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

5.1 ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ FARADAY

Κάθε κύκλωμα που διαρρέεται από ρεύμα I αποτελεί πηγή δημιουργίας μαγνητικού πεδίου στο χώρο. Μέσω μιας σειράς πειραμάτων ο Faraday διαπίστωσε ότι αν σε ένα κύκλωμα μεταβάλλεται χρονικά η μαγνητική του ροή Φ_B τότε αναπτύσσεται σ΄ αυτό **επαγωγική τάση** (emf εξ επαγωγής). Η αναπτυσσόμενη αυτή τάση δίνεται από τη σχέση :

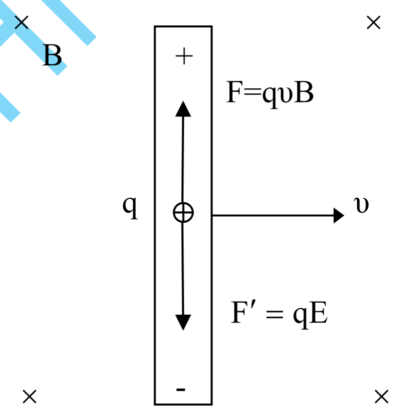
$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{-d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}d\vec{S}}$$

Η εξίσωση αυτή αποτελεί το **νόμο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής του Faraday**, σύμφωνα με τον οποίο η επαγόμενη σ΄ ένα κύκλωμα ηλεκτρεγερτική δύναμη ισούται με το αρνητικό του ρυθμού μεταβολής της μαγνητικής ροής που διαπερνά το κύκλωμα.

Το αρνητικό σημείο της εξίσωσης καθορίζει τη φορά της επαγομένης ηλεκτρεγερτικής δύναμης. Η φορά αυτή καθορίζεται από τον **κανόνα του Lenz** , σύμφωνα με τον οποίο το επαγωγικό ρεύμα έχει τέτοια φορά ώστε να αντιδρά στην μεταβολή της μαγνητικής ροής η οποία το προκάλεσε.

5.2 ΑΓΩΓΟΣ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΣ ΕΝΤΟΣ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Θεωρούμε έναν μεταλλικό αγωγό L κινούμενο εντός μαγνητικού πεδίου με σταθερή ταχύτητα υ κάθετη στον άξονα του , όπως φαίνεται στο σχήμα.



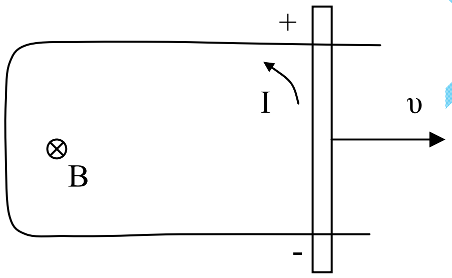
Σε κάθε φορτίο q στη ράβδο θα ασκηθεί μαγνητική δύναμη $\vec{F} = q\vec{\upsilon} \times \vec{B}$ με μέτρο F=qυB αφού $\vec{\upsilon} \perp \vec{B}$. Συνεπώς θετικά φορτία μετακινούνται στο πάνω άκρο της ράβδου , με αποτέλεσμα ο αγωγός να εμφανίζει περίσσεια θετικών φορτίων στο πάνω άκρο του και αρνητικών στο κάτω.
Έτσι δημιουργείται ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο εξασκεί επί των φορτίων q πρόσθετη δύναμη $\vec{F}'$ αντίθετη της $\vec{F}$.

Όταν η δύναμη $\vec{F}'$ αυξανόμενη γίνει ίση , κατά μέτρο με την $\vec{F}$, αποκαθιστάται μόνιμη κατάσταση και εντός του αγωγού δημιουργείται ομογενές ηλεκτρικό πεδίο εντάσεως :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}'}{q} = \vec{\upsilon} \times \vec{B} \quad , \text{ αφού } \vec{F}' = \vec{F} = q\vec{\upsilon} \times \vec{B}$$

Άρα κατά την κίνηση αγωγού εντός μαγνητικού πεδίου, σχηματίζεται ηλεκτρικό πεδίο τόσο εντός του αγωγού, όσο και στο γύρω του χώρου.

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι ο αγωγός αυτός ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος των πλευρών ακίνητου αγωγού σχήματος U, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Σύμφωνα με τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι δια του κυκλώματος κινούμενος – ακίνητος αγωγός θα διέλθει ρεύμα με φορά αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού. Έτσι η κινούμενη ράβδος έχει γίνει πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης, όπου στο εσωτερικό της φορτία κινούνται από το χαμηλότερο προς το υψηλότερο δυναμικό. Αυτή λέγεται **ηλεκτρεγερτική δύναμη λόγω κίνησης** $\mathcal{E}$ και είναι :

$$\mathcal{E} = EL \quad \text{ή} \quad \boxed{\mathcal{E} = \upsilon B L}$$

Επίσης λόγω της διελεύσεως του ρεύματος , στον κινούμενο αγωγό εξασκείται υπό του μαγνητικού πεδίου δύναμη Laplace F=BLI, που αντιτίθεται στην κίνηση του αγωγού. Γενικά η ΗΕΔ λόγω κίνησης αγωγού οποιουδήποτε σχήματος που κινείται σε οποιαδήποτε μαγνητικό πεδίο, ομογενές ή μη δίνεται απ΄ τη σχέση:

$$\mathcal{E} = \int_{\alpha}^{b} \left(\vec{\upsilon} \times \vec{B}\right) d\vec{l}$$

5.3 ΧΡΟΝΙΚΩΣ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΑ ΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

Ο νόμος της επαγωγής ισχύει ανεξάρτητα, είτε η μεταβολή της μαγνητικής ροής οφείλεται στην κίνηση του αγωγού, είτε στη χρονική μεταβολή του μαγνητικού πεδίου.
Η επαγωγική τάση προκαλεί ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\vec{E}$ κατά μήκος κλειστού αγωγού ισούται με την επαγωγική τάση, δηλαδή:

$$\mathcal{E} = \oint_{c} \vec{E} d\vec{l}$$

Συνεπώς ο νόμος του Faraday μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα με τις ακόλουθες εκφράσεις :

$$\mathcal{E} = \oint_{C} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_{S} \vec{B} d\vec{S} = -\int_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

όπου η επιφάνεια S περατώνεται επί της καμπύλης c.
Απ΄ το θεώρημα του Stokes έχουμε :

$$\oint_{c} \vec{E} d\vec{l} = \oint_{S} \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) d\vec{S}$$

οπότε προκύπτει η εξίσωση

$$\oint_{S} \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) d\vec{S} = -\int_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

η οποία ισχύει για κάθε επιφάνεια S. Αν θεωρήσουμε ότι η επιφάνεια S ελαττώνεται συνεχώς, στο όριο που αυτή τείνει να γίνει σημείο, ισχύει :

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Η σχέση αυτή αποτελεί τη **διαφορική μορφή του νόμου του Faraday**.
Επειδή εκτός από τη χρονική, δύναται να έχουμε και χωρική μεταβολή του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ χρησιμοποιείται το σύμβολο της μερικής παραγώγου.
Σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση, αν σε μια περιοχή του χώρου το μαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται χρονικώς, δημιουργείται ηλεκτρικό πεδίο του οποίου σε κάθε σημείο ο στροβιλισμός ισούται με τη χρονική παράγωγο του μαγνητικού πεδίου στο εν λόγω σημείο.

6. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL – ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

6.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL

Ο Maxwell συσχέτισε τους νόμους του ηλεκτρισμού και μαγνητισμού έτσι ώστε να αναπτύξει την ηλεκτρομαγνητική θεωρία, την οποία διατύπωσε υπό τη μορφή μιας ομάδας ολοκληρωτικών ή διαφορικών εξισώσεων, οι οποίες λέγονται **εξισώσεις του Maxwell.**
Οι εξισώσεις αυτές φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα :

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ	ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ
1. $\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_v \rho dV = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0}$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
2. $\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$
3. $\oint_c \vec{B}d\vec{l} = \mu_0\left(I_c + \varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}\right)$	$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$
4. $\oint_c \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

Η πρώτη από τις παραπάνω εξισώσεις είναι ο νόμος του Gauss για τον ηλεκτρισμό η οποία είναι ισοδύναμη με το νόμο του Coulomb.

Η δεύτερη είναι ο νόμος του Gauss για τον μαγνητισμό, σύμφωνα με τον οποίο αποδεικνύεται η μη ύπαρξη απομονωμένων μαγνητικών μονοπόλων στη φύση και το ότι οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές είναι κλειστές.

Η τρίτη εξίσωση είναι ο νόμος του Ampere, στον οποίο έχει ληφθεί υπόψη και το **ρεύμα μετατόπισης I_d** που ορίζεται από τη σχέση:

$$\boxed{I_d = \varepsilon_0\int_S \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}d\vec{S}} \quad \text{ή} \quad \boxed{I_d = \varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}}$$

Το ρεύμα μετατόπισης είναι ένα υποθετικό ρεύμα και εισήχθη από τον Maxwell στο νόμο του Ampere για να αποδείξει την παραγωγή μαγνητικού πεδίου από ένα χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο κατ΄ αντιστοιχία προς το νόμο του Faraday, που είναι η τέταρτη εξίσωση Maxwell, σύμφωνα με τον οποίο χρονική μεταβολή του μαγνητικού πεδίου παράγει ηλεκτρικό πεδίο.

Οι εξισώσεις του Maxwell δίνουν μια πλήρη περιγραφή του τρόπου με τον οποίο σχετίζονται τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ με τις πηγές τους. Οι εξισώσεις αυτές ισχύουν και στο κενό, όπου δεν υπάρχει ρεύμα και φορτίο, δηλαδή $I_c=0$ και $Q_{encl}=0$.

Το πιο αξιοσημείωτο γνώρισμα των εξισώσεων Maxwell είναι ότι η χρονική μεταβολή καθενός από τα δυο πεδία επάγει πεδίο του αλλού τύπου στις γειτονικές περιοχές του χώρου. Συνεπώς οι εξισώσεις Maxwell προβλέπουν την ύπαρξη ηλεκτρομαγνητικών διαταραχών που απαρτίζονται από χρονικά μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία που διαδίδονται από ένα σημείο του χώρου σε άλλο, ακόμη και αν δεν υπάρχει ύλη στον ενδιάμεσο χώρο (κενό). Αυτές οι διαταραχές ονομάζονται **ηλεκτρομαγνητικά κύματα** και παρέχουν τη φυσική βάση για το φως και τα κύματα όλου του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος.