Μεθοδικά, απλά & κατανοητά…

Θέμα

Σωματίδιο μάζας m βρίσκεται σε απειρόβαθο πηγάδι το οποίο βρίσκεται στην περιοχή $-L/2 < x < L/2$. Ο πάτος του πηγαδιού παραμορφώνεται από το δυναμικό

$$V'(x) = \begin{cases} -V_0 \frac{x}{L} & x < 0 \\ +V_0 \frac{x}{L} & x > 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

όπου V_0 θετική σταθερά. Θεωρώντας το δυναμικό ως διαταραχή
(α) Υπολογίστε τη διόρθωση πρώτης τάξης στην ενέργεια της βασικής κατάστασης του συστήματος.
(β) Υπολογίστε τη διόρθωση πρώτης τάξης στην ενέργεια της πρώτης διεγερμένης κατάστασης του συστήματος.
(γ) Εξετάστε την περιοχή τιμών του V_0 για την οποία ισχύει ο ανωτέρω διαταρακτικός υπολογισμός.
(δ) Σχολιάστε κατά πόσο συσχετίζεται η διόρθωση πρώτης τάξης στην ενέργεια με την πάριτη των ιδιοσυναρτήσεων του αδιατάρακτου προβλήματος.

Οι κυματοσυναρτήσεις των ιδιοκαταστάσεων ενός απειρόβαθου πηγαδιού $-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$ είναι $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x - \frac{n\pi}{2}\right)$ $n = 1, 2, \ldots$

και οι ιδιοενέργειές του είναι $E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$

α) Η βασική κατάσταση ($n=1$) του απειρόβαθου αυτού πηγαδιού δίνεται από τη σχέση: $\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi}{L}x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ (1)

Σύμφωνα με τη θεωρία των διαταραχών, η διόρθωση στην ενέργεια πρώτης τάξης της βασικής κατάστασης του συστήματος είναι:

$$E_1^{(1)} = \left(\psi_1(x), V'\psi_1(x)\right) = \int_{-L/2}^{L/2} \psi_1^*(x)\, V'\, \psi_1(x)\, dx \overset{(1)}{=}$$

$$= \int_{-L/2}^{0} \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left(-\frac{V_0}{L}x\right)\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx + \int_{0}^{L/2} \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\frac{V_0}{L}x\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx =$$

$$= -\frac{2V_0}{L^2}\int_{-L/2}^{0} x\cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx + \frac{2V_0}{L^2}\int_{0}^{L/2} x\cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = \frac{2V_0}{L^2}\cdot 2\int_{0}^{L/2} x\cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx =$$

$$= \frac{4V_0}{\cancel{L^2}}\cdot\frac{(\pi^2-4)}{16\pi^2}\cancel{L^2} \longrightarrow \boxed{E_1^{(1)} = \frac{(\pi^2-4)V_0}{4\pi^2}} \quad (2)$$

β) Η 1η διεγερμένη κατάσταση $(n=2)$ του απειρόβαθου αυτού πηγαδιού είναι: $\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi}{L}x - \pi\right) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$ (3)

Άρα η διόρθωση πρώτης τάξης στην ενέργεια της 1ης διεγερμένης κατάστασης του συστήματος είναι:

$$E_2^{(1)} = (\psi_2(x), V'\psi_2(x)) = \int_{-L/2}^{L/2}\psi_2^*(x)\,V'\,\psi_2(x)\,dx \overset{(3)}{=}$$

$$= \int_{-L/2}^{0}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\left(-\frac{V_0}{L}x\right)\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx + \int_{0}^{L/2}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\frac{V_0}{L}x\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx$$

$$= -\frac{2V_0}{L^2}\int_{-L/2}^{0} x\sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx + \frac{2V_0}{L^2}\int_{0}^{L/2} x\sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx =$$

$$= 2\frac{V_0}{L^2}\cdot 2\int_{0}^{L/2} x\sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx = \frac{4V_0}{L^2}\cdot\frac{L^2}{16} \longrightarrow \boxed{E_2^{(1)} = \frac{V_0}{4}}$$

-7-

γ) Για να ισχύει ο ανωτέρω διαταρακτικός υπολογισμός θα πρέπει η διόρθωση πρώτης τάξης της βασικής κατάστασης του συστήματος να είναι πολύ μικρότερη από την ενέργεια της βασικής κατάστασης του αδιατάρακτου συστήματος,

η οποία είναι: $E_1^{(0)} = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$ (4) -14-

Δηλαδή: $E_1^{(1)} << E_1^{(0)} \xrightarrow{(2,4)} \dfrac{(\pi^2-4)V_0}{4\pi^2} << \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \rightarrow$

$$\rightarrow \boxed{V_0 << \frac{2\pi^4\hbar^2}{(\pi^2-4)mL^2}}$$

δ) Η διόρθωση πρώτης τάξης στην ενέργεια συσχετίζεται με την parity των ιδιοσυναρτήσεων του αδιατάρακτου προβλήματος καθώς είναι:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L} - n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & n=1,3,5,\ldots \\ \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & n=2,4,6,\ldots \end{cases}$$

Δηλαδή οι περιττές ιδιοκαταστάσεις $n=1,3,5,\ldots$ έχουν θετική parity (αφού $\psi_n(-x)=\psi_n(x)$), ενώ οι άρτιες ιδιοκαταστάσεις $n=2,4,6,\ldots$ έχουν αρνητική parity (αφού $\psi_n(-x)=-\psi_n(x)$).