# ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΦΩΤΟΜΕΤΡΙΑΣ

*Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας*

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
**www.pmoiras.weebly.com**

## ΘΕΜΑ 1

Σημειακή φωτεινή πηγή έχει φωτοβολία 45cd. Να υπολογιστούν:
**α)** Η φωτεινή ροή που εκπέμπεται συνολικά.
**β)** Η φωτεινή ενέργεια που εκπέμπεται από την πηγή σε χρόνο t = 3sec.

**Λύση**

**α)** Η ολική εκπεμπόμενη φωτεινή ροή αντιστοιχεί σε στερεά γωνία Ω=4π sr, οπότε από την **(3-4)** προκύπτει:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega} \Rightarrow d\Phi = I d\Omega \Rightarrow \int_0^{\Phi} d\Phi = I \int_0^{4\pi} d\Omega \Rightarrow \Phi = 4\pi I \Rightarrow \Phi = 565 \text{ lumen}$$

**β)** Η φωτεινή ροή σύμφωνα με την **(3-1)** δίνει για την φωτεινή ενέργεια :

$$\Phi = \frac{dE}{dt} \Rightarrow \int_0^{E} dE = \Phi \int_0^{t=3\text{sec}} dt \Rightarrow E = 565 \text{ lm} \cdot 3\text{sec} \Rightarrow E = 1695 \text{ Joule}$$

**ΘΕΜΑ 2**

Να υπολογιστεί ο λόγος $B_1/B_2$ των φωτισμών, που προκαλούνται από δυο φωτεινές πηγές με φωτοβολία 50cd και 250cd, που βρίσκονται κάθετα σε απόσταση 1m και 5m αντίστοιχα από μια επιφάνεια.

**Λύση**

Από το νόμο της φωτομετρίας για κάθετο φωτισμό **(3-14)**, προκύπτει ότι ο φωτισμός κάθε πηγής είναι:

$$B_1 = \frac{I_1}{r_1^2} = \frac{50\text{cd}}{(1\text{m})^2} \Rightarrow B_1 = 50\ \text{lux}$$

$$\text{και} \quad B_2 = \frac{I_2}{r_2^2} = \frac{250\text{cd}}{(5\text{m})^2} \Rightarrow B_2 = 10\ \text{lux}$$

Άρα : $\dfrac{B_1}{B_2} = 5$

**ΘΕΜΑ 3**

Λαμπτήρας που βρίσκεται σε απόσταση r από μικρή επιφάνεια, την οποία φωτίζει κάθετα, προκαλεί φωτισμό B. Σε ποια απόσταση $r'$ πρέπει να τοποθετηθεί ο λαμπτήρας ώστε να διπλασιαστεί ο φωτισμός της επιφάνειας;

**Λύση**

Ο κάθετος φωτισμός της επιφάνειας είναι :

$$B = \frac{I}{r^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Όταν διπλασιαστεί ο φωτισμός της επιφάνειας , η απόσταση της πηγής από αυτήν θα είναι $r'$ , ενώ η φωτοβολία της πηγής I παραμένει σταθερή. Οπότε:

$$2B = \frac{I}{r'^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις **(1)** και **(2)** τελικά προκύπτει:

$$2\frac{I}{r^2} = \frac{I}{r'^2} \Rightarrow r'^2 = \frac{r^2}{2} \Rightarrow r' = \frac{r}{\sqrt{2}} \Rightarrow r' = \frac{\sqrt{2}}{2}r$$

**ΘΕΜΑ 4**

Σημειακή φωτεινή πηγή βρίσκεται στο κέντρο σφαίρας ακτίνας R = 1m.
Να υπολογιστεί η φωτοβολία της πηγής, αν τμήμα της επιφάνειας της σφαίρας εμβαδού $50cm^2$ δέχεται φωτεινή ροή 1 lumen.

**Λύση**

Από το νόμο της φωτομετρίας για κάθετη πρόσπτωση ισχύει:

$$B = \frac{I}{R^2} \quad \mathbf{(1)}$$

Επίσης από τον ορισμό του φωτισμού **(3-12)** είναι:

$$B = \frac{\Phi}{S} \quad \mathbf{(2)}$$

Συνεπώς εξισώνοντας τις **(1)** και **(2)** προκύπτει:

$$\frac{I}{R^2} = \frac{\Phi}{S} \Rightarrow I = \frac{\Phi}{S} R^2 = \frac{1\,\text{lumen}}{50 \cdot (10^{-2}\,\text{m})^2} 1\text{m}^2 \Rightarrow I = 200\text{cd}$$

**ΘΕΜΑ 5**

Πόσοι λαμπτήρες, ο καθένας φωτοβολίας 80 cd, πρέπει να τοποθετηθούν κάθετα σε ύψος 2m από μια επιφάνεια για να προκαλούν φωτισμό 160 lux ;

**Λύση**

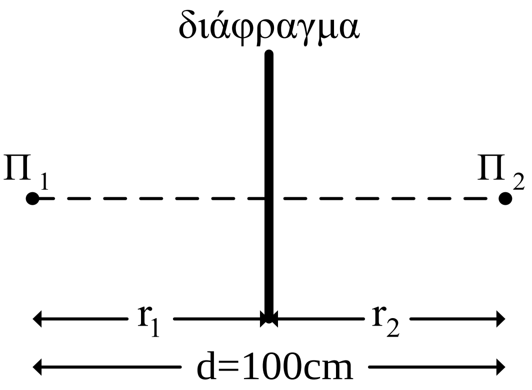
Η ολική φωτοβολία των λαμπτήρων είναι nI και ο φωτισμός τους είναι:

$$B=\frac{nI}{h^2}\Rightarrow n=\frac{Bh^2}{I}=\frac{160\,lux\;4m^2}{80cd}\Rightarrow n=8$$

**ΘΕΜΑ 6**

Δύο φωτεινές πηγές με φωτοβολίες 10cd και 5cd, απέχουν μεταξύ τους κατά 100cm. Σε ποιο σημείο πάνω στην ευθεία που ενώνει τις δύο πηγές, πρέπει να τοποθετηθεί διάφραγμα, ώστε οι δυο όψεις του να φωτίζονται όμοια;

**Λύση**




Έστω $r_1$ και $r_2$ οι αποστάσεις του διαφράγματος από τις αντίστοιχες πηγές. Έτσι είναι:

$$d = r_1 + r_2 \Rightarrow r_2 = d - r_1 \qquad \textbf{(1)}$$

Επειδή οι δυο όψεις του διαφράγματος φωτίζονται όμοια από τις δυο πηγές, θα ισχύει ο τύπος των ίσων φωτισμών **(3-15)** σύμφωνα με των οποίο:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Αντικαθιστώντας την **(1)** στην **(2)** θα γίνει απαλοιφή του $r_2$ και θα προκύψει :

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_1^2}{(d - r_1)^2} \Rightarrow I_1(d - r_1)^2 = I_2 r_1^2 \Rightarrow I_1(d^2 + r_1^2 - 2dr_1) = I_2 r_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (I_1 - I_2)r_1^2 - 2dI_1 r_1 + I_1 d^2 = 0 \Rightarrow 5r_1^2 - 2000r_1 + 100000 = 0$$

Οι λύσεις της παραπάνω δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι :

$$r_1 = \frac{2000 \pm \sqrt{2000^2 - 4 \cdot 5 \cdot 100000}}{2 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 10^3 \pm \sqrt{4 \cdot 10^6 - 2 \cdot 10^6}}{10} =$$

$$= \frac{2 \cdot 10^3 \pm \sqrt{2 \cdot 10^6}}{10} = 2 \cdot 10^2 \pm \sqrt{2} \cdot 10^2 \Rightarrow r_1 = 3{,}14 \cdot 10^2 = 341\text{cm}$$

$$\text{ή} \quad r_1 = 0{,}585 \cdot 10^2 = 58{,}5\text{cm}$$

Από τις δυο παραπάνω λύσεις η πρώτη $r_1$ = 341cm απορρίπτεται, γιατί αντιστοιχεί σε θέση του διαφράγματος που δεν βρίσκεται ανάμεσα στις δυο πηγές.
Άρα το διάφραγμα θα πρέπει να τοποθετηθεί σε σημείο που να απέχει απόσταση $r_1$ = 58,5cm από την πηγή $Π_1$.

**ΘΕΜΑ 7**

Δυο λαμπτήρες απέχουν μεταξύ τους κατά 2m και ο λόγος των φωτοβολιών τους είναι ίσος με 18/52. Σε ποια θέση πρέπει να τοποθετηθεί διάφραγμα, κάθετο στην ευθεία που ενώνει τους δυο λαμπτήρες, ώστε να δέχεται τον ίδιο φωτισμό;

**Λύση**

Αν $r_1$ και $r_2$ είναι οι αποστάσεις των λαμπτήρων από το διάφραγμα που δέχεται τον ίδιο φωτισμό, τότε από τον τύπο των ίσων φωτισμών **(3-15)** προκύπτει:

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{r_1^2}{r_2^2}\Rightarrow\frac{r_1^2}{r_2^2}=\frac{18}{52}\Rightarrow r_2=\sqrt{\frac{52}{18}}r_1\Rightarrow r_2=1{,}7r_1 \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά είναι: $$d=r_1+r_2\overset{(1)}{\Rightarrow}d=2{,}7r_1\Rightarrow r_1=\frac{2m}{2{,}7}\Rightarrow r_1=0{,}74m$$

Δηλαδή το διάφραγμα πρέπει να τοποθετηθεί σε απόσταση $r_1$ =0,74m από τον πρώτο λαμπτήρα.

**ΘΕΜΑ 8**

Δίσκος διαμέτρου 2m, που βρίσκεται μέσα σε δέσμη φωτεινών ακτίνων κάθετων σε αυτόν, δέχεται φωτισμό 15 lux .

**α)** Να υπολογιστεί η προσπίπτουσα πάνω στο δίσκο φωτεινή ροή.

**β)** Αν ο δίσκος στραφεί γύρω από μια διάμετρό του κατά γωνία 60°, ποιος θα είναι ο φωτισμός του;

**Λύση**

**α)** Από τον ορισμό του φωτισμού **(3-12)** προκύπτει η φωτεινή ροή ως:

$$B = \frac{\Phi}{S} \Rightarrow \Phi = BS = B\pi\frac{d^2}{4} = 15\text{lux} \cdot 3{,}14\frac{4\text{m}^2}{4} \Rightarrow \Phi = 47{,}1 \text{ lumen}$$

**β)** Αν ο δίσκος στραφεί, τότε ο πλάγιος φωτισμός του, σύμφωνα με το νόμο της φωτομετρίας **(3-13)** είναι :

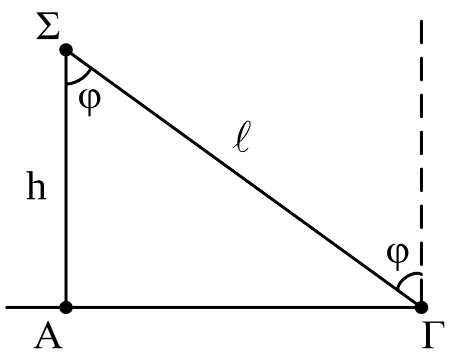
$$B' = \frac{I}{r^2}\cos\varphi = B\cos\varphi, \quad \text{όπου} \quad B = \frac{I}{r^2} = 15 \text{ lux} \quad \text{είναι ο κάθετος φωτισμός.}$$

Άρα : $B' = 15\text{lux} \ \cos 60^o = 15 \cdot 0{,}5\text{lux} \Rightarrow B' = 7{,}5 \text{ lux}$

**ΘΕΜΑ 9**

Ο φωτισμός που προκαλεί μια φωτεινή πηγή πάνω σε επιφάνεια με κάθετη πρόσπτωση είναι $B_o = 60\,\text{lux}$. Να υπολογιστεί ο φωτισμός Β σε ένα σημείο της επιφάνειας, στο οποίο οι ακτίνες προσπίπτουν υπό γωνία $\varphi = 60^o$.

**Λύση**




Στο σημείο Α όπου ο φωτισμός είναι κάθετος είναι:

$$B_o = \frac{I}{h^2} \Rightarrow I = B_o h^2 \qquad \textbf{(1)}$$

Ενώ στο σημείο Γ όπου ο φωτισμός είναι πλάγιος με γωνία $\varphi = 60^o$, ο νόμος της φωτομετρίας **(3-13)** δίνει:

$$B = \frac{I}{\ell^2}\cos\varphi \qquad \textbf{(2)}$$

Επομένως η **(2)** λόγω της **(1)** δίνει:

$$B = B_o \frac{h^2}{\ell^2}\cos\varphi \qquad \textbf{(3)}$$

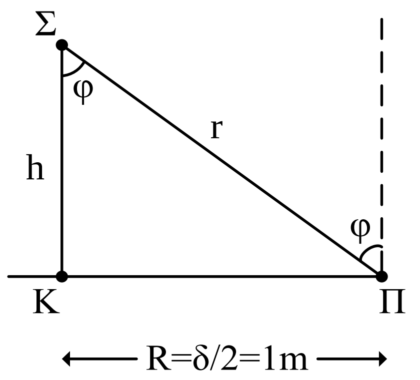
Αλλά από το ορθογώνιο τρίγωνο ΠΑΓ είναι $\cos\varphi = h/\ell$ οπότε η **(3)** τελικά δίνει:

$$B = B_o \cos^3\varphi = 60\,\text{lux}\,(0{,}5)^3 = 60 \cdot 0{,}125\,\text{lux} \Rightarrow B = 7{,}5\,\text{lux}$$

**ΘΕΜΑ 10**

Ακριβώς πάνω από το κέντρο κυκλικού τραπεζιού με διάμετρο δ=2m βρίσκεται φωτεινή πηγή σε ύψος h =1,74m. Να βρεθεί η σχέση φωτισμού του κέντρου και της περιφέρειας του τραπεζιού.

**Λύση**




Ο κάθετος φωτισμός στο κέντρο του τραπεζιού είναι:

$$B_K = \frac{I}{h^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Ενώ ο πλάγιος φωτισμός στην περιφέρεια του τραπεζιού είναι:

$$B_\Pi = \frac{I}{r^2}\cos\varphi \qquad \textbf{(2)}$$

Διαιρώντας τις **(1)** και **(2)** κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{B_K}{B_\Pi} = \frac{I/h^2}{I\cos\varphi/r^2} \Rightarrow \frac{B_K}{B_\Pi} = \frac{r^2}{h^2\cos\varphi} \qquad \textbf{(3)}$$

Αλλά:

$$r = \sqrt{h^2 + R^2} = \sqrt{1,74^2 + 1^2} = \sqrt{4} \Rightarrow r = 2\text{m} \quad \text{και} \quad \cos\varphi = \frac{h}{r} = \frac{1,74}{2} = 0,87$$

Συνεπώς η **(3)** δίνει τελικά:

$$\frac{B_K}{B_\Pi} = \frac{2^2}{1,74^2 \cdot 0,87} = \frac{4}{2,61} \Rightarrow \frac{B_K}{B_\Pi} = 1,5$$

**ΘΕΜΑ 11**

Φωτεινή πηγή φωτίζει κάθετα επιφάνεια που βρίσκεται σε απόσταση $r_1 = 2\text{m}$ και προκαλεί σε αυτή φωτισμό $B = 50\text{lux}$. Πόσο πρέπει να μεταβληθεί η φωτοβολία της πηγής για να προκαλεί τον ίδιο φωτισμό πάνω σε επιφάνεια που απέχει απόσταση $r_2 = 4\text{m}$, όταν τη φωτίζει πλάγια υπό γωνία $\varphi=60^o$;

**Λύση**

Ο κάθετος φωτισμός της πρώτης επιφάνειας είναι:

$$B = \frac{I_1}{r_1^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Ενώ ο πλάγιος φωτισμός της δεύτερης επιφάνειας είναι :

$$B = \frac{I_2}{r_2^2}\cos\varphi \qquad \textbf{(2)}$$

Επειδή ο φωτισμός των δυο επιφανειών είναι ίδιος, εξισώνοντας τις **(1)** και **(2)** προκύπτει:

$$\frac{I_1}{r_1^2} = \frac{I_2}{r_2^2}\cos\varphi \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}\cos\varphi = \frac{4}{16}\cdot 0{,}5 = \frac{1}{8} \Rightarrow I_2 = 8I_1 \qquad \textbf{(3)}$$

Αλλά από την **(1)** είναι:

$$I_1 = Br_1^2 = 50\text{lux}\cdot 4\text{m}^2 \Rightarrow I_1 = 200\text{cd}$$

Κι επομένως η **(3)** δίνει: $I_2 = 8I_1 = 1600\text{cd}$

Άρα η φωτοβολία της πηγής θα πρέπει να μεταβληθεί κατά:

$$\Delta I = I_2 - I_1 = 1600\text{cd} - 200\text{cd} \Rightarrow \Delta I = 1400\text{cd}$$

**ΘΕΜΑ 12**

Επιφάνεια $2\text{m}^2$ δέχεται φωτισμό $60\text{lux}$. Να βρεθεί η ενέργεια που εκπέμπεται από τη φωτεινή πηγή εντός χρόνου 30 sec.

**Λύση**

Από τον ορισμό του φωτισμού **(3-12)** προκύπτει η φωτεινή ροή ως :

$$B = \frac{\Phi}{S} \Rightarrow \Phi = BS = 60\text{lux} \cdot 2\text{m}^2 \Rightarrow \Phi = 120\,\text{lumen}$$

Επομένως από την **(3-1)** προκύπτει για τη φωτεινή ενέργεια :

$$\Phi = \frac{dE}{dt} \Rightarrow dE = \Phi dt \Rightarrow \int_0^E dE = 120\ \text{lumen} \int_0^{30\text{sec}} dt \Rightarrow E = 120 \cdot 30\text{lm sec} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = 3600\ \text{Joule}$$

**ΘΕΜΑ 13**

Δυο φωτεινές πηγές βρίσκονται σε απόσταση $\ell$ =3m η μια από την άλλη.
Η πρώτη έχει φωτοβολία $I_1$ = 40cd, ενώ η δεύτερη εκπέμπει ολική φωτεινή ροή $\Phi_2$ = 753,6 lumen . Να βρεθεί η θέση μεταξύ των δυο πηγών, στην οποία πρέπει να τοποθετηθεί πέτασμα ώστε αυτό να δέχεται ίσο φωτισμό και από τις δυο πηγές.

**Λύση**

Σύμφωνα με την **(3-7)** η φωτοβολία της δεύτερης πηγής είναι:

$$I_2 = \frac{\Phi_2}{4\pi} = \frac{753{,}6\,\text{lumen}}{12{,}56\,\text{sr}} \Rightarrow I_2 = 60\,\text{cd}$$

Επομένως από των τύπο των ίσων φωτισμών ισχύει:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \Rightarrow \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{40}{60} = \frac{4}{6} \Rightarrow r_2^2 = \frac{6}{4} r_1^2 \Rightarrow r_2 = 1{,}22 r_1 \qquad \textbf{(1)}$$

όπου $r_1$ και $r_2$ οι αποστάσεις κάθε πηγής από το πέτασμα.

Επίσης ισχύει : $\ell = r_1 + r_2$ οπότε λόγω της **(1)** δίνει:

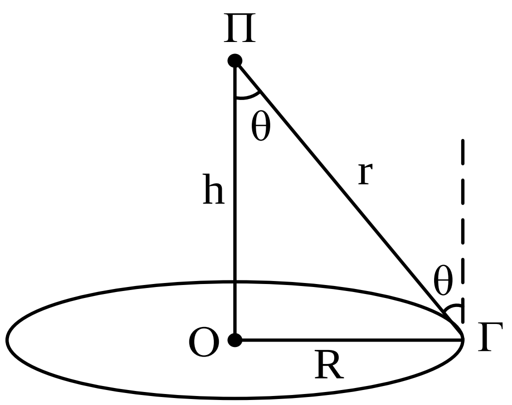
$$\ell = 2{,}22 r_1 \Rightarrow r_1 = \frac{3\text{m}}{2{,}22} \Rightarrow r_1 = 1{,}35\,\text{m}$$

Άρα το πέτασμα πρέπει να τοποθετηθεί σε απόσταση $r_1$ = 1,35m από την πρώτη πηγή.

**ΘΕΜΑ 14**

Πάνω από οριζόντιο κυκλικό τραπέζι ακτίνας R και στον κατακόρυφο άξονα, που περνά από το κέντρο του, βρίσκεται σημειακή φωτεινή πηγή φωτοβολίας I. Σε ποιο ύψος πρέπει να βρίσκεται η πηγή ώστε ο φωτισμός στα όρια του τραπεζιού να είναι μέγιστος;

**Λύση**




Σύμφωνα με το νόμο της φωτομετρίας , ο φωτισμός ενός σημείου Γ της περιφέρειας του τραπεζιού είναι:

$$B_\Gamma = \frac{I}{r^2}\cos\theta \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά από το ορθογώνιο τρίγωνο ΠΟΓ είναι:

$$\cos\theta = \frac{h}{r} \quad \text{και} \quad r = \sqrt{h^2 + R^2}$$

Συνεπώς η **(1)** δίνει:

$$B_\Gamma = \frac{Ih}{r^3} \Rightarrow B_\Gamma = \frac{Ih}{(h^2 + R^2)^{3/2}} \qquad \textbf{(2)}$$

Η σχέση **(2)** αποτελεί μια συνάρτηση του φωτισμού της περιφέρειας του τραπεζιού και του ύψους της πηγής από το κέντρο του τραπεζιού. Άρα ο φωτισμός είναι μέγιστος όταν:

$$\frac{dB_\Gamma}{dh} = 0 \Rightarrow I\frac{1(h^2 + R^2)^{3/2} - h\frac{3}{2}(h^2 + R^2)^{1/2}2h}{(h^2 + R^2)^3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (h^2 + R^2)^{3/2} - 3h^2(h^2 + R^2)^{1/2} = 0 \Rightarrow$$

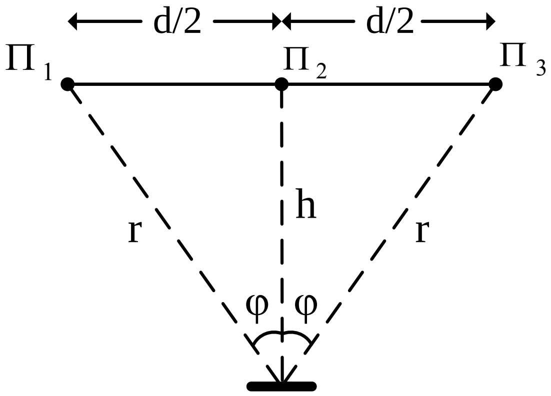
$$\Rightarrow (h^2 + R^2)^{1/2}\left[(h^2 + R^2)^{2/2} - 3h^2\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 + R^2 - 3h^2 = 0 \Rightarrow R^2 - 2h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{R^2}{2} \Rightarrow h = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

**ΘΕΜΑ 15**

Στις άκρες και τη μέση οριζόντιας ευθείας μήκους d=8m, τοποθετείται ανά μια σημειακή φωτεινή πηγή φωτοβολίας I =100 cd. Κάτω από τη μεσαία πηγή και σε απόσταση h=5m από αυτή , υπάρχει μικρή οριζόντια επιφάνεια.
Να βρεθεί η φωτοβολία I΄ μιας πηγής , η οποία όταν τοποθετηθεί στη θέση της μεσαίας , φωτίζει τη μικρή επιφάνεια όπως και οι τρεις μαζί.

**Λύση**




Στην περίπτωση που η επιφάνεια φωτίζεται από τις τρεις πηγές δέχεται τον κάθετο φωτισμό της μεσαίας πηγής $\Pi_2$:

$$B_2 = \frac{I}{h^2}$$

και τους πλάγιους φωτισμούς των ακραίων πηγών $\Pi_1$ και $\Pi_3$:

$$B_1 = B_3 = \frac{I}{r^2}\cos\varphi$$

Άρα ο ολικός φωτισμός είναι:

$$B = B_1 + B_2 + B_3 = \frac{I}{h^2} + \frac{2I}{r^2}\cos\varphi \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά από το σχήμα εύκολα προκύπτει ότι:

$$r = \sqrt{h^2 + d^2/4} \quad \text{και} \quad \cos\varphi = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + d^2/4}}$$

Οπότε η **(1)** γίνεται:

$$B = I\left[\frac{1}{h^2} + \frac{2h}{(h^2 + d^2/4)^{3/2}}\right] \qquad \textbf{(2)}$$

Αν οι τρεις πηγές αντικατασταθούν από μια άλλη πηγή Π φωτοβολίας Ι΄ στη θέση της μεσαίας και φωτίζει την επιφάνεια όπως και οι τρεις μαζί θα είναι:

$$B = \frac{I'}{h^2} \qquad \textbf{(3)}$$

Εξισώνοντας τις **(2)** και **(3)** προκύπτει τελικά:

$$\frac{I'}{h^2} = I\left[\frac{1}{h^2} + \frac{2h}{(h^2 + d^2/4)^{3/2}}\right] \Rightarrow I' = I\left[1 + 2\left(\frac{h}{\sqrt{h^2 + d^2/4}}\right)^3\right] =$$

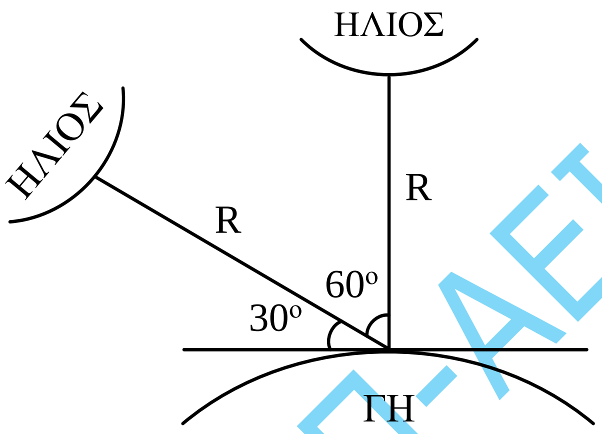
$$= 100\text{cd}\left[1 + 2\left(\frac{5\text{m}}{\sqrt{25\text{m}^2 + 16\text{m}^2}}\right)^3\right] = 100(1 + 2\cdot 0{,}78^3)\text{cd} = 100\cdot 1{,}95\text{cd} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I' = 195\text{cd}$$

**ΘΕΜΑ 16**

Να βρεθεί ο λόγος των φωτισμών, τους οποίους προκαλεί ο ήλιος σε ένα τόπο όταν βρίσκεται στο ζενίθ αυτού και όταν είναι $30^o$ πάνω από τον ορίζοντα.

**Λύση**




Όταν ο ήλιος βρίσκεται στο ζενίθ του προκαλεί κάθετο φωτισμό στον τόπο, οπότε είναι:

$$B_1 = \frac{I}{R^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Ενώ όταν ο ήλιος είναι $30^o$ πάνω από τον ορίζοντα προκαλεί πλάγιο φωτισμό στον τόπο υπό γωνία $60^o$ και είναι:

$$B_2 = \frac{I}{R^2}\cos 60^o \qquad \textbf{(2)}$$

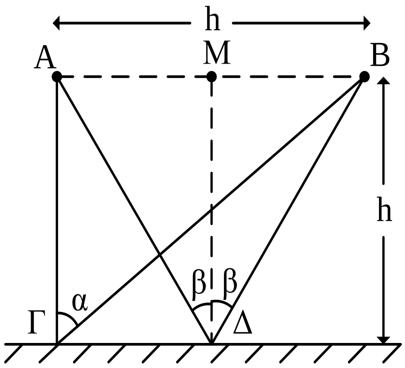
όπου η απόσταση R του ήλιου από τον τόπο είναι η ίδια και στις δυο θέσεις.
Διαιρώντας τις **(1)** και **(2)** κατά μέλη τελικά προκύπτει:

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{I/R^2}{\frac{I}{R^2}\cos 60^o} = \frac{1}{\cos 60^o} = \frac{1}{1/2} \Rightarrow \frac{B_1}{B_2} = 2$$

**ΘΕΜΑ 17**

Οριζόντιο τραπέζι φωτίζεται από δυο λαμπτήρες Α και Β, ίδιας φωτοβολίας 50cd, που είναι κρεμασμένοι σε ύψος 2m και απέχουν μεταξύ τους 2m.
Να υπολογιστούν :
**α)** Ο φωτισμός του σημείου του τραπεζιού που βρίσκεται πάνω στην κατακόρυφο που περνά από το λαμπτήρα Α.
**β)** Ο φωτισμός του σημείου του τραπεζιού που βρίσκεται πάνω στην κατακόρυφο που περνά από τη μέση της ΑΒ.

**Λύση**




**α)** Το σημείο Γ δέχεται κάθετο φωτισμό από το λαμπτήρα Α:

$$B_A = \frac{I}{h^2}$$

και πλάγιο φωτισμό από το λαμπτήρα Β:

$$B_B = \frac{I}{(B\Gamma)^2}\cos\alpha$$

Άρα: $$B_\Gamma = B_A + B_B = \frac{I}{h^2} + \frac{I}{(B\Gamma)^2}\cos\alpha \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι :

$$(B\Gamma)^2 = h^2 + h^2 = 2h^2 \quad \text{και} \quad \cos\alpha = \frac{h}{(B\Gamma)} = \frac{h}{\sqrt{2}h} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

οπότε η **(1)** δίνει :

$$B_\Gamma = \frac{I}{h^2} + \frac{I}{2h^2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{I}{h^2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{50cd}{4m^2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \Rightarrow B_\Gamma = 16{,}9\,lux$$

**β)** Το σημείο Δ δέχεται και από τους δυο λαμπτήρες τον ίδιο πλάγιο φωτισμό:

$$B'_A = B'_B = \frac{I}{(A\Delta)^2}\cos\beta$$

Άρα: $B_\Delta = B'_A + B'_B = 2\dfrac{I}{(A\Delta)^2}\cos\beta$ **(2)**

Αλλά από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΜ είναι:

$(A\Delta)^2 = h^2 + (h/2)^2 = \dfrac{5}{4}h^2$ και $\cos\beta = \dfrac{h}{(A\Delta)} = \dfrac{h}{\sqrt{5/4}h} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ οπότε η **(2)** δίνει :

$$B_\Delta = 2\frac{I}{(5/4)h^2}\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{16I}{5\sqrt{5}h^2} = \frac{16}{5\sqrt{5}}\frac{50cd}{4m^2} \Rightarrow B_\Delta = 17{,}9\,\text{lux}$$

**ΘΕΜΑ 18**

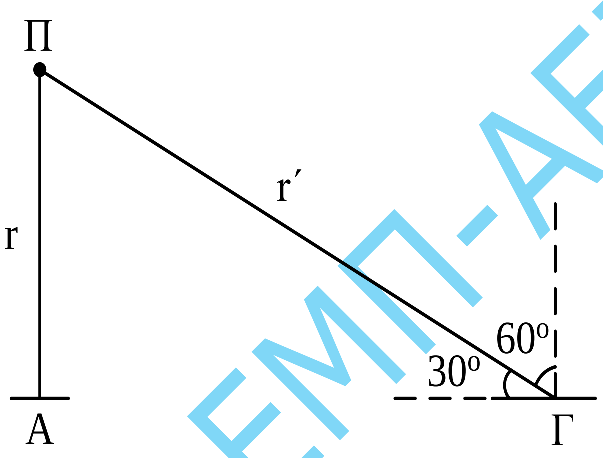
Σημειακή φωτεινή πηγή φωτίζει με φωτισμό 10lux και κάθετη πρόσπτωση μικρή επιφάνεια Α. Να βρείτε:

**α)** Το φωτισμό μικρής επιφάνειας Γ, που βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με την Α, όταν οι ακτίνες πέφτουν σε αυτή με γωνία πρόσπτωσης $60^o$.

**β)** Πόσος γίνεται ο φωτισμός στη Γ, όταν η απόσταση της φωτεινής πηγής από το οριζόντιο επίπεδο τριπλασιαστεί;

**Λύση**

**α)**




Από το νόμο της φωτομετρίας ο κάθετος φωτισμός της επιφάνειας Α είναι:

$$B_A = \frac{I}{r^2} \Rightarrow I = B_A r^2 \qquad \textbf{(1)}$$

Ενώ ο πλάγιος φωτισμός της επιφάνειας Γ είναι:

$$B_\Gamma = \frac{I}{r'^2}\cos 60^o \qquad \textbf{(2)}$$

Αντικαθιστώντας την **(1)** στη **(2)** προκύπτει:

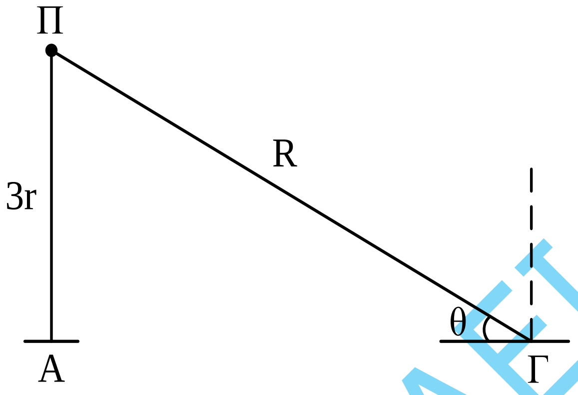
$$B_\Gamma = B_A \frac{r^2}{r'^2}\cos 60^o \qquad \textbf{(3)}$$

Αλλά από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΠΓ είναι:

$\sin 30^o = \frac{r}{r'}$, οπότε η **(3)** δίνει :

$$B_\Gamma = B_A \sin^2 30^o \cos 60^o = 10lux \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} = \frac{10}{8} lux \Rightarrow B_\Gamma = 1{,}25lux$$

**β)**




Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι η σταθερή απόσταση (ΑΓ) των δυο επιφανειών είναι:

$$\sin 30^o = \frac{(A\Gamma)}{r'} \Rightarrow (A\Gamma) = r'\cos 30^o$$

κι επειδή $r' = \dfrac{r}{\sin 30^o} = 2r$ προκύπτει :

$$(A\Gamma) = 2r\cos 30^o = 2r\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (A\Gamma) = \sqrt{3}r \qquad \textbf{(4)}$$

Μετά την απομάκρυνση της πηγής από το οριζόντιο επίπεδο είναι:

$$\cos\theta = \frac{(A\Gamma)}{R} \Rightarrow (A\Gamma) = R\cos\theta$$

Αλλά: $\sin\theta = \dfrac{3r}{R} \Rightarrow R = \dfrac{3r}{\sin\theta}$ οπότε :

$$(A\Gamma) = \frac{3r}{\sin\theta}\cos\theta \Rightarrow (A\Gamma) = \frac{3r}{\tan\theta} \qquad \textbf{(5)}$$

Επομένως από τις **(4)** και **(5)** προκύπτει:

$$\sqrt{3}r = \frac{3r}{\tan\theta} \Rightarrow \tan\theta = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60^o$$

Άρα οι ακτίνες πέφτουν τώρα στην επιφάνεια Γ με γωνία πρόσπτωσης $30^o$ κι επομένως από το νόμο της φωτομετρίας ο πλάγιος φωτισμός στην επιφάνεια Γ τώρα είναι:

$$B'_\Gamma = \frac{I}{R^2}\cos 30^o \overset{(1)}{=} \frac{B_A r^2}{R^2}\cos 30^o \qquad \textbf{(6)}$$

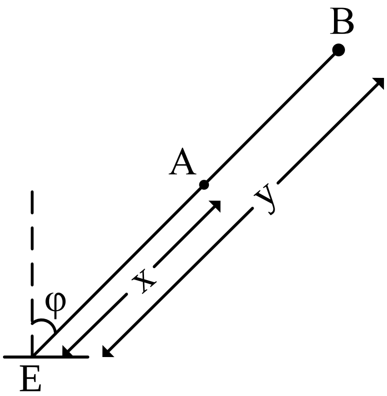
Αλλά : $\sin\theta = \sin 60^o = \frac{3r}{R} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{\sin 60^o}{3}$ οπότε η **(6)** δίνει :

$$B'_\Gamma = B_A \frac{\sin^2 60^o}{9}\cos 30^o = 10\text{lux}\,\frac{1}{9}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{10}{9}\frac{3}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}\text{lux} \Rightarrow B'_\Gamma = 0{,}72\text{lux}$$

**ΘΕΜΑ 19**

Δυο φωτεινές πηγές Α και Β, της ίδιας φωτοβολίας, φωτίζουν μια μικρή επιφάνεια Ε. Οι δυο αυτές πηγές μπορούν να μετακινούνται κατά μήκος δυο ευθειών ΕΑ και ΕΒ, που σχηματίζουν με την κάθετο στην επιφάνεια Ε ίσες γωνίες. Να βρεθεί η σχέση, που πρέπει να εκπληρώνεται μεταξύ των αποστάσεων ΕΑ = x και ΕΒ = y, για να διατηρείται σταθερός ο φωτισμός της επιφάνειας Ε.

**Λύση**




Εφόσον οι ευθείες ΕΑ και ΕΒ σχηματίζουν την ίδια γωνία με την κάθετο στην επιφάνεια Ε, είναι φανερό ότι οι πηγές Α και Β θα βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία και φωτίζουν πλάγια την επιφάνεια Ε υπό γωνία φ.
Άρα ο φωτισμός της επιφάνειας Ε είναι :

$$B = B_A + B_B = \frac{I}{x^2}\cos\varphi + \frac{I}{y^2}\cos\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = I\cos\varphi\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) \qquad \textbf{(1)}$$

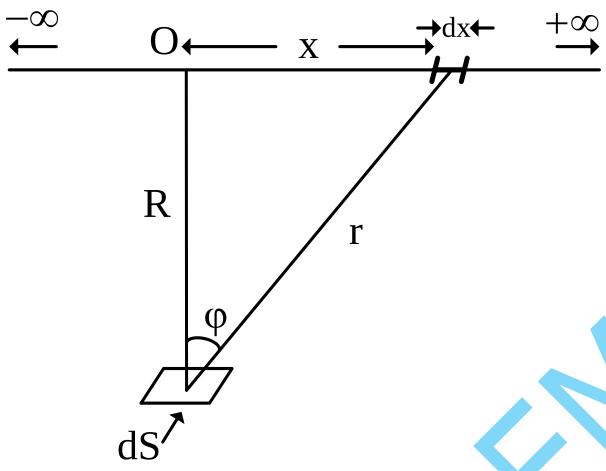
Συνεπώς επειδή η φωτοβολία I των δυο πηγών και η γωνία πρόσπτωσης φ είναι σταθερά, για να διατηρείται σταθερός ο φωτισμός της επιφάνειας Ε θα πρέπει σύμφωνα με την **(1)** οι δυο πηγές να μετακινούνται έτσι ώστε πάντα να ισχύει:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \text{σταθ.}$$

**ΘΕΜΑ 20**

Έστω μια μη σημειακή φωτεινή πηγή με μορφή άπειρης εκτεινόμενης γραμμής και φωτοβολίας ανά μονάδα μήκους I. Να υπολογιστεί ο φωτισμός που προκαλεί αυτή σε μια στοιχειώδη επιφάνεια dS που τοποθετείται σε κάθετη απόσταση R από αυτή.

**Λύση**




Έστω ένα στοιχειώδες τμήμα dx της άπειρης εκτεινόμενης φωτεινής πηγής. Ο στοιχειώδης πλάγιος φωτισμός που προκαλεί αυτό στην επιφάνεια dS είναι:

$$dB = \frac{dI}{r^2}\cos\varphi \qquad \textbf{(1)}$$

**(1)**

όπου dI η φωτοβολία που αντιστοιχεί στο τμήμα dx της πηγής.

Επειδή η φωτοβολία ανά μονάδα μήκους της πηγής είναι I θα ισχύει: $dI = Idx$ οπότε η **(1)** δίνει :

$$dB = \frac{I}{r^2}dx\cos\varphi \qquad \textbf{(2)}$$

Επίσης από τη γεωμετρία του σχήματος εύκολα προκύπτει ότι:

$$r = \sqrt{x^2 + R^2} \quad \text{και} \quad \cos\varphi = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

Επομένως η **(2)** γίνεται: $$dB = \frac{IRdx}{(x^2+R^2)^{3/2}} \qquad \textbf{(3)}$$

Άρα ολοκληρώνοντας την **(3)** κατά μήκος της άπειρης πηγής προσδιορίζεται ο ολικός φωτισμός της επιφάνειας dS. Δηλαδή:

$$B = \int dB = IR\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} = IR\left[\frac{x}{R^2(x^2+R^2)^{1/2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$\Rightarrow \frac{I}{R}\left[\frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} \Rightarrow B = \frac{2I}{R}$$

✎ **Σημείωση :** Αναλυτικά ο υπολογισμός του τελευταίου ολοκληρώματος γίνεται ως εξής :

$$\left[\frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}} - \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|(1+R^2/x^2)^{1/2}} - \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|(1+R^2/x^2)^{1/2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x(1+R^2/x^2)^{1/2}} - \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x(1+R^2/x^2)^{1/2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(1+R^2/x^2)^{1/2}} - \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{(1+R^2/x^2)^{1/2}} = 1-(-1) = 2$$