

ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ
ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΘΕΜΑ 1

Σε κύλινδρο με έμβολο περιέχεται 1 γραμμάριο ιδανικού αερίου γνωστού γ . Το αέριο το θερμαίνουν πολυτροπικά και η θερμοκρασία του γίνεται T , ενώ η πίεση διπλασιάζεται. Η γραμμομοριακή θερμοχωρητικότητα της διαδικασίας είναι C .

Υπολογίστε α) το ποσό της θερμοκρασίας που προσφέρθηκε στο αέριο, β) το έργο που εκτελέστε το αέριο και γ) τη μεταβολή της εσωτερικής του ενέργειας.

Αφού είναι γνωστό το γ και η θερμοχωρητικότητα C θα είναι γνωστός και ο συντελεστής της πολυτροπικής μεταβολής από τη σχέση:

$$C = \frac{s - \gamma}{(s - 1)(\gamma - 1)} R$$

Παράλληλα, εφόσον έχουμε ιδανικό αέριο και γνωρίζουμε το γ θα είναι γνωστά επίσης και το C_V, C_P από τις σχέσεις:

$$\begin{cases} C_P = C_V + R \\ \gamma = \frac{C_P}{C_V} \end{cases}$$

Σε μία πολυτροπική μεταβολή η χωρητικότητα παραμένει σταθερή και ο νόμος της διαδικασίας θα είναι:

$$PV^s = \text{σταθ.}$$

Άρα, για την συγκεκριμένη διαδικασία θα έχουμε:

$$P_1 V_1^s = (2P_1) V_2^s \Rightarrow V_2 = \frac{V_1}{2^{\frac{1}{s}}} \quad (1)$$

Από την καταστατική εξίσωση του ιδανικού αερίου για 1 mole θα έχουμε

$$PV = RT \Rightarrow \frac{PV}{T} = \text{const} \Rightarrow \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{2P_1 2^{-\frac{1}{s}} V_1}{T} \Rightarrow$$

$$T_1 = \frac{T}{2^{\frac{1}{s}}}$$

α) Από τον ορισμό της θερμοχωρητικότητας θα έχουμε:

$$C = \frac{\delta Q}{dT} \Rightarrow \delta Q = \overset{\text{(σταθερή)}}{C} dT \Rightarrow Q = C(T - T_1) \Rightarrow Q = C \left(T - \frac{T}{2^{\frac{s-1}{s}}} \right) \Rightarrow$$

$$Q = CT \frac{2^{\frac{s-1}{s}} - 1}{2^{\frac{s-1}{s}}}$$

γ) Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας θα είναι:

$$dU = C_v dT \Rightarrow \Delta U = C_v (T - T_1) \Rightarrow \Delta U = C_v T \frac{2^{\frac{s-1}{s}} - 1}{2^{\frac{s-1}{s}}}$$

β) Από τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο έχουμε:

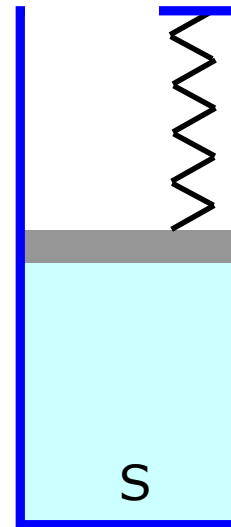
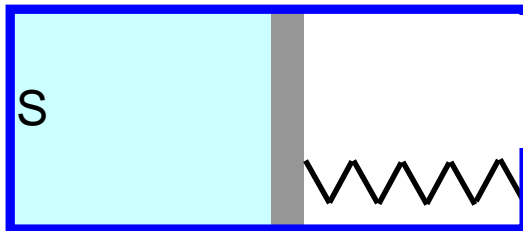
$$\delta Q = dU + \delta W \Rightarrow Q = \Delta U + W \Rightarrow W = Q - \Delta U$$

$$W = CT \frac{2^{\frac{s-1}{s}} - 1}{2^{\frac{s-1}{s}}} - C_v T \frac{2^{\frac{s-1}{s}} - 1}{2^{\frac{s-1}{s}}} = (C - C_v) T \frac{2^{\frac{s-1}{s}} - 1}{2^{\frac{s-1}{s}}}$$

ΘΕΜΑ 2

Ένα γραμμομόριο ιδανικού αερίου το θερμαίνουν σε κύλινδρο με έμβολο, που συγκρατείται στη θέση ισορροπίας από ελατήριο για το οποίο ισχύει ο νόμος Hooke. Τα τοιχώματα του κυλίνδρου και το έμβολο είναι αδιαβατικά. Ο αρχικός όγκος του αερίου V_0 για τον οποίο το ελατήριο δεν έχει παραμορφωθεί είναι τέτοιος, ώστε να ισχύει : $P_0 S^2 = kV_0$, όπου P_0 η εξωτερική ατμοσφαιρική πίεση, Στο εμβαδόν του εμβόλου και k η σταθερά του ελατηρίου. Υπολογίστε τη θερμοχωρητικότητα της διαδικασίας.

Αν το έμβολο είναι αβαρές, τα δύο προβλήματα είναι ισοδύναμα



Η θερμοχωρητικότητα ορίζεται από την σχέση:

$$C = \frac{\delta Q}{dT}$$

Χρησιμοποιώντας τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο για ιδανικό αέριο 1 mole θα έχουμε:

$$C = \frac{C_v dT + PdV}{dT} \Rightarrow C = C_v + P \frac{dV}{dT} \quad (1)$$

Η Καταστατική εξίσωση ιδανικού αερίου 1 mole είναι:

$$PV = RT \Rightarrow PdV + VdP = RdT \quad (2)$$

Ο αρχικός όγκος του αερίου V_0 για τον οποίο το ελατήριο δεν έχει παραμορφωθεί είναι τέτοιος, ώστε να ισχύει :

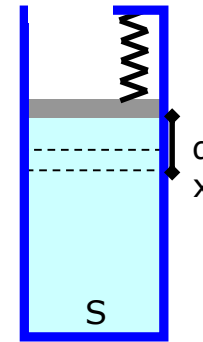
$$P_0 S^2 = kV_0 \quad (3)$$

Αν το έμβολο μετατοπιστεί κατά x , τότε ο όγκος θα γίνει:

$$V = V_0 + Sx \quad (4)$$

Η πίεση του αερίου είναι ίση με την εξωτερική πίεση, που αρχικά είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση. Όταν, όμως το έμβολο μετακινηθεί κατά x θα ασκείται μία δύναμη $F = kx$ στο έμβολο και συνεπώς η πίεση του αερίου θα είναι:

$$dV = Sdx \quad (5)$$



$$P = P_0 + \frac{kx}{S} \quad (6)$$

$$dP = \frac{k}{S} dx \quad (7)$$

ΑΝΤΙΚΑΘΙΣΤΩΝΤΑΣ ΤΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΗΝ (2) ΈΧΟΥΜΕ:

$$PdV + VdP = RdT$$

$$V = V_o + Sx \quad dP = \frac{k}{S} dx$$

(4)

(7)

$$PdV + (V_o + Sx) \frac{k}{S} dx = RdT \Rightarrow PdV + \left(\frac{kV_o}{S^2} + \frac{kx}{S} \right) Sdx = RdT \quad \begin{matrix} P_o S^2 = kV_o \\ \Rightarrow \\ (3) \end{matrix}$$

$$PdV + \left(\frac{P_o S^2}{S^2} + \frac{kx}{S} \right) Sdx = RdT \Rightarrow PdV + \underbrace{\left(P_o + \frac{kx}{S} \right)}_P Sdx = RdT \Rightarrow$$

$$P \frac{dV}{dT} = \frac{R}{2}$$

Άρα, η θερμοχωρητικότητα θα είναι: $C = C_v + P \frac{dV}{dT} = C_v + \frac{R}{2}$

ΘΕΜΑ 3

Ιδανικό αέριο θερμοκρασίας T_0 συμπιέζεται από έμβολο σε κύλινδρο έτσι ώστε η θερμότητα που αποβάλλεται στο περιβάλλον είναι ίση με τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου. **α)** Ποια είναι η εξίσωση της διαδικασίας **β)** Προσδιορίστε το έργο που δαπανάται για τη συμπίεση αερίου όγκου V_0 σε όγκο $V_0/2$. **γ)** Να υπολογιστεί η θερμοχωρητικότητα για την διαδικασία αυτή.

Όταν αποβάλλεται θερμότητα από το σύστημα στο περιβάλλον $\delta Q < 0$, έτσι θα ισχύει:

$$-\delta Q = dU$$

Χρησιμοποιώντας τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο έχουμε:

$$\delta Q = dU + \delta W \quad \xrightarrow{-\delta Q = dU} \quad -dU = dU + \delta W \Rightarrow -2dU = \delta W \quad (1)$$

$$\text{Όμως, } -2dU = \delta W \Rightarrow -2C_v dT = PdV \quad (2)$$

$$\xrightarrow{PV=RT} \Rightarrow \frac{dV}{V} + 2 \frac{C_v}{R} \frac{dT}{T} = 0 \quad \int \Rightarrow \ln V + 2 \frac{C_v}{R} \ln T = \text{const} \Rightarrow \ln \left(VT^{2 \frac{C_v}{R}} \right) = \text{const} \Rightarrow$$

$$VT^{\frac{2C_v}{R}} = \text{const} \quad (3)$$

α) Όμως, για ένα ιδανικό αέριο με i βαθμούς ελευθερίας ισχύει: $C_v = \frac{i}{2}R$

Άρα η διαδικασία θα περιγράφεται από τον νόμο: $V T^i = \text{const}$

β) Και επομένως για την δεδομένη μεταβολή θα ισχύει:

$$V_o T_o^i = V_1 T_1^i \Rightarrow V_o T_o^i = \frac{V_o}{2} T_1^i \Rightarrow T_1^i = 2 T_o^i \Rightarrow T_1 = 2^{\frac{1}{i}} T_o$$

Από την (1) έχουμε: $\delta W = -2dU = -2C_v dT$ άρα,

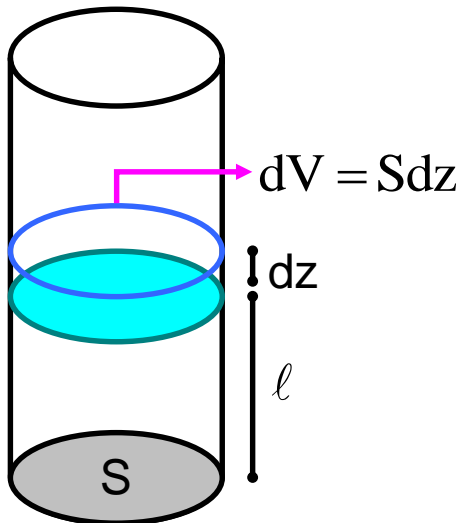
$$W = -2C_v \int_{T_o}^{T_1} dT = -2C_v (T_1 - T_o) = 2C_v (T_o - T_1) = 2C_v T_o (1 - 2^{\frac{1}{i}})$$

γ) Από την σχέση (2) $P \frac{dV}{dT} = -2C_v$ η θερμοχωρητικότητα θα είναι:

$$C = C_v + P \frac{dV}{dT} = -C_v$$

ΘΕΜΑ 4

Σε ένα πολύ υψηλό κατακόρυφο κυλινδρικό δοχείο, κλειστό στο κάτω άκρο του, μπορεί να κινείται χωρίς τριβές έμβολο η μάζα του οποίου M είναι πολύ μεγαλύτερη από τη μάζα του αερίου που περιέχεται στο δοχείο. Στην κατάσταση ισορροπίας η απόσταση ανάμεσα στο έμβολο και στο κάτω άκρο του δοχείου είναι ℓ . Προσδιορίστε την περίοδο των μικρών ταλαντώσεων, που θα εμφανιστούν αν το έμβολο απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας υποθέτοντας ότι είναι ισόθερμες και το αέριο ιδανικό. Το εμβαδόν της διαδρομής του δοχείου είναι S η ατμοσφαιρική πίεση, P_0 . Εξετάστε επίσης την οριακή περίπτωση $P_0 = 0$.



Για να εκτελέσει το έμβολο ταλάντωση πρέπει η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε αυτό να είναι δύναμη επαναφορές, δηλαδή να είναι της μορφής:

$$F = -kz$$

Αν συμβαίνει αυτό, τότε το έμβολο θα εκτελέσει γραμμική αρμονική ταλάντωση με περίοδο:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

Διαφορίζοντας την καταστατική εξίσωση του αερίου και λαμβάνοντας υπόψη ότι η μεταβολή είναι ισόχωρη θα έχουμε:

$$PV = RT \Rightarrow d(PV) = d(RT) \Rightarrow PdV + VdP = R dT \overset{0}{\Rightarrow} PdV + VdP = 0 \quad (1)$$

Η εξωτερική πίεση (ατμοσφαιρική και πίεση που δημιουργεί το έμβολο) θα είναι ίση με την εσωτερική (πίεση αερίου σε κατάσταση ισορροπίας) άρα:

$$P = P_o + \frac{Mg}{S} \quad (2)$$

Ενώ, ισχύει:

$$dP = \frac{dF}{S} \quad (3)$$

Ο αρχικός όγκος του δοχείου είναι:

$$V = S\ell \quad (4)$$

Η μεταβολή του όγκου θα είναι:

$$dV = Sdz \quad (5)$$

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα η σχέση (1) γίνεται διαδοχικά:

$$PdV + VdP = 0 \Rightarrow \left(P_o + \frac{Mg}{S} \right) Sdz + S\ell dP = 0 \Rightarrow \left(P_o + \frac{Mg}{S} \right) dz + \ell dP = 0 \Rightarrow$$

$$dP = -\frac{P_o + \frac{Mg}{S}}{\ell} dz \xrightarrow{dP = \frac{dF}{S}} dF = -\frac{P_o S + Mg}{\ell} dz \Rightarrow F = -\overbrace{\frac{P_o S + Mg}{\ell}}^k z$$

Εφόσον η δύναμη που ασκείται στο έμβολο είναι δύναμη επαναφοράς:

$$F = - \overbrace{\frac{P_0 S + Mg}{\ell}}^k z$$

Θα εκτελέσει γραμμική αρμονική ταλάντωση με περίοδο:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{M\ell}{P_0 S + Mg}}$$

Η περίοδος εξαρτάται από το ύψος που βρίσκεται το έμβολο, τη μάζα του εμβόλου, το εμβαδό διατομής του εμβόλου αλλά και την εξωτερική πίεση.

Στην οριακή περίπτωση όπου η ατμοσφαιρική πίεση είναι 0 $P_0 = 0$, δηλαδή εξωτερικά του δοχείου είναι κενό η περίοδος γίνεται:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

ΘΕΜΑ 5

Λύστε το προηγούμενο πρόβλημα θεωρώντας τις ταλαντώσεις αδιαβατικές.

Στην αδιαβατική μεταβολή ισχύει ο νόμος του Poisson και διαφορίζοντας τον θα έχουμε:

$$PV^\gamma = \text{const} \Rightarrow d(PV^\gamma) = 0 \Rightarrow P\gamma V^{\gamma-1}dV + V^\gamma dP = 0 \Rightarrow dP = -\frac{P}{V}\gamma dV \quad (1)$$

Για τον ίδιο λόγο, όπως την προηγούμενη άσκηση ισχύουν τα εξής:

$$P = P_o + \frac{Mg}{S} \quad (2) \quad dP = \frac{dF}{S} \quad (3) \quad V = S\ell \quad (4) \quad dV = Sdz \quad (5)$$

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα η σχέση (1) γίνεται διαδοχικά:

$$dP = -\frac{P}{V}\gamma dV \Rightarrow \frac{dF}{S} = -\frac{P_o + \frac{Mg}{S}}{S\ell}\gamma Sdz \Rightarrow dF = -\frac{P_o S + Mg}{\ell}\gamma dz$$

Εφόσον η δύναμη που ασκείται στο έμβολο είναι δύναμη επαναφοράς:

$$F = -\frac{\overbrace{(P_0 S + Mg) \gamma}^k}{\ell} z$$

Θα εκτελέσει γραμμική αρμονική ταλάντωση με περίοδο:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{M \ell}{(P_0 S + Mg) \gamma}}$$

Η περίοδος εξαρτάται από το ύψος που βρίσκεται το έμβολο, τη μάζα του εμβόλου, το εμβαδό διατομής του εμβόλου την εξωτερική πίεση, αλλά και τον συντελεστή γ .

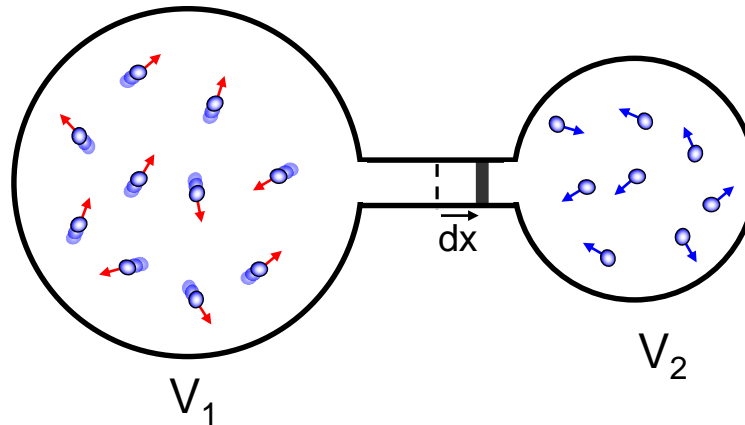
Στην οριακή περίπτωση όπου η ατμοσφαιρική πίεση είναι 0 $P_0 = 0$, δηλαδή εξωτερικά του δοχείου είναι κενό η περίοδος γίνεται:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g\gamma}}$$

Το γ έχει άμεση εξάρτηση από τους βαθμούς ελευθερίας του αερίου, όπου για να αλλάξουν αυτοί πρέπει η μεταβολή της θερμοκρασίας να είναι μεγάλη, έτσι η εξάρτηση του γ από τη T θερμοκρασία δεν αλλοιώνει το αποτέλεσμα που βρήκαμε.

ΘΕΜΑ 6

Δυο δοχεία όγκων V_1 και V_2 είναι γεμάτα με διαφορετικά αέρια και συνδέονται με κυλινδρικό σωλήνα διατομής S . Στο σωλήνα περιέχεται έμβολο μάζας M . Στην κατάσταση ισορροπίας η πίεση και των δύο αερίων είναι P_0 . Υπολογίστε την περίοδο των μικρών ταλαντώσεων, που θα εμφανισθούν, αν το έμβολο απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας, υποθέτοντας ότι οι μεταβολές είναι αδιαβατικές. Δεδομένα είναι οι συντελεστές Poisson για τα δύο αέρια, γ_1 και γ_2 , ο όγκος του σωλήνα είναι μικρός σε σχέση με τα V_1 και V_2 , καθώς δεν υπάρχουν τριβές.



Στην αδιαβατική μεταβολή ισχύει ο νόμος του Poisson και διαφορίζοντας τον θα έχουμε:

$$PV^\gamma = \text{const} \Rightarrow d(PV^\gamma) = 0 \Rightarrow P\gamma V^{\gamma-1}dV + V^\gamma dP = 0 \Rightarrow dP = -\frac{P}{V}\gamma dV \quad (1)$$

Για τα δύο αέρια επομένως θα έχουμε:

$$dP_1 = -\frac{P_1}{V_1}\gamma_1 dV_1 \quad dP_2 = -\frac{P_2}{V_2}\gamma_2 dV_2$$

Όμως, η πίεση αρχικά και στα δύο δοχεία ήταν P_0 άρα $P_1 = P_2 = P_0$.

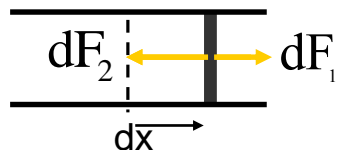
Αν το έμβολο π.χ. μετατοπιστεί δεξιά τότε ο όγκος του δοχείου 1 αυξάνει $dV_1 = Sdx > 0$ ενώ ο όγκος του δοχείου 2 ελαττώνεται $dV_2 = -Sdx < 0$, ενώ ισχύει $dV_1 = -dV_2 = Sdx$. Τελικά θα έχουμε:

$$dP_1 = -P_0 \frac{\gamma_1}{V_1} Sdx \quad dP_2 = P_0 \frac{\gamma_2}{V_2} Sdx$$

Και επειδή $dP = \frac{dF}{S}$ θα έχουμε:

$$dF_1 = -P_0 \frac{\gamma_1}{V_1} S^2 dx \quad dF_2 = P_0 \frac{\gamma_2}{V_2} S^2 dx$$

Η συνισταμένη στοιχειώδης δύναμη που θα δέχεται το έμβολο είναι:



$$dF = dF_1 - dF_2 = -P_o S^2 \left(\frac{\gamma_1}{V_1} + \frac{\gamma_2}{V_2} \right) dx$$

Κατά συνέπεια η δύναμη θα είναι:

$$F = -P_o S^2 \overbrace{\left(\frac{\gamma_1}{V_1} + \frac{\gamma_2}{V_2} \right)}^k x$$

Η δύναμη που ασκείται στο έμβολο είναι δύναμη επαναφοράς, άρα το έμβολο θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση με περίοδο:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{P_o S^2 \left(\frac{\gamma_1}{V_1} + \frac{\gamma_2}{V_2} \right)}}$$

ΘΕΜΑ 7

Σε συγκεκριμένες συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας ένα ποσοστό $w\%$ των μορίων του H_2 διασπώνται σε άτομα H . Αν είναι γνωστές οι θερμοχωρητικότητες του ατομικού και μοριακού υδρογόνου ποια θα είναι η θερμοχωρητικότητα του αερίου;

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ένα μίγμα αερίων.

Επειδή ο αριθμός των moles ν είναι ανάλογος με των αριθμό των μορίων το ποσοστό διάσπασης των μορίων είναι το ίδιο και σε mole.

Αν αρχικά είχαμε 100 moles H_2 επειδή τα w από αυτά διασπώνται θα έχουμε: $2w$ moles ατομικού υδρογόνου H και $100 - w$ moles μοριακού υδρογόνου H_2 .

Η Εσωτερική ενέργεια του συστήματος, όμως, είναι ίση με το άθροισμα τη εσωτερικής ενέργεια των δύο αερίων, άρα:

$$100C_V T = 2wC_V^H T + \frac{100 - w}{100} C_V^{H_2} T \Rightarrow$$

$$C_V = \frac{2w}{100} C_V^H + \frac{100 - w}{100} C_V^{H_2}$$

**ΘΕΜΑ 8**

Ξεκινώντας από τον γενικό θερμοδυναμικό ορισμό της θερμοχωρητικότητας υπολογίστε τις γραμμομοριακές C_p και C_v ιδανικού αερίου με i (εκτός των χωρικών) βαθμούς ελευθερίας.

Αν η εσωτερική ενέργεια εξαρτάται από τις ανεξάρτητες μεταβλητές V και T δηλαδή $U=U(V,T)$ το ολικό διαφορικό της θα είναι :

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV + \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT \quad (1)$$

Άρα η θερμοχωρητικότητα θα είναι

$$\begin{aligned} C &= \frac{\delta Q}{dT} \stackrel{\delta Q = dU + PdV}{=} \frac{dU + PdV}{dT} = \frac{dU}{dT} + P \frac{dV}{dT} \stackrel{(1)}{=} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \frac{dV}{dT} + \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \frac{dT}{dT} + P \frac{dV}{dT} = \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V + \left[P + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right] \frac{dV}{dT} \quad (2) \end{aligned}$$

Όμως $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ και όταν η P είναι σταθερή η (2) γίνεται $C_P = C_V + \left[P + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$

Το ιδανικό αέριο έχει 3 μεταφορικούς βαθμούς ελευθερίας αλλά και άλλους i βαθμούς που δεν είναι χωρικοί σύμφωνα με το θέμα. Άρα, η εσωτερική ενέργεια του αερίου θα είναι:

$$U = \frac{3+i}{2} RT \quad (3)$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{3+i}{2} R \quad (4) \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$$

Από την καταστατική εξίσωση του ιδανικού αερίου για $n = 1$ mole έχουμε:

$$PV = RT \Rightarrow V = \frac{RT}{P} \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{R}{P} \quad (5)$$

Συνδυάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ότι:

$$C_P = C_V + P \left(\frac{dV}{dT}\right)_P = C_V + R = \frac{3+i}{2} R + R = \frac{5+i}{2} R$$