☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΡΜΙΚΗ ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΤΑ
ΘΕΩΡΙΑ & ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Περιεχόμενα

1. Φαινόμενα μεταφοράς στα αέρια

Έστω G η ποσότητα που χαρακτηρίζει την ιδιότητα ενός μορίου (π.χ. θερμότητα, ορμή,…) αποδεικνύεται ότι η πυκνότητα ροής της ποσότητας G ($I_G = dG/(Sdt)$) για τα αέρια είναι:

$$\boxed{\underbrace{\frac{1}{S}\frac{\partial G}{\partial t}}_{I_G} = -\frac{1}{3}n\langle\upsilon\rangle\langle\ell\rangle\frac{\partial G}{\partial x}}$$

Γενικευμένη σχέση πυκνότητας ροής για τα αέρια

Όπου n η συγκέντρωση των μορίων

$\langle\upsilon\rangle = \sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m}}$ η μέση ταχύτητα των μορίων

$\langle\ell\rangle$ η μέση ελεύθερη διαδρομή

Από τη σχέση αυτή προκύπτει τόσο η εξίσωση διάδοσης της θερμότητας, όσο η εξίσωση για το ιξώδες και τη διάχυση.

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

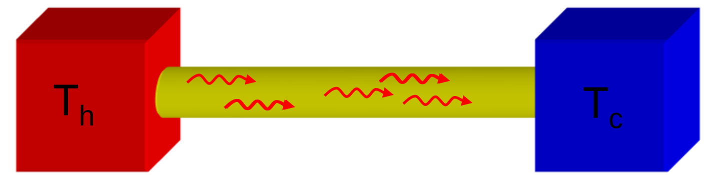
2. Μηχανισμοί διάδοσης θερμότητας

Θερμικοί μονωτές είναι τα σώματα που εμποδίζουν τη διάδοση θερμότητας ανάμεσα σε δύο σώματα με διαφορετικές θερμοκρασίας, ενώ οι θερμικοί αγωγοί την επιτρέπουν.

Οι βασικοί μηχανισμοί διάδοσης θερμότητας είναι με:

αγωγή

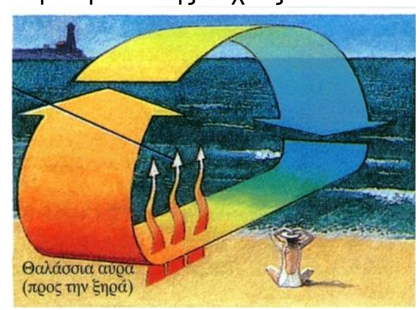
Η αγωγή είναι η διαδικασία μεταφοράς ενέργειας μεταξύ δυο σημείων ή περιοχών ενός υλικού, που βρίσκονται σε διαφορετική θερμοκρασία.



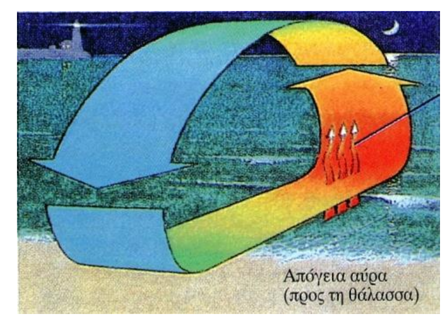
μεταφορά

Μεταφορά είναι η διάδοση θερμότητας λόγω μετακίνησης της μάζας ενός ρευστού από μια περιοχή του χώρου σε μια άλλη.

Τα ατμοσφαιρικά ρεύματα μεταφοράς δημιουργούν στις παραθαλάσσιες περιοχές τη θαλάσσια αύρα στη διάρκεια της ημέρας και την απόγεια αύρα στη διάρκεια της νύχτας



Το νερό είναι θερμότερο από την ξηρά.



Η ξηρά είναι θερμότερη από το νερό.

ακτινοβολία

Είναι η διάδοση θερμότητας μέσο ακτινοβολίας και δεν προϋποθέτει παρουσία ύλης στο χώρο ανάμεσα στα σώματα.

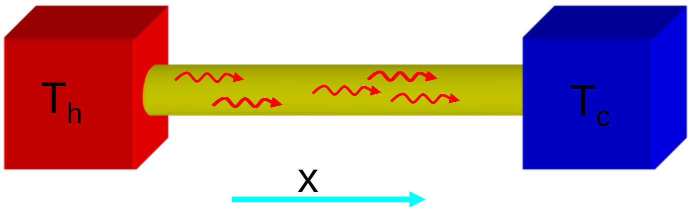
Παρατήρηση

Διάδοση θερμότητας μπορεί να γίνει μόνο μεταξύ περιοχών με διαφορετικές θερμοκρασίες και η κατεύθυνση της ροής είναι πάντοτε από τις περιοχές υψηλής θερμοκρασίας προς τις περιοχές χαμηλής θερμοκρασίας.

Εκπομπή θερμικής ενέργειας μέσω ακτινοβολίας από μια οικία

3. Διάδοση θερμότητας με αγωγή

Από τη γενικευμένη σχέση της πυκνότητας ροής για τα αέρια αν λάβουμε ότι η ποσότητα G είναι η μέση ενέργεια που αντιστοιχεί σε ένα μόριο τότε προκύπτει η εξίσωση της θερμικής αγωγιμότητας.



$$\frac{1}{S}\frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{1}{3} n \langle \upsilon \rangle \langle \ell \rangle \frac{\partial G}{\partial x} \xRightarrow{G=Q} \boxed{\frac{1}{S}\frac{\partial Q}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}}$$

Στο σχήμα βλέπουμε μία θερμικά αγώγιμη ράβδος μήκους ℓ και εμβαδού διατομής S. Θεωρούμε ότι η παράπλευρη επιφάνεια της ράβδους είναι θερμικά μονωμένη με κατάλληλο υλικό, ώστε να μην υπάρχει διάδοση θερμότητας από τα πλάγια. Το αριστερό άκρο της ράβδου διατηρείται σε θερμοκρασία T_h ενώ το δεξί σε χαμηλότερη θερμοκρασία T_c. Η διάδοση θερμότητας γίνεται κατά μήκος του άξονα x και θα ισχύει γενικά:

$$\frac{1}{S}\frac{\partial Q}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

Εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας (Fourier)

Το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει ότι η θερμότητα ρέει πάντοτε προς την κατεύθυνση που ελαττώνεται η θερμοκρασία.

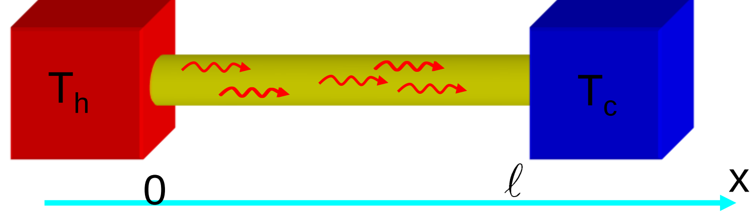
Ονομασίες

$I_Q = \frac{1}{S}\frac{\partial Q}{\partial t}$ Πυκνότητα ροής θερμότητας

$q = \frac{\partial Q}{\partial t}$ ροή θερμότητας (q ή H) ή θερμικό ρεύμα

λ συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας [W/m·K]

$\frac{\partial T}{\partial x}$ θερμοβαθμίδα



Όταν η θερμοκρασία κατά μήκος της θερμικά αγώγιμή ράβδου μεταβάλλεται με ομοιόμορφο τρόπο και θεωρώντας τη θερμική αγωγιμότητα ανεξάρτητη της θερμοκρασίας τότε

$$\frac{1}{S}\frac{\partial Q}{\partial t}=-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\Rightarrow \quad q=-\lambda S\frac{dT}{dx}\Rightarrow qdx=-\lambda SdT\Rightarrow$$

$$q\int_0^{\ell}dx=-\lambda S\int_{T_H}^{T_C}dT\Rightarrow \quad q\ell=-\lambda S\left(T_C-T_H\right)\Rightarrow \frac{1}{S}\frac{\partial Q}{\partial t}=\lambda\frac{T_H-T_C}{\ell}$$

Με άλλα λόγια η εξίσωση της θερμικής αγωγιμότητας σε αυτή την περίπτωση

$$\boxed{\frac{1}{S}\frac{\partial Q}{\partial t}=-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}} \xrightarrow{\text{γίνεται}} \boxed{\frac{1}{S}\frac{\partial Q}{\partial t}=\lambda\frac{T_H-T_C}{\ell}}$$

$$-\frac{\partial T}{\partial x} \qquad\qquad \frac{T_H-T_C}{\ell}$$

Παρατήρηση

Μόνιμη ή στάσιμη κατάσταση ονομάζουμε την κατάσταση όπου η θερμοκρασία παραμένει σταθερή σε κάθε σημείο της ράβδου dT/dt = 0 με αποτέλεσμα η ροή θερμότητας dQ/dt να είναι σταθερή.

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

4. Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 1

Η γενική εξίσωση των φαινομένων μεταφοράς στα αέρια έχει τη μορφή:

$$I_G = -\frac{1}{3} n \langle \upsilon \rangle \langle \ell \rangle \frac{\partial G}{\partial x}$$

Εφαρμόστε την για την περίπτωση της θερμικής αγωγιμότητας.

Στην περίπτωση της θερμικής αγωγιμότητας η ποσότητα G θα είναι η μέση ενέργεια που αντιστοιχεί σε ένα μόριο. Άρα:

$$G = \frac{i}{2} kT \overset{k=\frac{R}{N_A}}{=} \frac{i}{2} \frac{R}{N_A} T \overset{C_V = \frac{i}{2} R}{=} \frac{C_V}{N_A} T$$

Η εξίσωση μεταφοράς γίνεται: $I_Q = -\frac{1}{3} n \langle \upsilon \rangle \langle \ell \rangle \frac{C_V}{N_A} \frac{\partial T}{\partial x}$

Όπου $I_Q = \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial t}$ η πυκνότητα ροής της θερμότητας

$\lambda = \frac{1}{3} n \langle \upsilon \rangle \langle \ell \rangle \frac{C_V}{N_A}$ ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας $\lambda \propto \langle \upsilon \rangle \propto \sqrt{T}$

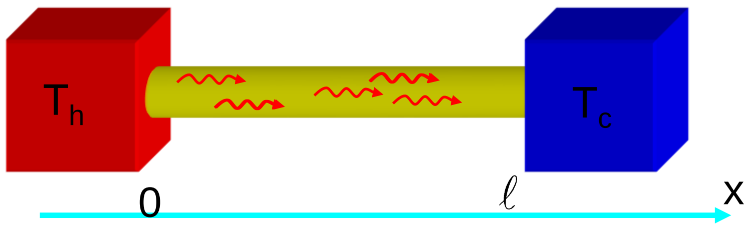
συγκέντρωση μέση ταχύτητα μέση ελεύθερη διαδρομή

Και τελικά η εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας γράφεται

$$\frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ράβδος μήκους ℓ και εμβαδού διατομής S έχει το αριστερό της άκρο σε θερμοκρασία T_h και το δεξί της σε θερμοκρασία T_c ($T_c < T_h$). Να βρεθεί η θερμοκρασία της ράβδου και η ροή θερμότητας ανά μονάδα χρόνου.



Σε στάσιμη κατάσταση (T_c, T_h σταθερές) η ροή θερμότητας (ανά μονάδα χρόνου) q = dQ/dt είναι σταθερή (q = const).

Η εξίσωση της θερμικής αγωγιμότητας είναι: $$\frac{1}{S}\frac{\partial Q}{\partial t} = -\lambda\frac{dT}{dx} \Rightarrow q\,dx = -\lambda S\,dT$$

Ολοκληρώνοντας από 0 έως ℓ προκύπτει η ροή της θερμότητας (ανά μονάδα χρόνου):

$$q\int_0^{\ell} dx = -\lambda S\int_{T_h}^{T_c} dT \Rightarrow q\ell = -\lambda S\left(T_c - T_h\right) \Rightarrow q = \lambda S\frac{T_h - T_c}{\ell} \quad (1)$$

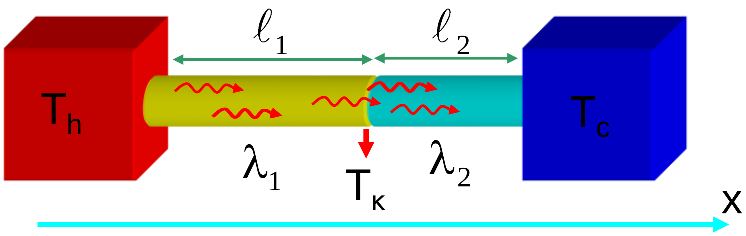
Αν η θερμοκρασία του αγωγού είναι T σε απόσταση x από την αρχή 0 τότε ολοκληρώνοντας από 0 έως x θα προκύψει η θερμοκρασία της ράβδου συναρτήσει της απόστασης:

$$q\int_0^{x} dx = -\lambda S\int_{T_h}^{T} dT \Rightarrow qx = -\lambda S\left(T - T_h\right) \Rightarrow T - T_h = -\frac{q}{\lambda S}x \overset{(1)}{\Rightarrow} T - T_h = -\frac{T_h - T_c}{\ell}x \Rightarrow$$

$$T\left(x\right) = T_h - \frac{T_h - T_c}{\ell}x$$

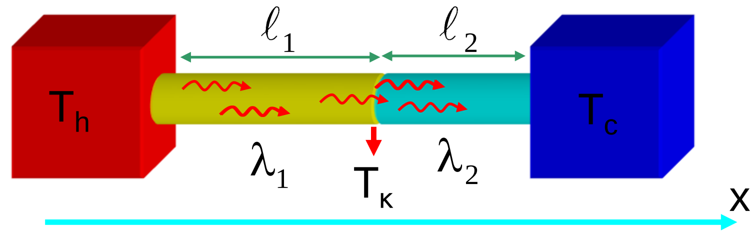
ΑΣΚΗΣΗ 3

Το ένα άκρο θερμικά μονωμένης ράβδου στην παράπλευρη επιφάνεια της διατηρείται σε θερμοκρασία T_h και το άλλο σε θερμοκρασία T_c ($T_c < T_h$). Η ράβδος αποτελείται από δύο κομμάτια με μήκη ℓ_1 και ℓ_2 και συντελεστές θερμικής αγωγιμότητας λ_1 και λ_2. Υπολογίστε τη θερμοκρασία στην επαφή των δύο κομματιών.



Η κατάσταση είναι στάσιμη, αφού η ράβδος είναι θερμικά μονωμένη και οι θερμοκρασίες στα άκρα της είναι σταθερές. Άρα η θερμοκρασία σε κάθε σημείο της ράβδου θα είναι σταθερή (ως προς το χρόνο) με αποτέλεσμα και η ροή θερμότητας q να είναι σταθερή. Στη στάσιμη κατάσταση το ίδιο ποσό θερμότητας που περνάει από το ένα σώμα πρέπει να περάσει και από το άλλο διαδοχικά επομένως η ροή της θερμότητας q να είναι η ίδια και στα δύο σώματα.

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t} = \frac{\partial Q_2}{\partial t} = \text{const} \quad \Rightarrow q_1 = q_2$$



Η εξίσωση της θερμικής αγωγιμότητας είναι: $\frac{1}{S}\frac{\partial Q}{\partial t} = -\lambda\frac{dT}{dx} \Rightarrow qdx = -\lambda S dT$

Για τη 1η ράβδο έχουμε:

$$q_1\int_0^{\ell_1} dx = -\lambda_1 S\int_{T_h}^{T_\kappa} dT \Rightarrow q_1\ell_1 = -\lambda_1 S\left(T_\kappa - T_h\right) \Rightarrow q_1 = \lambda_1 S\frac{T_h - T_\kappa}{\ell_1} \qquad (1)$$

Για τη 2η ράβδο έχουμε:

$$q_2\int_0^{\ell_2} dx = -\lambda_2 S\int_{T_\kappa}^{T_c} dT \Rightarrow q_2\ell_2 = -\lambda_2 S\left(T_c - T_\kappa\right) \Rightarrow q_2 = \lambda_2 S\frac{T_\kappa - T_c}{\ell_2} \qquad (2)$$

Αφού $q_1 = q_2 \Rightarrow \lambda_1 S\frac{T_h - T_\kappa}{\ell_1} = \lambda_2 S\frac{T_\kappa - T_c}{\ell_2} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\ell_1}T_h - \frac{\lambda_1}{\ell_1}T_\kappa = \frac{\lambda_2}{\ell_2}T_\kappa - \frac{\lambda_2}{\ell_2}T_c \Rightarrow$

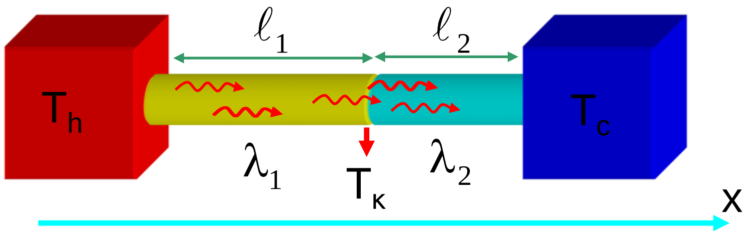
$$\frac{\lambda_1}{\ell_1}T_h + \frac{\lambda_2}{\ell_2}T_c = \frac{\lambda_2}{\ell_2}T_\kappa + \frac{\lambda_1}{\ell_1}T_\kappa \Rightarrow \boxed{T_\kappa = \frac{\frac{\lambda_1}{\ell_1}T_h + \frac{\lambda_2}{\ell_2}T_c}{\frac{\lambda_2}{\ell_2} + \frac{\lambda_1}{\ell_1}}}$$

όπου αυτή είναι η θερμοκρασία στο σημείο επαφής των δύο κομματιών της ράβδου.

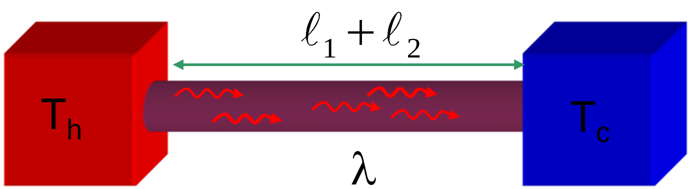
☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Επιπλέον ερώτημα

β) Να υπολογιστεί ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας ομογενής ράβδου μήκους $\ell_1 + \ell_2$ που μεταφέρει θερμότητα όπως το σύστημα των δύο ράβδων.



Η ροή θερμότητας είναι ανεξάρτητη του χρόνου και ίδια στις 3 περιπτώσεις.



$$q_1 = q_2 = q_3 \Rightarrow \begin{cases} q_1 = q_2 & (1) \\ q_1 = q_3 & (2) \end{cases}$$

Από την (1) ισότητα με κατάλληλες ολοκληρώσεις προέκυψε η θερμοκρασία στην επαφή των δύο κομματιών. Από την (2) ισότητα θα προκύψει ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας της ομογενής ράβδου.

$$q_3 \int_0^{\ell_1+\ell_2} dx = -\lambda S \int_{T_h}^{T_c} dT \Rightarrow q_3(\ell_1 + \ell_2) = -\lambda_3 S(T_c - T_h) \Rightarrow q_3 = \lambda S \frac{T_h - T_c}{\ell_1 + \ell_2}$$

Έχουμε βρει

$$q_1 = \lambda_1 S \frac{T_h - T_\kappa}{\ell_1} \qquad q_3 = \lambda S \frac{T_h - T_c}{\ell_1 + \ell_2} \qquad T_\kappa = \frac{\frac{\lambda_1}{\ell_1} T_h + \frac{\lambda_2}{\ell_2} T_c}{\frac{\lambda_2}{\ell_2} + \frac{\lambda_1}{\ell_1}}$$

Αφού $q_1 = q_3$ έχουμε:

$$q_1 = q_3 \Rightarrow \lambda_1 S \frac{T_h - T_\kappa}{\ell_1} = \lambda S \frac{T_h - T_c}{\ell_1 + \ell_2} \Rightarrow \lambda_1 \frac{T_h - T_\kappa}{\ell_1} = \lambda \frac{T_h - T_c}{\ell_1 + \ell_2} \qquad (*)$$

Αντικαθιστώντας την T_κ και λύνοντας ως προς λ βρίσκουμε

$$\lambda = \frac{\ell_1 + \ell_2}{\frac{\ell_1}{\lambda_1} + \frac{\ell_2}{\lambda_2}}$$

Οι πράξεις που παραλείψαμε φαίνονται στην επόμενη διαφάνεια

$$(*)\Rightarrow\ T_h - T_\kappa = \ell_1 \frac{\lambda}{\lambda_1}\frac{T_h - T_c}{\ell_1+\ell_2} \Rightarrow T_h - \frac{\frac{\lambda_1}{\ell_1}T_h + \frac{\lambda_2}{\ell_2}T_c}{\frac{\lambda_2}{\ell_2}+\frac{\lambda_1}{\ell_1}} = \ell_1 \frac{\lambda}{\lambda_1}\frac{T_h - T_c}{\ell_1+\ell_2}\Rightarrow$$

$$T_h\left(\frac{\lambda_2}{\ell_2}+\frac{\lambda_1}{\ell_1}\right) - \frac{\lambda_1}{\ell_1}T_h - \frac{\lambda_2}{\ell_2}T_c = \ell_1 \frac{\lambda}{\lambda_1}\frac{T_h - T_c}{\ell_1+\ell_2}\left(\frac{\lambda_2}{\ell_2}+\frac{\lambda_1}{\ell_1}\right)\Rightarrow$$

$$T_h\frac{\lambda_2}{\ell_2} + T_h\frac{\lambda_1}{\ell_1} - \frac{\lambda_1}{\ell_1}T_h - \frac{\lambda_2}{\ell_2}T_c = \ell_1 \frac{\lambda}{\lambda_1}\frac{T_h - T_c}{\ell_1+\ell_2}\left(\frac{\lambda_2}{\ell_2}+\frac{\lambda_1}{\ell_1}\right)\Rightarrow \frac{\lambda_2}{\ell_2}\left(T_h - T_c\right) = \ell_1 \frac{\lambda}{\lambda_1}\frac{T_h - T_c}{\ell_1+\ell_2}\left(\frac{\lambda_2}{\ell_2}+\frac{\lambda_1}{\ell_1}\right)\Rightarrow$$

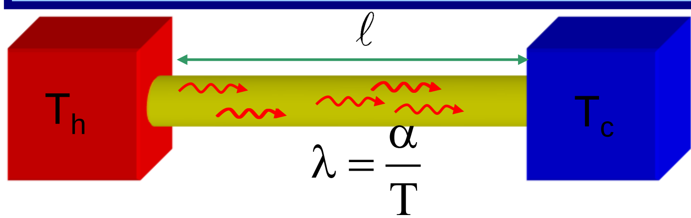
$$\frac{\lambda_2}{\ell_2} = \ell_1\frac{\lambda}{\lambda_1}\frac{1}{\ell_1+\ell_2}\left(\frac{\lambda_2}{\ell_2}+\frac{\lambda_1}{\ell_1}\right)\Rightarrow \frac{\lambda_2\lambda_1}{\ell_2\ell_1}\left(\ell_1+\ell_2\right) = \lambda\left(\frac{\lambda_2}{\ell_2}+\frac{\lambda_1}{\ell_1}\right)\Rightarrow \lambda = \frac{\lambda_2\lambda_1}{\ell_2\ell_1}\frac{\ell_1+\ell_2}{\frac{\lambda_2}{\ell_2}+\frac{\lambda_1}{\ell_1}} = \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{\ell_1+\ell_2}{\frac{\ell_1}{\lambda_1}+\frac{\ell_2}{\lambda_2}}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 4

Ράβδος μήκους ℓ, με θερμικά μονωμένη παράπλευρη επιφάνεια, αποτελείται από υλικό, ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας του οποίου είναι λ = α/T, όπου α σταθερά. Τα άκρα της ράβδου διατηρούνται σε θερμοκρασίες T_h και T_c. Υπολογίστε την θερμοκρασία T συναρτήσει της απόστασης x (από το άκρο με θερμοκρασία T_h), καθώς και τη πυκνότητα ροής της θερμότητας.



Στη στάσιμη κατάσταση η ροή θερμότητας θα είναι σταθερή q = dQ/dt.

Η εξίσωση της θερμικής αγωγιμότητας είναι: $\dfrac{1}{S}\dfrac{\partial Q}{\partial t} = -\lambda\dfrac{dT}{dx} \Rightarrow q\,dx = -\alpha S\dfrac{dT}{T}$

Ολοκληρώνοντας από 0 έως ℓ προκύπτει η ροή της θερμότητας (ανά μονάδα χρόνου):

$$q\int_0^{\ell} dx = -\alpha S\int_{T_h}^{T_c}\frac{dT}{T} \Rightarrow q\ell = -\alpha S\ln\left(\frac{T_c}{T_h}\right) \Rightarrow q\ell = \alpha S\ln\frac{T_h}{T_c} \quad (1)$$

Αν η θερμοκρασία του αγωγού είναι T σε απόσταση x από την αρχή 0 τότε ολοκληρώνοντας από 0 έως x θα προκύψει η θερμοκρασία της ράβδου συναρτήσει της απόστασης:

$$q\int_0^{x} dx = -\alpha S\int_{T_h}^{T}\frac{dT}{T} \Rightarrow qx = -\alpha S\ln\frac{T}{T_h} \Rightarrow qx = \alpha S\ln\frac{T_h}{T} \qquad (2)$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Διαιρώντας κατά μέλη την (2) με την (1) έχουμε:

$$\frac{qx}{q\ell}=\frac{\alpha S\ln\frac{T_h}{T}}{\alpha S\ln\frac{T_h}{T_c}}\Rightarrow\frac{x}{\ell}=\frac{\ln\frac{T_h}{T}}{\ln\frac{T_h}{T_c}}\Rightarrow\frac{x}{\ell}\ln\frac{T_h}{T_c}=\ln\frac{T_h}{T}\Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{T_h}{T_c}\right)^{\frac{x}{\ell}}=\ln\frac{T_h}{T}\Rightarrow\left(\frac{T_h}{T_c}\right)^{\frac{x}{\ell}}=\frac{T_h}{T}\Rightarrow T=\frac{T_h}{\left(\frac{T_h}{T_c}\right)^{\frac{x}{\ell}}}\Rightarrow T=T_h\left(\frac{T_h}{T_c}\right)^{-\frac{x}{\ell}}\Rightarrow$$

$$T(x)=T_h\left(\frac{T_c}{T_h}\right)^{\frac{x}{\ell}}$$

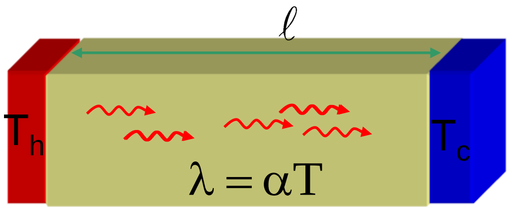
Από την (2) βρίσκουμε επίσης την πυκνότητα ροής της θερμότητας:

$$I_Q=\frac{1}{S}\frac{\partial Q}{\partial t}=\frac{1}{S}q=\frac{\alpha}{\ell}\ln\frac{T_h}{T_c}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 5

Υπολογίστε τη κατανομή θερμοκρασιών σε υλικό, που βρίσκεται ανάμεσα σε δύο παράλληλες πλάκες, αν αυτές έχουν σταθερές θερμοκρασίας T_h και T_c, η απόσταση τους ανάμεσα είναι ℓ και ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας λ~T.



Θεωρώντας την παράπλευρη επιφάνεια του υλικού θερμικά μονωμένη στη στάσιμη κατάσταση η ροή θερμότητας θα είναι σταθερή q = dQ/dt.

Η εξίσωση της θερμικής αγωγιμότητας είναι: $\frac{1}{S}\frac{\partial Q}{\partial t} = -\lambda\frac{dT}{dx} \Rightarrow q dx = -\alpha S T dT$

Ολοκληρώνοντας από 0 έως ℓ προκύπτει η ροή της θερμότητας (ανά μονάδα χρόνου):

$$q\int_0^{\ell} dx = -\alpha S\int_{T_h}^{T_c} T dT \Rightarrow q\ell = -\alpha S\frac{T_c^2 - T_h^2}{2} \Rightarrow q\ell = \alpha S\frac{T_h^2 - T_c^2}{2} \quad (1)$$

Αν η θερμοκρασία του αγωγού είναι T σε απόσταση x από την αρχή 0 τότε ολοκληρώνοντας από 0 έως x θα προκύψει η θερμοκρασία της ράβδου συναρτήσει της απόστασης:

$$q\int_0^{x} dx = -\alpha S\int_{T_h}^{T} T dT \Rightarrow qx = -\alpha S\frac{T^2 - T_h^2}{2} \Rightarrow qx = \alpha S\frac{T_h^2 - T^2}{2} \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη την (2) με την (1) έχουμε:

$$\frac{qx}{q\ell}=\frac{\alpha S\frac{T_h^2-T^2}{2}}{\alpha S\frac{T_h^2-T_c^2}{2}}\Rightarrow \frac{x}{\ell}=\frac{T_h^2-T^2}{T_h^2-T_c^2}\Rightarrow \left(T_h^2-T_c^2\right)\frac{x}{\ell}=T_h^2-T^2\Rightarrow T^2=T_h^2-\left(T_h^2-T_c^2\right)\frac{x}{\ell}$$

$$T^2=T_h^2-T_h^2\left(1-\left(\frac{T_c}{T_h}\right)^2\right)\frac{x}{\ell}\Rightarrow T^2=T_h^2+T_h^2\left(\left(\frac{T_c}{T_h}\right)^2-1\right)\frac{x}{\ell}\Rightarrow$$

$$T(x)=T_h\sqrt{1+\left(\left(\frac{T_c}{T_h}\right)^2-1\right)\frac{x}{\ell}}$$