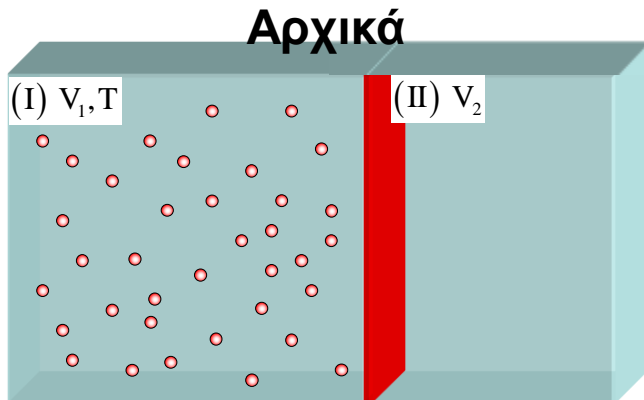


ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

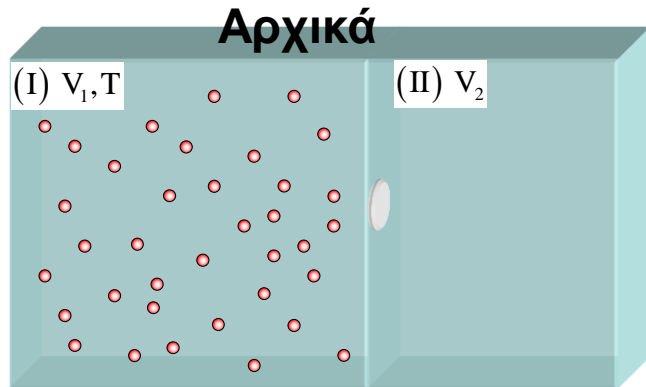
ΑΣΚΗΣΗ 1

Ιδανικό αέριο περιέχεται σε όγκο V_1 δοχείου συνολικού όγκου V με θερμομονωτικά τοιχώματα. Στο υπόλοιπο κομμάτι του δοχείου υπάρχει κενό και οι δύο χώροι χωρίζονται με διάφραγμα.

- α)** Το διάφραγμα αφαιρείται και το αέριο εκτονώνεται για να γεμίσει όλο το δοχείο. Εάν η αρχική θερμοκρασία ήταν T , ποια η τελική θερμοκρασία;
- β)** Μία μικρή οπή ανοίγεται στο τοίχωμα μεταξύ των δύο μερών, επιτρέποντας την διάχυση του αερίου από το ένα μέρος στο άλλο, μέχρι το σύστημα να φτάσει σε ισορροπία. Ποια είναι η τελική θερμοκρασία;



- α)** Η μεταβολή του ιδανικού αερίου είναι αδιαβατική εκτόνωση. ($Q = 0$). Η εσωτερική ενέργεια του συστήματος δεν αλλάζει γιατί δεν υπάρχει παραγωγή έργου και συνεπώς η θερμοκρασία θα παραμείνει σταθερή, άρα η τελική θερμοκρασία είναι T .



β) Όταν ανοιχθεί η οπή το αέριο διαχέεται προς το μέρος που είναι κενό μέχρι οι συγκεντρώσεις να εξισωθούν. Όμοια, κατά την διάρκεια της διαδικασίας, η εσωτερική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή και συνεπώς και η θερμοκρασία.

Προσοχή αυτό συμβαίνει μόνο στα ιδανικά αέρια όπου η εσωτερική ενέργεια του αερίου εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία.

Στις ασκήσεις με τις οπές που κάναμε στο κεφάλαιο 1 ενότητα 4 όπως η άσκηση 4.4 μας έδινε δεδομένο ότι η θερμοκρασία διατηρείται. Εφόσον το δοχείο δεν ανταλλάσει θερμότητα με το περιβάλλον (δηλαδή έχει αδιαβατικά τοιχώματα) για ιδανικό αέριο, είμαστε πλέον σε θέση να εξηγήσουμε γιατί τελικά η θερμοκρασία παραμένει σταθερή και συνεπώς μπορεί να μην είναι δεδομένο αυτό.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Εξετάστε αν αέριο ($\nu = 1 \text{ mole}$) που διαστέλλεται, θερμαίνεται ή ψύχεται και υπολογίστε τη γραμμομοριακή θερμοχωρητικότητα του όταν:

α) $PV^2 = \text{const}$

β) $P^2V = \text{const}$

γ) $P = \alpha V^3$, α σταθερά, δίνεται το C_V (θέμα 21/9/2007)

Αν το αέριο είναι μονοατομικό και οι διαστάσεις των μορίων είναι πολύ μικρότερες με τον όγκο του δοχείου τότε το αέριο μπορεί να θεωρηθεί ιδανικό. Άρα ισχύει:

$$PV = \nu RT \stackrel{\nu=1}{\Rightarrow} PV = RT$$

Η θερμοχωρητικότητα υπολογίζεται από την σχέση:

$$C = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V + \left[P + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right] \frac{dV}{dT}$$

$$C_V$$

$$0 \rightarrow$$

Στην περίπτωση ιδανικού αερίου η εσωτερική ενέργεια έχει εξάρτηση μόνο από την θερμοκρασία.

$$\Rightarrow C = C_V + P \frac{dV}{dT}$$

(1)

$$\alpha) \quad PV^2 = \text{const} \stackrel{PV=RT}{\Rightarrow} TV = \text{const} \quad (2)$$

$$\text{Αφού } TV = \text{const} \Rightarrow d(TV) = 0 \Rightarrow TdV + VdT = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dT} = -\frac{V}{T}$$

$$\frac{\partial(TV)}{\partial V} \quad \frac{\partial(TV)}{\partial T}$$

$$dV > 0 \Rightarrow dT < 0 \text{ ψύξη}$$

Εφόσον το αέριο διαστέλλεται, δηλαδή αυξάνει ο όγκος, θα πρέπει η θερμοκρασία να ελαττώνεται (ψύξη), ώστε πράγματι το γινόμενο TV να είναι σταθερό.

$$\text{Για την θερμοχωρητικότητα θα έχουμε: } C = C_v + P \frac{dV}{dT}$$

$$\text{Άρα } C = C_v + P \frac{dV}{dT} = C_v - P \frac{V}{T} \stackrel{PV=RT}{\Rightarrow} C = C_v - R$$

β) $P^2V = \text{const} \stackrel{PV=RT}{\Rightarrow} \frac{T^2}{V} = \text{const} \quad (3)$

Αφού $\frac{T^2}{V} = \text{const} \Rightarrow d\left(\frac{T^2}{V}\right) = 0 \Rightarrow \underbrace{-\frac{T^2}{V^2}}_{\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{T^2}{V}\right)} dV + \underbrace{\frac{2T}{V}}_{\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{T^2}{V}\right)} dT = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dT} = \frac{2V}{T}$

$dV > 0 \Rightarrow dT > 0$ θέρμανση

Εφόσον το αέριο διαστέλλεται, θα πρέπει η θερμοκρασία επίσης να αυξάνει, ώστε πράγματι να ισχύει η σχέση (3).

Για την θερμοχωρητικότητα θα έχουμε: $C = C_V + P \frac{dV}{dT}$

Άρα $C = C_V + P \frac{dV}{dT} = C_V + 2 \frac{PV}{T} \stackrel{PV=RT}{\Rightarrow} C = C_V + 2R$

$$\gamma) \quad P = \alpha V^3 \Rightarrow \frac{P}{V^3} = \text{const} \stackrel{PV=RT}{\Rightarrow} \frac{T}{V^4} = \text{const} \quad (4)$$

$$\text{Αφού } \frac{T}{V^4} = \text{const} \Rightarrow d\left(\frac{T}{V^4}\right) = 0 \Rightarrow -4 \underbrace{\frac{T}{V^5}}_{\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{T}{V^4}\right)} dV + \underbrace{\frac{1}{V^4}}_{\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{T}{V^4}\right)} dT = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dT} = \frac{V}{4T}$$

$$dV > 0 \Rightarrow dT > 0 \text{ θέρμανση}$$

Εφόσον το αέριο διαστέλλεται, θα πρέπει η θερμοκρασία επίσης να αυξάνει, ώστε πράγματι να ισχύει η σχέση (4).

$$\text{Για την θερμοχωρητικότητα θα έχουμε: } C = C_V + P \frac{dV}{dT}$$

$$\text{Άρα } C = C_V + P \frac{dV}{dT} = C_V + \frac{1}{4} \frac{PV}{T} \stackrel{PV=RT}{\Rightarrow} C = C_V + \frac{1}{4} R$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Εξετάστε αν ιδανικό αέριο ($\nu = 1 \text{ mole}$) που διαστέλλεται, τότε θερμαίνεται και πότε ψύχεται σε μια πολυτροπική διαδικασία για τις διάφορες τιμές του s και υπολογίστε τη γραμμομοριακή θερμοχωρητικότητα.

Στις πολυτροπικές διαδικασίες με χρήση του 1^{ου} θερμοδυναμικού νόμου απαιτώντας η θερμοχωρητικότητα να είναι σταθερή προέκυψε η σχέση:

$$PV^s = \text{const} \stackrel{PV=RT}{\Rightarrow} TV^{s-1} = \text{const}$$

Αφού

$$TV^{s-1} = \text{const} \Rightarrow d(TV^{s-1}) = 0 \Rightarrow \underbrace{(s-1)TV^{s-2}}_{\frac{\partial}{\partial V}(TV^{s-1})} dV + \underbrace{V^{s-1}}_{\frac{\partial}{\partial T}(TV^{s-1})} dT = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dT} = -\frac{V}{T(s-1)}$$

Όταν $s > 1$ $dV > 0 \Rightarrow dT < 0$ ψύξη

Όταν $s < 1$ $dV > 0 \Rightarrow dT > 0$ θέρμανση

Για την θερμοχωρητικότητα θα έχουμε: $C = C_V + P \frac{dV}{dT}$ $\frac{dV}{dT} = -\frac{V}{T(s-1)}$

Άρα $C = C_V - P \frac{V}{T(s-1)} = C_V - \frac{1}{(s-1)} \frac{PV}{T} \xrightarrow{PV=RT} C = C_V - \frac{1}{(s-1)} R$

Για ιδανικό αέριο

$$C = \frac{(s-1)C_V - R}{s-1} = \frac{sC_V - (C_V + R)}{s-1} \stackrel{C_P = C_V + R}{=} \frac{sC_V - C_P}{s-1} \stackrel{\gamma = \frac{C_P}{C_V}}{=} \frac{sC_V - \gamma C_V}{s-1} = \frac{s-\gamma}{s-1} C_V$$

Άρα $C = \frac{s-\gamma}{s-1} C_V$

Επειδή για ιδανικό αέριο ισχύει:

$$\begin{cases} C_P = C_V + R \\ \gamma = \frac{C_P}{C_V} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = C_P - C_V \\ C_P = \gamma C_V \end{cases} \Rightarrow R = (\gamma - 1) C_V \quad \text{Άρα} \quad C = \frac{s-\gamma}{(s-1)(\gamma-1)} R$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Αποδείξτε το Νόμο του Poisson για την αδιαβατική μεταβολή από τον 1^ο θερμοδυναμικό Νόμο.

Στην **αδιάβατη** μεταβολή το αέριο δεν ανταλλάσει θερμότητα με το περιβάλλον του:

$$\delta Q = 0$$

$$\delta Q = dU + \delta W \Rightarrow 0 = \nu C_v dT + PdV \stackrel{PV=\nu RT}{\Rightarrow} \nu C_v dT + \nu \frac{RT}{V} dV = 0$$

$$\frac{dT}{T} + \frac{R}{C_v} \frac{dV}{V} = 0 \stackrel{R=(\gamma-1)C_v}{\Rightarrow} \frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow$$

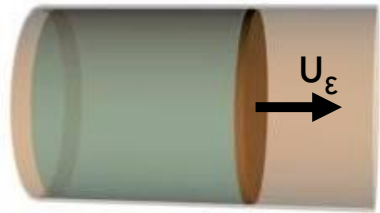
$$\int \frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \int \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow \ln T + (\gamma - 1) \ln V = \text{const} \Rightarrow TV^{\gamma-1} = \text{const} \stackrel{PV=\nu RT}{\Rightarrow}$$

$$PV^\gamma = \text{const}$$

Εξίσωση αδιαβατικής

ΑΣΚΗΣΗ 5

Αποδείξτε το Νόμο του Poisson με χρήση μικροσκοπικών σχέσεων.

Αδιαβατική εκτόνωση

$$\begin{aligned}dP &< 0 \\dT &< 0 \\dV &> 0\end{aligned}$$

Υποθέσεις

Το δοχείο είναι θερμικά μονωμένο και επομένως δεν υπάρχει ανταλλαγή θερμότητας με το περιβάλλον.

Υπό την επίδραση των μορίων το έμβολο κινείται με ταχύτητα u_ϵ ($u_\epsilon \rightarrow 0$). Για να διασφαλίσουμε ότι η μεταβολή.

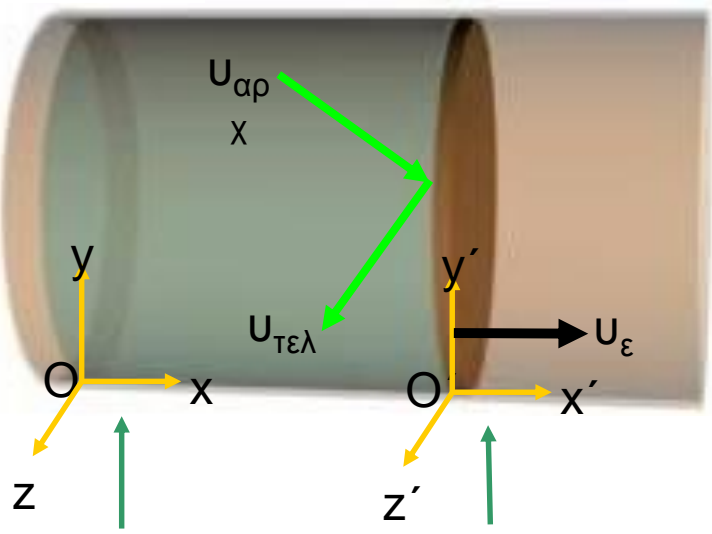
Οι κρούσεις των μορίων είναι ελαστικές με τα τοιχώματα του δοχείου.

Αιτιολογία

\Rightarrow Για να χαρακτηριστεί η μεταβολή αδιαβατική.

\Rightarrow Υπό την επίδραση των μορίων το έμβολο κινείται με ταχύτητα u_ϵ ($u_\epsilon \rightarrow 0$). Για να διασφαλίσουμε ότι η μεταβολή είναι αντιστρεπτή.

\Rightarrow Ιδανικό αέριο



$$\left. \begin{array}{l} \text{Σύστημα } O : \vec{v}_{\alpha\rho\chi} \rightarrow \vec{v}_{\tau\epsilon\lambda} \\ \text{Σύστημα } O' : \vec{v}'_{\alpha\rho\chi} \rightarrow \vec{v}'_{\tau\epsilon\lambda} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v}_{\alpha\rho\chi} = \vec{v}_{\epsilon} + \vec{v}'_{\alpha\rho\chi} \\ \vec{v}_{\tau\epsilon\lambda} = \vec{v}_{\epsilon} + \vec{v}'_{\tau\epsilon\lambda} \end{array} \right\}$$

Στις συνιστώσες μπορούν να γραφούν:

$$\begin{array}{lll} v_{\alpha\rho\chi,x} = v_{\epsilon} + v'_{\alpha\rho\chi,x} & v_{\alpha\rho\chi,y} = v'_{\alpha\rho\chi,y} & v_{\alpha\rho\chi,z} = v'_{\alpha\rho\chi,z} \\ v_{\tau\epsilon\lambda,x} = v_{\epsilon} + v'_{\tau\epsilon\lambda,x} & v_{\tau\epsilon\lambda,y} = v'_{\tau\epsilon\lambda,y} & v_{\tau\epsilon\lambda,z} = v'_{\tau\epsilon\lambda,z} \end{array}$$

Ακίνητο σύστημα Σύστημα κινούμενο
Με σταθερή ταχύτητα v_{ϵ}

Λόγω συμμετρίας μας
ενδιαφέρει μόνο ο x άξονας.

Επειδή η κρούση είναι η ελαστική από
Α.Δ.Ο προκύπτει στο σύστημα O' :

$$v'_{\tau\epsilon\lambda,x} = -v'_{\alpha\rho\chi,x}$$

Άρα θα έχουμε

$$v_{\tau\epsilon\lambda,x} = v_{\epsilon} + v'_{\tau\epsilon\lambda,x} = v_{\epsilon} - v'_{\alpha\rho\chi,x} = 2v_{\epsilon} - v_{\alpha\rho\chi,x}$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας κάθε μορίου με την κρούση του στα τοιχώματα του δοχείου θα είναι:

$$\begin{aligned}\Delta K &= \frac{1}{2} m v_{\text{τελ},x}^2 - \frac{1}{2} m v_{\text{αρχ},x}^2 = \frac{1}{2} m (2v_{\varepsilon} - v_{\text{αρχ},x})^2 - \frac{1}{2} m v_{\text{αρχ},x}^2 = \\ &= \frac{1}{2} m (2v_{\varepsilon}^2 + v_{\text{αρχ},x}^2 - 4v_{\varepsilon} v_{\text{αρχ},x}) - \frac{1}{2} m v_{\text{αρχ},x}^2 = \\ &\quad \downarrow \\ &\approx 0 \text{ αφού } (v_{\varepsilon} \rightarrow 0) \\ &\cong -2m v_{\varepsilon} v_{\text{αρχ},x}\end{aligned}$$

$$v_{\text{αρχ},x} = v_x^+$$

Στο ιδανικό αέριο η ενέργεια είναι ίση με την κινητική ενέργεια των μορίων και επομένως για 1 μόριο θα έχουμε:

$$dE_1 = -2m v_{\varepsilon} v_x^+$$

Ο αριθμός των σωματιδίων που συγκρούονται με το έμβολο μέσα σε χρόνο dt είναι:

$$dN = n S v_x^+ dt$$

$$\text{Συγκέντρωση } n = N/V$$

Άρα η ενέργεια που χάνεται θα είναι:

$$dE = -2m v_{\varepsilon} v_x^+ n S v_x^+ dt = -2mn \underbrace{(S v_{\varepsilon} dt)}_{dx} (v_x^+)^2 = -2mndV (v_x^+)^2$$

dx : μετατόπιση εμβόλου

dV : μεταβολή όγκου του δοχείου

Η μέση ενέργεια που χάνεται θα είναι ίση με την μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου και επομένως:

$$dU = -2mndV \langle v_x^{+2} \rangle$$

όμως

$$\langle v_x^{+2} \rangle = \int_0^{+\infty} v_x^2 f(v_x) dv_x = \frac{\langle v_x^2 \rangle}{2} = \frac{kT}{2m}$$

Και επομένως:

$$dU = -nkTdV = -NkT \frac{dV}{V} \quad (1)$$

Για ένα ιδανικό αέριο με i βαθμούς ελευθερίας η εσωτερική ενέργεια από το θεώρημα ισοκατανομής της ενέργειας θα ισούται με:

$$U = iN \frac{kT}{2} \Rightarrow dU = iN \frac{k}{2} dT \quad (2)$$

Άρα από (1) και (2) προκύπτει: $iN \frac{k}{2} dT = -NkT \frac{dV}{V} \Rightarrow \frac{i}{2} \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} = 0$

επειδή $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i} \Rightarrow \gamma - 1 = \frac{2}{i} \Rightarrow \frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0$

Ολοκληρώνοντας την προηγούμενη σχέση έχουμε

$$\ln T + (\gamma - 1) \ln V = \text{const}_1 \Rightarrow \ln TV^{\gamma-1} = \text{const}_1 \Rightarrow TV^{\gamma-1} = \text{const} \stackrel{PV=vRT}{\Rightarrow}$$

$$PV^\gamma = \text{const}$$

Εξίσωση Poisson

ΑΣΚΗΣΗ 6

Η κατάσταση ιδανικού αερίου μεταβάλλεται σύμφωνα με το νόμο $P = \lambda V$ με λ σταθερά. Αν ο όγκος του αερίου ήταν V_0 γίνει kV_0 υπολογίστε

(α) την αύξηση της εσωτερικής ενέργειας ΔU

(β) το έργο W που εκτελεί το αέριο

(γ) και την θερμοχωρητικότητα

Θεωρείστε C_v και R δεδομένα.

$$P = \lambda V \stackrel{PV = \nu RT}{\Rightarrow} T = \frac{\lambda}{\nu R} V^2 \Rightarrow dT = \frac{2\lambda}{\nu R} V dV$$

Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας είναι:

$$dU = \nu C_v dT = \nu C_v \frac{2\lambda}{\nu R} V dV = 2\lambda \frac{C_v}{R} V dV \stackrel{C_v = \frac{R}{\gamma-1}}{=} \frac{2\lambda}{\gamma-1} V dV$$

Άρα,

$$\Delta U = \frac{2\lambda}{\gamma-1} \int_{V_0}^{kV_0} V dV = \frac{\lambda}{\gamma-1} V^2 \Big|_{V_0}^{kV_0} = \frac{\lambda V_0^2}{\gamma-1} (k^2 - 1)$$

Το απειροστό έργο θα είναι:

$$\delta W = PdV = \lambda VdV \Rightarrow$$

$$W = \lambda \int_{V_0}^{kV_0} VdV = \frac{\lambda V_0^2}{2} (k^2 - 1)$$

Για την θερμοχωρητικότητα θα έχουμε: $C = C_V + P \frac{dV}{dT}$

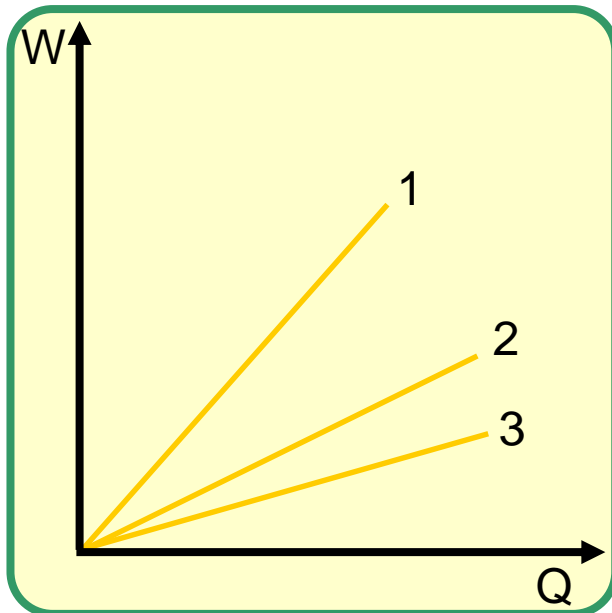
Όμως δείξαμε ότι: $dT = \frac{2\lambda}{\nu R} VdV \Rightarrow P \frac{dV}{dT} = P \frac{\nu R}{2\lambda V} \stackrel{P=\lambda V}{=} \nu \frac{R}{2}$

Άρα θα έχουμε:

$$C = C_V + \nu \frac{R}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Στο επόμενο διάγραμμα θερμότητας Q – έργου W οι κλίμακες για το έργο και την θερμότητα είναι οι ίδιες. Οι τρεις ευθείες αντιστοιχούν σε μια ισόθερμη και σε δυο ισοβαρείς διαδικασίες ενός ιδανικού αερίου. Να βρεθεί σε ποια διαδικασία αντιστοιχεί η κάθε ευθεία καθώς και οι ατομικότητες για τις δυο ισοβαρείς διαδικασίες. Να υποθέσετε ότι όλες οι διαδικασίες πραγματοποιούνται σε θερμοκρασίες δωματίου. Η γωνία που σχηματίζει η καμπύλη (1) με τον άξονα Q είναι 45° , ενώ οι αντίστοιχες γωνίες για τις καμπύλες (2) και (3) είναι 21.08° και 13.98° αντίστοιχα.



Στην ισόθερμη μεταβολή, προκύπτει από τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο ότι $Q = W$. Επομένως η καμπύλη 1 αντιστοιχεί σε ισόθερμη μεταβολή.

Στις ισοβαρείς μεταβολές ισχύει $\delta Q = \nu C_p dT$, $\delta W = PdV = \nu R dT$, επομένως στο διάγραμμα $W - Q$ θα έχουμε ότι:

$$\tan \theta = \frac{\delta W}{\delta Q} = \frac{R}{C_p} \stackrel{C_p = R \frac{i+2}{2}}{\Rightarrow} \tan \theta = \frac{2}{i+2}$$

Για $\theta = 21.8^\circ$ προκύπτει $\tan\theta = 0.4$ που αντιστοιχεί σε $i = 3$. Άρα, η καμπύλη 2 αντιστοιχεί σε ισοβαρή μεταβολή μονοατομικού ιδανικού αερίου.

Για $\theta = 17.4^\circ$ προκύπτει $\tan\theta = 0.249$ που αντιστοιχεί σε $i = 6$. Για θερμοκρασίες δωματίου οι ταλαντωτικοί βαθμοί ελευθερίας δεν είναι διεγερμένοι, αυτό έχει ως αποτέλεσμα για τόσους πολλούς βαθμούς ελευθερίας σε τέτοιες θερμοκρασίες, η καμπύλη 3 να περιγράφει πολυατομικό αερίου καθώς έχει περισσότερους από δύο περιστροφικούς βαθμούς ελευθερίας.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΦΥΣΙΚΗΣ | Π.Φ. ΜΟΙΡΑ

☎ 6932 946778

www.pmoiras.weebly.com