ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΟΠΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

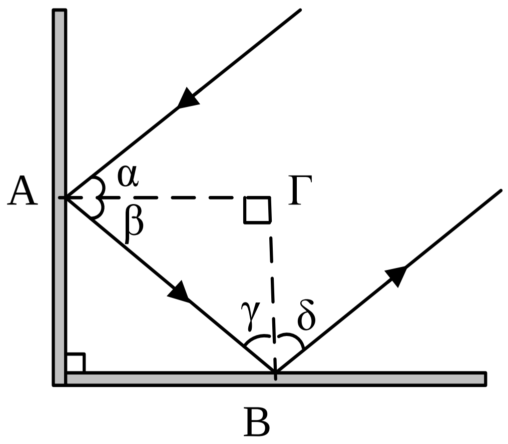
Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 1

Φωτεινή ακτίνα ανακλάται πάνω σε κατακόρυφο επίπεδο κάτοπτρο και στη συνέχεια πάνω σε οριζόντιο. Κατά ποια γωνία εκτρέπεται η αρχική ακτίνα;

Λύση



Από το σχήμα φαίνεται ότι η γωνία εκτροπής είναι:

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma + \delta \qquad \textbf{(1)}$$

Σύμφωνα με το νόμο της ανάκλασης στα σημεία Α και Β ισχύει:

$$\alpha = \beta \quad \text{και} \quad \gamma = \delta$$

Οπότε η **(1)** γίνεται: $\varepsilon = 2\,(\beta + \gamma)$

Αλλά από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ προκύπτει ότι $\beta + \gamma = 90^\circ$, οπότε τελικά:

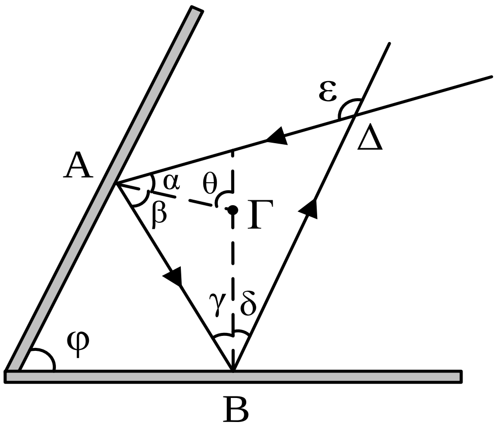
$$\varepsilon = 180^o$$

Δηλαδή η τελική ανακλώμενη ακτίνα είναι παράλληλη προς την προσπίπτουσα.

ΘΕΜΑ 2

Φωτεινή ακτίνα ανακλάται διαδοχικά πάνω σε δυο επίπεδα κάτοπτρα που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία φ. Να δειχτεί ότι η τελικά ανακλώμενη ακτίνα σχηματίζει με τη διεύθυνση της προσπίπτουσας γωνία 2φ.

Λύση



Λόγω της ανάκλασης της ακτίνας στα σημεία Α και Β, σύμφωνα με το νόμο της ανάκλασης είναι:

$$\alpha = \beta \quad \text{και} \quad \gamma = \delta \qquad \textbf{(1)}$$

Η ζητούμενη γωνία ε είναι η εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΒΔ και ισούται με το άθροισμα των δυο απέναντι γωνιών του τριγώνου. Δηλαδή:

$$\varepsilon = (\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) \qquad \textbf{(2)}$$

Επίσης η γωνία θ είναι η εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΒΓ και ισχύει:

$$\theta = \beta + \gamma \qquad \textbf{(3)}$$

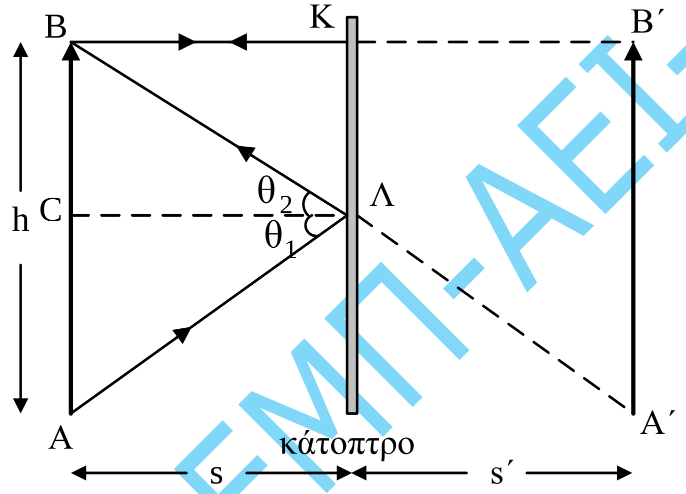
Άρα η **(2)** λόγω της **(1)** και **(3)** δίνει: $\varepsilon = 2\beta + 2\gamma = 2(\beta + \gamma) \overset{(3)}{\Rightarrow} \varepsilon = 2\theta$

Επειδή όμως οι οξείες γωνίες θ και φ έχουν τις πλευρές τους κάθετες ανά μία, είναι ίσες, δηλαδή $\theta = \varphi$, οπότε τελικά: $\varepsilon = 2\varphi$

ΘΕΜΑ 3

Ποιο είναι το μέγεθος του μικρότερου δυνατού κατακόρυφου επίπεδου κατόπτρου, στο οποίο ένας άνθρωπος ύψους h μπορεί να δει το είδωλο ολόκληρου του σώματός του;

Λύση



Έστω ένας άνθρωπος ΑΒ ύψους h σε απόσταση s από επίπεδο κάτοπτρο. Σύμφωνα με την **(2-2)** το είδωλο του ανθρώπου Α΄Β΄ θα βρίσκεται σε απόσταση s΄ = -s από το κάτοπτρο, δηλαδή σε ίση απόσταση δεξιά του κατόπτρου. Επομένως το κάτοπτρο θα βρίσκεται στο μέσο μεταξύ αντικειμένου και ειδώλου. Επίσης η μεγέθυνση του ειδώλου είναι m = 1, δηλαδή το είδωλο του ανθρώπου έχει επίσης ύψος h και είναι ορθό.
Για να μπορεί ο άνθρωπος ΑΒ να βλέπει το είδωλο ολόκληρου του σώματός του θα πρέπει να παρατηρεί με το μάτι του (σημείο Β) το είδωλο του άνω άκρου του Β΄ (κεφάλι, το οποίο θεωρείται ότι είναι στο ύψος των ματιών του) και το είδωλο του κάτω άκρου του Α΄ (πόδια). Άρα ακτίνες προερχόμενες από τα σημεία Α και Β θα πρέπει μετά την ανάκλασή τους στο κάτοπτρο να εισέρχονται στο μάτι Β του ανθρώπου , έτσι ώστε οι προεκτάσεις τους να ορίζουν το είδωλο του ανθρώπου Α΄Β΄.
Σύμφωνα με το νόμο της ανάκλασης θα πρέπει οι γωνίες θ_1 και θ_2 να είναι ίσες, πράγμα που σημαίνει ότι τα τρίγωνα ΑΛC και ΛCB είναι ίσα και ισχύει:

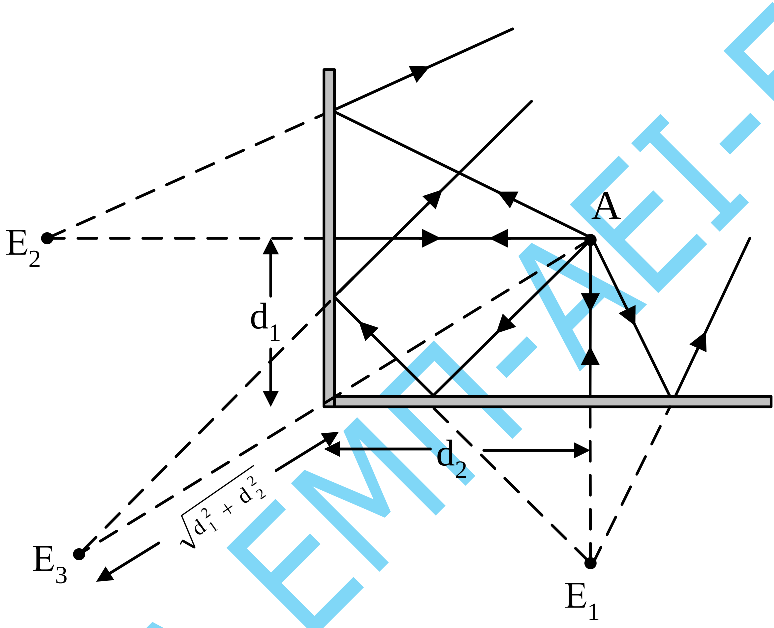
$$AC = CB = \frac{AB}{2} = \frac{h}{2}$$

Άρα ένα κάτοπτρο ύψους ΚΛ = ΒC = h/2, δηλαδή που έχει το μισό ύψος του ανθρώπου είναι κατάλληλο για το σχηματισμό του ειδώλου ολόκληρου του σώματος του ανθρώπου.

ΘΕΜΑ 4

Αντικείμενο τοποθετείται μεταξύ δυο επίπεδων κατόπτρων που σχηματίζουν ορθή γωνία μεταξύ τους. Η απόσταση του αντικειμένου από το ένα κάτοπτρο είναι d_1 και από το άλλο d_2. Πόσα είδωλα σχηματίζονται; Δείξτε σε διάγραμμα τις θέσεις των ειδώλων και σχεδιάστε την πορεία των ακτινών.

Λύση



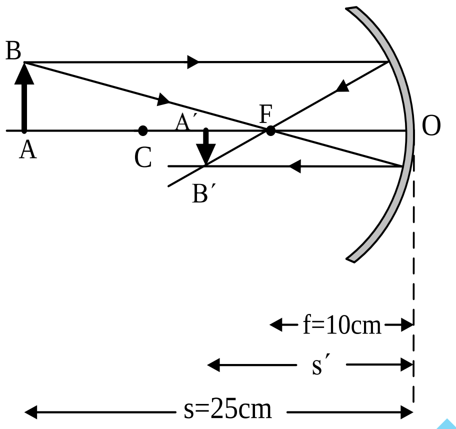
Όπως φαίνεται και στο σχήμα ακτίνες οι οποίες ξεκινούν από το αντικείμενο Α και ανακλώνται απευθείας σε ένα από τα δυο κάτοπτρα σχηματίζουν τα είδωλα E_1 και E_2 που βρίσκονται σε συμμετρικές θέσεις ως προς το αντικείμενο (d_1 και d_2 αντίστοιχα οι αποστάσεις τους από τα κάτοπτρα).
Επίσης οι ακτίνες οι οποίες ανακλώνται διαδοχικά στα δυο κάτοπτρα σχηματίζουν ένα τρίτο είδωλο E_3 συμμετρικά ως προς την κορυφή των δυο κατόπτρων.
Άρα σχηματίζονται συνολικά τρία είδωλα, οι θέσεις των οποίων φαίνονται στο σχήμα και οι αποστάσεις τους από τα κάτοπτρα είναι d_1 για το E_1, d_2 για το E_2 και $\sqrt{d_1^2+d_2^2}$ για το E_3.

ΘΕΜΑ 5

Κοίλο σφαιρικό κάτοπτρο έχει εστιακή απόσταση f = 10 cm. Βρείτε τη θέση του ειδώλου όταν το αντικείμενο απέχει **α)** 25cm, **β)** 10cm και **γ)** 5 cm από το οπτικό κέντρο. Περιγράψτε το είδωλο σε κάθε περίπτωση. Να γίνουν τα σχετικά διαγράμματα της πορείας των ακτίνων.

Λύση

α)



Από την εξίσωση των κατόπτρων προκύπτει η απόσταση του ειδώλου:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}\Rightarrow\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}-\frac{1}{s}=\frac{s-f}{fs}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow s'=\frac{f}{1-f/s}=\frac{10cm}{1-10/25}=\frac{10}{0{,}6}\Rightarrow$$

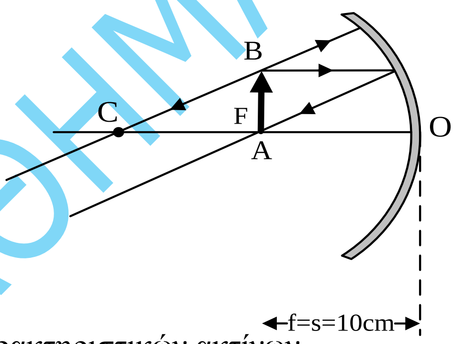
$$\Rightarrow s'=16{,}67cm$$

Η μεγέθυνση του ειδώλου σύμφωνα με την **(2-5)** είναι:

$$m=-\frac{s'}{s}=-\frac{16{,}67}{25}\Rightarrow m=-0{,}67$$

Δηλαδή στην περίπτωση αυτή σχηματίζεται πραγματικό είδωλο σε απόσταση 16,67 cm από το οπτικό κέντρο, το ύψος του είναι ίσο με 0,67 του ύψους του αντικειμένου και είναι ανεστραμμένο (αφού m<0).

β)

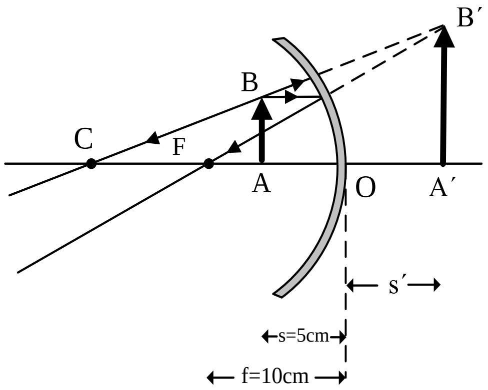


Όταν το αντικείμενο τεθεί στην εστία F, δηλαδή για s = f = 10cm η εξίσωση των κατόπτρων δίνει ότι η θέση του ειδώλου είναι:

$$s'=\frac{f}{1-f/s}=\frac{10}{1-1}=\frac{10}{0}\Rightarrow s'=\infty$$

Δηλαδή δεν σχηματίζεται είδωλο, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα της πορείας των χαρακτηριστικών ακτίνων.

γ)



Η απόσταση του ειδώλου τώρα είναι:

$$s' = \frac{f}{1-f/s} = \frac{10}{1-10/5} = \frac{10}{1-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s' = -10\text{cm}$$

και η μεγέθυνσή του είναι:

$$m = -\frac{s'}{s} = -\frac{-10}{5} \Rightarrow m = 2$$

Δηλαδή το είδωλο είναι φανταστικό, αφού σχηματίζεται από τις προεκτάσεις των ανακλώμενων ακτίνων (και το s´ είναι αρνητικό) και είναι διπλάσιο από το αντικείμενο (m = 2) και ορθό, αφού η m είναι θετική.

ΘΕΜΑ 6

Η εστιακή απόσταση ενός κοίλου σφαιρικού κατόπτρου είναι f. Σε ποια απόσταση από αυτό πρέπει να τοποθετηθεί αντικείμενο, για να σχηματιστεί είδωλο διπλάσιο του αντικειμένου;

Λύση

Από την εξίσωση των κατόπτρων προκύπτει:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \qquad \textbf{(1)}$$

Ενώ από τη μεγέθυνση του ειδώλου είναι:

$$m=\pm\frac{s'}{s}\Rightarrow s'=\pm ms \qquad \textbf{(2)}$$

όπου το πρόσημο – αντιστοιχεί σε φανταστικό είδωλο (αφού s΄ < 0) και το πρόσημο + σε πραγματικό (αφού s΄ > 0).
Επομένως η **(1)** λόγω τις **(2)** δίνει:

$$\frac{1}{s}\pm\frac{1}{ms}=\frac{1}{f}\Rightarrow\frac{m\pm1}{ms}=\frac{1}{f}\Rightarrow s=\frac{(m\pm1)f}{m} \qquad \textbf{(3)}$$

Εφόσον το είδωλο είναι διπλάσιο του αντικειμένου είναι m=2 οπότε η **(3)** δίνει :

$$s=\frac{(2\pm1)}{2}f\Rightarrow s=\frac{f}{2} \quad \text{ή} \quad s=\frac{3}{2}f$$

Άρα για τις δυο αυτές αποστάσεις αντικειμένου s το είδωλο είναι διπλάσιο, αλλά η s = f/2 αντιστοιχεί σε φανταστικό είδωλο, ενώ η s = 3f/2 σε πραγματικό (επιβεβαιώστε τα αποτελέσματα αυτά από τον **Πίνακα 2.2**).

ΘΕΜΑ 7

Σε πόση απόσταση από την κορυφή κοίλου κατόπτρου ακτίνας R πρέπει να τοποθετηθεί ένα αντικείμενο ώστε το είδωλό του να είναι πραγματικό και να έχει μέγεθος το ένα τρίτο του μεγέθους του αντικειμένου; Που θα βρίσκεται το είδωλο;

Λύση

Εφόσον το είδωλο είναι πραγματικό η μεγέθυνσή του είναι:

$$m = \frac{s'}{s} \Rightarrow s' = ms \quad \text{κι επειδή} \quad m = 1/3 \quad \text{είναι :} \quad s' = s/3$$

Επομένως η εξίσωση του κατόπτρου δίνει:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{s} + \frac{1}{s/3} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{4}{s} = \frac{1}{f} \Rightarrow s = 4f$$

Σύμφωνα όμως με την **(2-3)** είναι f = R / 2, οπότε τελικά η απόσταση του αντικειμένου πρέπει να είναι:

$$s = 2R$$

ΘΕΜΑ 8

Ένα σφαιρικό κάτοπτρο πρόκειται να χρησιμοποιηθεί για να σχηματίσει πάνω σε οθόνη ένα είδωλο με ύψος τετραπλάσιο από το ύψος του αντικειμένου, που βρίσκεται σε απόσταση s = 30cm μπροστά από το κάτοπτρο.

α) Να περιγράψετε το κάτοπτρο που θα χρησιμοποιηθεί.

β) Ποια είναι η ακτίνα καμπυλότητάς του;

γ) Χρησιμοποιήστε το διάγραμμα των ακτινών για να βρείτε τη θέση του ειδώλου.

Λύση

α) Εφόσον το είδωλο είναι μεγαλύτερο από το αντικείμενο, το κάτοπτρο που θα χρησιμοποιηθεί θα είναι κοίλο, γιατί οποιοδήποτε κυρτό κάτοπτρο δίνει είδωλο μικρότερο από το αντικείμενο (δείτε στον **Πίνακα 2.2**).

β) Το είδωλο όμως μπορεί να είναι είτε πραγματικό είτε φανταστικό, οπότε διακρίνονται δυο περιπτώσεις:

1) Στην περίπτωση που σχηματίζεται πραγματικό είδωλο τετραπλάσιο του αντικειμένου, η μεγέθυνσή του είναι:

$$m = \frac{s'}{s} \Rightarrow s' = ms = 4 \cdot 30\text{cm} \Rightarrow s' = 120\text{cm}$$

Οπότε η εξίσωση των κατόπτρων δίνει:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{30} + \frac{1}{120} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{150}{3600} \Rightarrow f = 24\text{cm}$$

Άρα η ακτίνα καμπυλότητας του κατόπτρου τότε θα είναι:

$$f = \frac{R}{2} \Rightarrow R = 2f \Rightarrow R = 48\text{cm}$$

2) Στην περίπτωση που σχηματίζεται φανταστικό είδωλο τετραπλάσιο του αντικειμένου, η μεγέθυνσή του είναι:

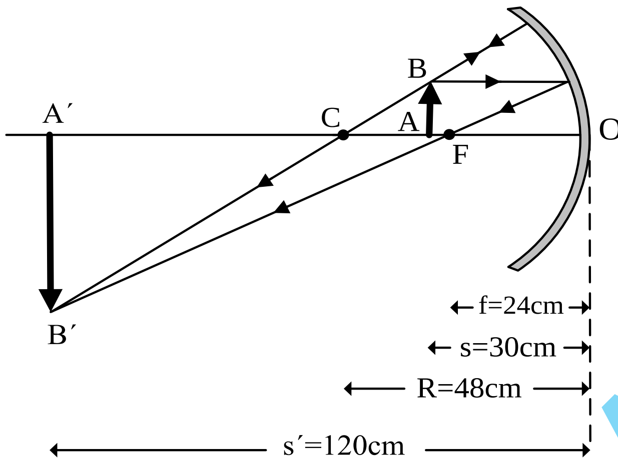
$$m = -\frac{s'}{s} \Rightarrow s' = -ms = -4 \cdot 30\text{cm} \Rightarrow s' = -120\text{cm}$$

Άρα: $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{30} - \frac{1}{120} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{90}{3600} \Rightarrow f = 40\text{cm}$

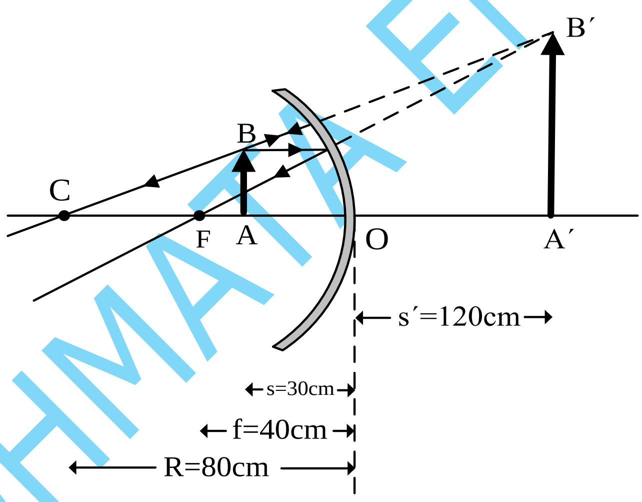
Συνεπώς η ακτίνα καμπυλότητας του κατόπτρου τότε θα είναι:

$$f = \frac{R}{2} \Rightarrow R = 2f \Rightarrow R = 80\text{cm}$$

γ) Το διάγραμμα των ακτίνων και οι αντίστοιχες θέσεις των ειδώλων των δυο παραπάνω περιπτώσεων φαίνονται ακολούθως (όπου έχουν ληφθεί οι χαρακτηριστικές ακτίνες που περνούν από την εστία F και το κέντρο καμπυλότητας C):



1η περίπτωση : πραγματικό είδωλο – ανεστραμμένο

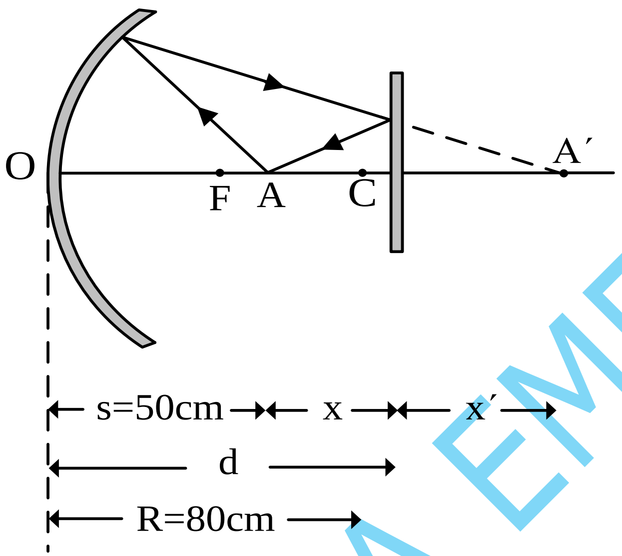


2η περίπτωση : φανταστικό είδωλο – ορθό

ΘΕΜΑ 9

Κοίλο σφαιρικό κάτοπτρο με ακτίνα καμπυλότητας R = 80cm και επίπεδο κάτοπτρο κάθετο στον κύριο άξονα του σφαιρικού, έχουν τις ανακλαστικές τους επιφάνειες απέναντι το ένα στο άλλο. Σημειακή φωτεινή πηγή τοποθετείται πάνω στον κύριο άξονα και σε απόσταση 50cm από την κορυφή του σφαιρικού κατόπτρου. Να καθοριστεί η απόσταση μεταξύ των κατόπτρων, ώστε οι ακτίνες, μετά την ανάκλασή τους πάνω στα δυο κάτοπτρα, να διέρχονται από τη θέση της πηγής.

Λύση



Το κοίλο κάτοπτρο σχηματίζει το είδωλο Α΄ σε απόσταση s+x +x΄ και σύμφωνα με την εξίσωση των κατόπτρων ισχύει:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s+x+x'}=\frac{1}{f} \qquad \textbf{(1)}$$

Για να συγκλίνουν όμως οι ακτίνες στο Α, αντί του Α΄ θα πρέπει το επίπεδο κάτοπτρο να τοποθετηθεί στη μέση της αποστάσεως ΑΑ΄ , έτσι ώστε να είναι $x'=x$, δηλαδή το επίπεδο κάτοπτρο να σχηματίζει και αυτό το είδωλο Α΄ στην ίδια θέση, συμμετρικά του αντικειμένου Α. Επομένως η απόσταση μεταξύ των δυο κατόπτρων είναι:

$$d=s+x \Rightarrow x=d-s \qquad \textbf{(2)}$$

Άρα η **(1)** λόγω της **(2)** λαμβάνοντας υπόψη ότι $x'=x$ και $f=R/2$ δίνει:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s+2x}=\frac{2}{R}\Rightarrow\frac{1}{s}+\frac{1}{s+2(d-s)}=\frac{2}{R}\Rightarrow\frac{1}{s}+\frac{1}{2d-s}=\frac{2}{R}\Rightarrow$$

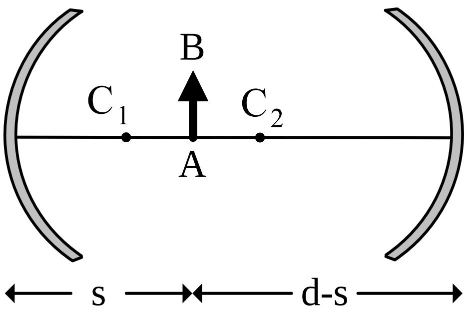
$$\Rightarrow\frac{1}{2d-s}=\frac{2}{R}-\frac{1}{s}=\frac{2s-R}{Rs}\Rightarrow 2d-s=\frac{Rs}{2s-R}\Rightarrow 2d=s+\frac{Rs}{2s-R}=$$

$$=\frac{2s^2-Rs+Rs}{2s-R}\Rightarrow d=\frac{s^2}{2s-R}=\frac{50^2\,cm^2}{100cm-80cm}=\frac{2500}{20}cm\Rightarrow d=125cm$$

ΘΕΜΑ 10

Δυο κοίλα σφαιρικά κάτοπτρα με ακτίνες καμπυλότητας $R_1 = 50\text{cm}$ και $R_2 = 90\text{cm}$, που οι οπτικοί άξονές τους συμπίπτουν, έχουν τις κατοπτρικές τους επιφάνειες απέναντι το ένα στο άλλο. Αντικείμενο τοποθετείται μεταξύ των κέντρων καμπυλότητας, κάθετα στον οπτικό άξονα και σε τέτοια θέση ώστε τα είδωλα που σχηματίζονται από τα δύο κάτοπτρα να είναι ίσα. Να προσδιοριστεί η θέση του αντικειμένου, αν η απόσταση των δυο κατόπτρων είναι d = 160cm.

Λύση



Έστω ένα αντικείμενο ΑΒ που βρίσκεται σε απόσταση s από το αριστερό κάτοπτρο και επομένως σε απόσταση d-s από το δεξιό κάτοπτρο, αφού η απόσταση των δυο κατόπτρων είναι d. Αν οι αποστάσεις των σχηματιζόμενων ειδώλων από κάθε κάτοπτρο είναι s_1' και s_2' αντίστοιχα τότε η εξίσωση των κατόπτρων δίνει για το αριστερό κάτοπτρο:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s_1'} = \frac{1}{f_1} = \frac{2}{R_1} \Rightarrow \frac{1}{s_1'} = \frac{2}{R_1} - \frac{1}{s} \qquad \textbf{(1)}$$

ενώ για το δεξιό κάτοπτρο δίνει:

$$\frac{1}{d-s} + \frac{1}{s_2'} = \frac{1}{f_2} = \frac{2}{R_2} \Rightarrow \frac{1}{s_2'} = \frac{2}{R_2} - \frac{1}{d-s} \qquad \textbf{(2)}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις **(1)** και **(2)** προκύπτει:

$$\frac{s_2'}{s_1'} = \frac{\frac{2}{R_1} - \frac{1}{s}}{\frac{2}{R_2} - \frac{1}{d-s}} \qquad \textbf{(3)}$$

Επίσης επειδή τα δυο είδωλα είναι ίσα, θα έχουν ίσες μεγεθύνσεις, οπότε:

$$m_1 = m_2 \Rightarrow \frac{s_1'}{s} = \frac{s_2'}{d-s} \Rightarrow \frac{s_2'}{s_1'} = \frac{d-s}{s} \qquad \textbf{(4)}$$

Επομένως εξισώνοντας τις **(3)** και **(4)** προκύπτει:

$$\frac{d-s}{s}=\frac{\frac{2}{R_1}-\frac{1}{s}}{\frac{2}{R_2}-\frac{1}{d-s}}\Rightarrow\frac{2(d-s)}{R_2}-1=\frac{2s}{R_1}-1\Rightarrow\frac{2(d-s)}{R_2}=\frac{2s}{R_1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow d=s+\frac{R_2}{R_1}s=\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)s=\frac{R_1+R_2}{R_1}s\Rightarrow$$

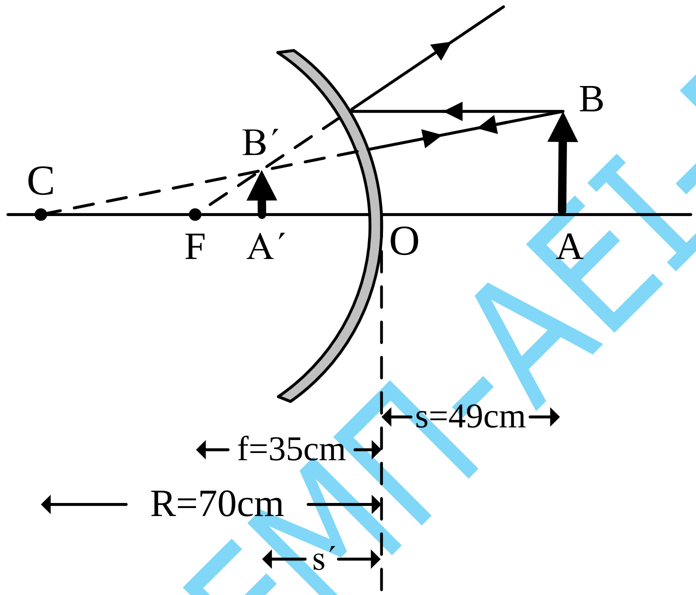
$$\Rightarrow s=\frac{R_1 d}{R_1+R_2}=\frac{50cm}{(50+90)cm}\cdot 160cm=\frac{8000}{140}cm\Rightarrow s=57{,}14cm$$

Άρα το αντικείμενο θα πρέπει να τοποθετηθεί σε απόσταση s = 57,14cm από το αριστερό κάτοπτρο.

ΘΕΜΑ 11

Ένα κερί βρίσκεται σε απόσταση s = 49cm μπροστά από κυρτό σφαιρικό κάτοπτρο ακτίνας καμπυλότητας R = 70cm. Σχεδιάζοντας την πορεία των ακτινών, βρείτε που σχηματίζεται το είδωλο και ποια είναι η μεγέθυνσή του.

Λύση



Η γεωμετρική κατασκευή της πορείας των χαρακτηριστικών ακτινών του σχήματος, δείχνει ότι το είδωλο θα είναι φανταστικό, αφού σχηματίζεται από την προέκταση των ανακλώμενων ακτίνων.
Αυτό επιβεβαιώνεται ποσοτικά και αναλυτικά με την εξίσωση των κατόπτρων, προσέχοντας ότι η ακτίνα καμπυλότητας είναι αρνητική (R = -70cm), αφού το κάτοπτρο είναι κυρτό. Έτσι είναι:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{2}{R}\Rightarrow\frac{1}{s'}=\frac{2}{R}-\frac{1}{s}=\frac{2}{-70\text{cm}}-\frac{1}{49\text{cm}}\Rightarrow\frac{1}{s'}=-0{,}03\text{cm}^{-1}-0{,}02\text{cm}^{-1}=$$
$$=-0{,}05\text{cm}^{-1}\Rightarrow s'=-20\text{cm}$$

Το αρνητικό πρόσημο της απόστασης s΄ δηλώνει ότι το είδωλο βρίσκεται πίσω από το κάτοπτρο και είναι φανταστικό.
Η εγκάρσια μεγέθυνση του ειδώλου σύμφωνα με την **(2-5)** είναι:

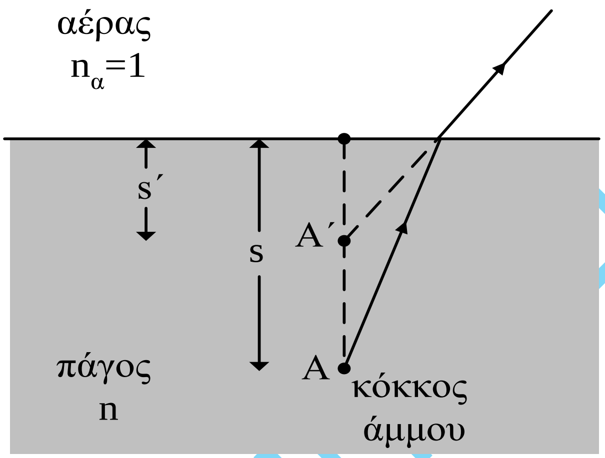
$$m=\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s}=-\frac{-20\text{cm}}{49\text{cm}}\Rightarrow m=0{,}41$$

Επειδή η μεγέθυνση m είναι θετική το είδωλο είναι ορθό κι επειδή m < 1 το είδωλο είναι σμικρυσμένο .

ΘΕΜΑ 12

Ένας κόκκος άμμου είναι ενσωματωμένος σε βάθος 2,50 cm κάτω από την επιφάνεια ενός επίπεδου στρώματος πάγου, που έχει δείκτη διάθλασης n = 1,30. Πόσο είναι το φαινόμενο βάθος του όταν παρατηρείται κατά τη διεύθυνση της κατακορύφου;

Λύση



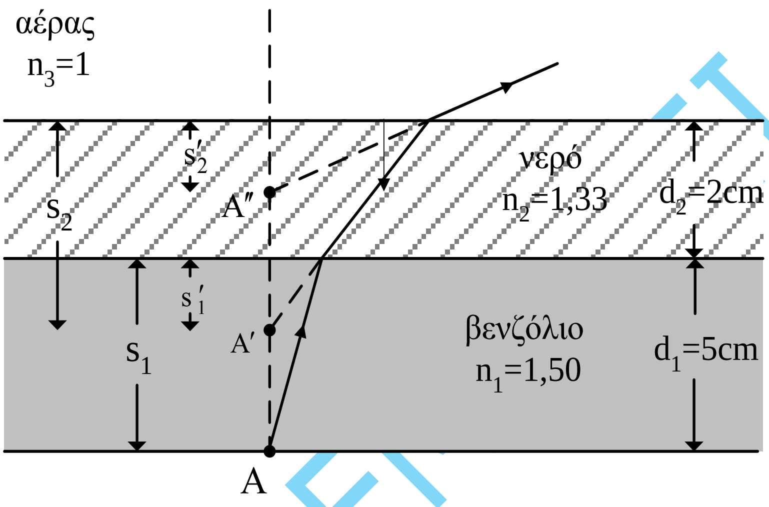
Το σύστημα αυτό πάγου – αέρα αποτελεί ένα επίπεδο δίοπτρο . Επειδή η παρατήρηση γίνεται κατά την κατακόρυφη διεύθυνση ισχύει η παραξονική προσέγγιση κι επομένως η εξίσωση του επιπέδου διόπτρου **(2-7)** που συνδέει τις αποστάσεις του φανταστικού ειδώλου s´ και του αντικειμένου s από τη διαχωριστική επιφάνεια. Έτσι το φαινόμενο βάθος του κόκκου είναι η απόσταση του ειδώλου του s´ , η οποία είναι:

$$\frac{s'}{s} = \frac{n_\alpha}{n} \Rightarrow s' = \frac{1}{n}s = \frac{2{,}5\text{cm}}{1{,}3} \Rightarrow s' = 1{,}92\text{cm}$$

ΘΕΜΑ 13

Στρώμα νερού ($n_2 = 1{,}33$) πάχους 2cm επιπλέει πάνω σε στρώμα βενζολίου ($n_1 = 1{,}50$) πάχους 5cm.Πόσο κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του στρώματος νερού φαίνεται να είναι ο πυθμένας του στρώματος βενζολίου, αν η παρατήρηση γίνεται κατά την κατακόρυφη διεύθυνση;

Λύση



Το σύστημα αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σύστημα δυο επίπεδων δίοπτρων: βενζολίου – νερού και νερού – αέρα.
Έστω ένα σημείο Α του πυθμένα του στρώματος βενζολίου. Για το επίπεδο δίοπτρο βενζολίου – νερού είναι $s_1 = d_1 = 5\text{cm}$ και η **(2-7)** δίνει:

$$\frac{s_1'}{s_1} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow s_1' = \frac{n_2}{n_1} s_1 = \frac{1{,}33}{1{,}50} \cdot 5\text{cm} \Rightarrow s_1' = 4{,}45\text{cm}$$

Στη συνέχεια για το επίπεδο δίοπτρο νερού – αέρα είναι $s_2 = s_1' + d_2 = 4{,}45\text{cm} + 2\text{cm} \Rightarrow s_2 = 6{,}45\text{cm}$, οπότε η **(2-7)** τελικά δίνει:

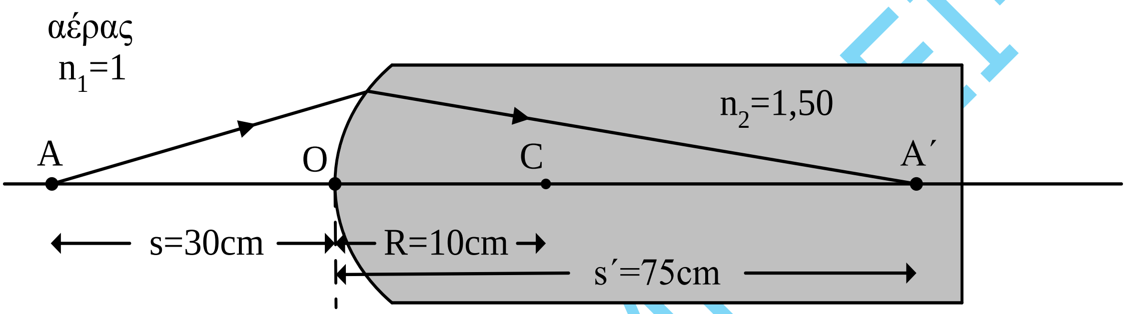
$$\frac{s_2'}{s_2} = \frac{n_3}{n_2} \Rightarrow s_2' = \frac{n_3}{n_2} s_2 = \frac{1}{1{,}33} \cdot 6{,}45\text{cm} \Rightarrow s_2' = 4{,}85\text{cm}$$

Άρα το φαινόμενο βάθος των στρωμάτων νερού και βενζολίου είναι 4,85cm.

ΘΕΜΑ 14

Κυλινδρική διαφανής ράβδος μεγάλου μήκους και δείκτη διάθλασης 1,50 έχει το ένα άκρο της επίπεδο (κάθετο στων άξονά της), ενώ το άλλο έχει σχήμα κυρτής ημισφαιρικής επιφάνειας με ακτίνα καμπυλότητας 10cm. Η ράβδος αυτή βρίσκεται στον αέρα και ένα αντικείμενο τοποθετείται στον άξονά της 30cm αριστερά της κορυφής του ημισφαιρικού άκρου.
α) Ποια είναι η θέση του τελικού ειδώλου;
β) Ποια είναι η εγκάρσια μεγέθυνση;

Λύση



α) Η ράβδος και ο περιβάλλοντας αέρας αποτελούν ένα σφαιρικό δίοπτρο και ένα αντικείμενο Α σε απόσταση s = 30cm από την κορυφή Ο σχηματίζει το είδωλό του σε απόσταση s', η οποία σύμφωνα με την εξίσωση του σφαιρικού διόπτρου **(2-10)** είναι:

$$\frac{n_1}{s}+\frac{n_2}{s'}=\frac{n_2-n_1}{R}\Rightarrow\frac{1}{30\text{cm}}+\frac{1{,}5}{s'}=\frac{1{,}5-1}{10\text{cm}}\Rightarrow\frac{1{,}5}{s'}=\frac{0{,}5}{10\text{cm}}-\frac{1}{30\text{cm}}=$$
$$=0{,}05\text{cm}^{-1}-0{,}03\text{cm}^{-1}=0{,}02\text{cm}^{-1}\Rightarrow s'=\frac{1{,}5}{0{,}02}\text{cm}\Rightarrow s'=75\text{cm}$$

Δηλαδή το είδωλο είναι πραγματικό και σχηματίζεται δεξιά της κορυφής (γιατί s΄ > 0) σε απόσταση 75cm από αυτή.

β) Η εγκάρσια μεγέθυνση του ειδώλου που σχηματίζεται σύμφωνα με την **(2-13)** είναι:

$$m=\frac{y'}{y}=-\frac{n_1 s'}{n_2 s}=-\frac{1\cdot 75\text{cm}}{1{,}5\cdot 30\text{cm}}\Rightarrow m=-1{,}66$$

Δηλαδή το είδωλο είναι μεγεθυνμένο (μεγαλύτερο από το αντικείμενο) και ανεστραμμένο (αφού m < 0).

ΘΕΜΑ 15

Το αριστερό άκρο μιας γυάλινης ράβδου μεγάλου μήκους και διαμέτρου 6cm έχει διαμορφωθεί σε κυρτή ημισφαιρική επιφάνεια ακτίνας 3cm. Ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού είναι 1,50. Προσδιορίστε τη θέση του ειδώλου αν η ράβδος βρίσκεται στον αέρα και στον άξονά της τοποθετηθεί ένα αντικείμενο στις ακόλουθες αποστάσεις αριστερά από την κορυφή του κυρτού άκρου:

α) απείρως μακριά

β) 16cm

γ) 4cm

δ) Έστω ότι η ράβδος βυθίζεται σε κάποιο διαφανές υγρό. Το είδωλο ενός αντικειμένου, που βρίσκεται στον άξονα της ράβδου και απέχει 60cm από την κορυφή του κυρτού άκρου, σχηματίζεται στο εσωτερικό της ράβδου και σε απόσταση 90cm από την κορυφή. Ποιος είναι ο δείκτης διάθλασης του υγρού;

Λύση

Η θέση του ειδώλου προσδιορίζεται από την εξίσωση σφαιρικού δίοπτρου **(2-10)**:

$$\frac{n_1}{s}+\frac{n_2}{s'}=\frac{n_2-n_1}{R} \qquad \textbf{(1)}$$

όπου $n_1=1$ ο δείκτης διάθλασης του αέρα , $n_2=1{,}5$ ο δείκτης διάθλασης της γυάλινης ράβδου, R = 3cm η ακτίνα καμπυλότητας, s η απόσταση του αντικειμένου και s' η απόσταση του ειδώλου από την κορυφή. Επομένως:

α) Για $s=\infty$ η **(1)** δίνει:

$$\frac{1}{\infty}+\frac{1{,}5}{s'}=\frac{1{,}5-1}{3cm}\Rightarrow\frac{1{,}5}{s'}=0{,}167cm^{-1}\Rightarrow s'=8{,}98cm$$

Η απόσταση αυτή αντιστοιχεί σε σχηματισμό ειδώλου στην οπισθία εστιακή απόσταση f.

β) Για s = 16cm η **(1)** δίνει:

$$\frac{1}{16cm}+\frac{1{,}5}{s'}=\frac{1{,}5-1}{3cm}\Rightarrow\frac{1{,}5}{s'}=0{,}167cm^{-1}-0{,}062cm^{-1}\Rightarrow s'=14{,}3cm$$

Δηλαδή σχηματίζεται πραγματικό είδωλο , δεξιά από την κορυφή.

γ) Για s = 4cm η **(1)** δίνει:

$$\frac{1}{4cm}+\frac{1{,}5}{s'}=\frac{1{,}5-1}{3cm}\Rightarrow\frac{1{,}5}{s'}=0{,}167cm^{-1}-0{,}25cm^{-1}\Rightarrow s'=-18{,}1cm$$

Το αρνητικό πρόσημο της s΄ σημαίνει ότι σχηματίζεται φανταστικό είδωλο, αριστερά της κορυφής.

δ) Αν n_1 είναι ο δείκτης διάθλασης του υγρού και επειδή η απόσταση του αντικειμένου είναι s = 60cm , η απόσταση του ειδώλου είναι $s' = 90\text{cm}$ και η ακτίνα καμπυλότητας είναι R = 3cm, τότε η **(2-10)** δίνει:

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R} \Rightarrow \frac{n_1}{60\text{cm}} + \frac{1{,}5}{90\text{cm}} = \frac{1{,}5 - n_1}{3\text{cm}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n_1}{60} + 0{,}017 = 0{,}5 - \frac{n_1}{3} \Rightarrow \frac{n_1}{60} + \frac{n_1}{3} = 0{,}5 - 0{,}017 \Rightarrow \frac{21}{60} n_1 = 0{,}483 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_1 = \frac{28{,}98}{21} \Rightarrow n_1 = 1{,}38$$

ΘΕΜΑ 16

Με συγκλίνοντα φακό εστιακής απόστασης f = 36cm σχηματίζεται πάνω σε διάφραγμα είδωλο εννεαπλάσιο του αντικειμένου. Να βρεθούν οι αποστάσεις ειδώλου και αντικειμένου από το φακό.

Λύση

Από τον τύπο Gauss των φακών **(2-14)** είναι:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \qquad \textbf{(1)}$$

Η μεγέθυνση του ειδώλου σύμφωνα με την **(2-15)**, (χωρίς να ληφθεί υπόψη το αρνητικό πρόσημο που σημαίνει ότι το είδωλο είναι ανεστραμμένο) είναι:

$$m=\frac{s'}{s}\Rightarrow s'=ms \qquad \textbf{(2)}$$

Οπότε η **(1)** λόγω της **(2)** δίνει:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{ms}=\frac{1}{f}\Rightarrow\frac{m+1}{ms}=\frac{1}{f}\Rightarrow s=\frac{(m+1)f}{m}$$

Κι επειδή $m = 9$ τελικά προκύπτει:

$$s=\frac{9+1}{9}\cdot 36\text{cm}\Rightarrow s=40\text{cm} \quad \text{και} \quad s'=9\cdot 40\text{cm}\Rightarrow s'=360\text{cm}$$

ΘΕΜΑ 17

Το αντικείμενο και το είδωλο ενός λεπτού φακού απέχουν L. Να αποδειχθεί ότι:

$$L = \frac{-f(m-1)^2}{m}$$

όπου f η εστιακή απόσταση του φακού και m η μεγέθυνση του ειδώλου.

Λύση

Ο τύπος των φακών δίνει : $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$ **(1)**

Ενώ από τη μεγέθυνση προκύπτει: $m = -\frac{s'}{s} \Rightarrow s' = -ms$ **(2)**

Η απόσταση αντικειμένου ειδώλου είναι: $L = s + s'$ και λόγω της **(2)** είναι:

$$L = s - ms \Rightarrow L = (1-m)s \quad \textbf{(3)}$$

Επίσης η **(1)** λόγω της **(2)** δίνει :

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{ms} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{m-1}{ms} = \frac{1}{f} \Rightarrow s = \frac{f(m-1)}{m} \quad \textbf{(4)}$$

Άρα τελικά η **(3)** λόγω της **(4)** δίνει :

$$L = (1-m)f\,\frac{(m-1)}{m} \Rightarrow L = \frac{-f(m-1)^2}{m}$$

ΘΕΜΑ 18

Ο λόγος των εστιακών αποστάσεων f_1 και f_2 δυο συγκλίνοντων φακών είναι 1:4. Αν σε απόσταση $10f_2$ από κάθε φακό τοποθετηθεί αντικείμενο, να υπολογιστεί ο λόγος των αποστάσεων των ειδώλων που σχηματίζονται.

Λύση

Η απόσταση του ειδώλου s' γενικά προκύπτει από τον τύπο των φακών:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}\Rightarrow\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}-\frac{1}{s}=\frac{s-f}{sf}\Rightarrow s'=\frac{sf}{s-f}$$

Επειδή όμως στην περίπτωση του κάθε φακού είναι $s_1=s_2=10f_2$, η τελευταία δίνει τις αποστάσεις των ειδώλων s_1' και s_2' ως :

$$s_1'=\frac{10f_2f_1}{10f_2-f_1}\qquad \text{και}\qquad s_2'=\frac{10f_2f_2}{10f_2-f_2}=\frac{10f_2^2}{9f_2}\Rightarrow s_2'=\frac{10}{9}f_2$$

Διαιρώντας τις παραπάνω κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{s_1'}{s_2'}=\frac{\dfrac{10f_2f_1}{10f_2-f_1}}{\dfrac{10}{9}f_2}=\frac{9f_1}{10f_2-f_1}=\frac{9}{10\dfrac{f_2}{f_1}-1}$$

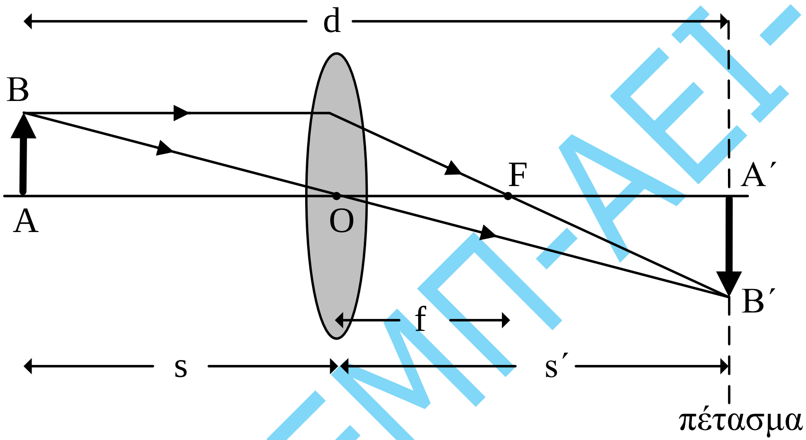
Αλλά από την εκφώνηση ο λόγος των εστιακών αποστάσεων είναι $f_2/f_1=4$, οπότε τελικά προκύπτει:

$$\frac{s_1'}{s_2'}=\frac{9}{10\cdot 4-1}\Rightarrow\frac{s_1'}{s_2'}=\frac{9}{39}$$

ΘΕΜΑ 19

Αντικείμενο απέχει από ένα πέτασμα σταθερή απόσταση d. Με ένα συγκλίνοντα φακό εστιακής απόστασης f απαιτείται να σχηματιστεί το είδωλο του αντικειμένου στο πέτασμα.
α) Σε πόση απόσταση από το αντικείμενο πρέπει να τοποθετηθεί το οπτικό κέντρο του φακού;
β) Ποια είναι η μεγέθυνση του ειδώλου;
γ) Να υπολογιστεί η μέγιστη τιμή της εστιακής απόστασης που πρέπει να έχει ο φακός.

Λύση



α) Έστω s η απόσταση του αντικειμένου και s' η απόσταση του ειδώλου από το οπτικό κέντρο. Αφού d είναι η απόσταση αντικειμένου – ειδώλου θα είναι $s' = d - s$ οπότε ο τύπος των φακών δίνει:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}\Rightarrow\frac{1}{s}+\frac{1}{d-s}=\frac{1}{f}\Rightarrow\frac{d-s+s}{s(d-s)}=\frac{1}{f}\Rightarrow df=s(d-s)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow df = sd - s^2 \Rightarrow s^2 - ds + df = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Η διερεύνηση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης **(1)** δίνει τις δυνατές αποστάσεις του αντικειμένου έτσι ώστε το είδωλο να σχηματιστεί στο πέτασμα. Για να έχει λύση η **(1)** θα πρέπει η διακρίνουσά της να είναι :

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow d^2 - 4df \geq 0 \Rightarrow d - 4f \geq 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Επομένως για $\Delta = 0$ ή $d - 4f = 0$ αντιστοιχεί σε μια λύση την s = d/2.

Ενώ για $\Delta > 0 \Rightarrow d^2 - 4f > 0$ αντιστοιχεί στις δυο λύσεις:

$$s_1 = \frac{d + \sqrt{d^2 - 4df}}{2} \quad , \qquad s_2 = \frac{d - \sqrt{d^2 - 4df}}{2}$$

που είναι συμμετρικές ως προς το μέσο της απόστασης d.

β) Αν $s = s_1$ τότε είναι $s_1' = d - s_1 = s_2$,οπότε η μεγέθυνση είναι:

$$m_1 = \frac{s_1'}{s_1} = \frac{s_2}{s_1}$$

Αν $s = s_2$ τότε είναι $s_2' = d - s_2 = s_1$, οπότε η μεγέθυνση τότε είναι:

$$m_2 = \frac{s_2'}{s_2} = \frac{s_1}{s_2}$$

Τέλος αν $s = d/2$ τότε είναι $s' = d - s = d - d/2 = d/2$ οπότε η μεγέθυνση είναι:

$$m = \frac{s'}{s} = 1$$

γ) Η μέγιστη τιμή της εστιακής απόστασης του φακού βρίσκεται από τη συνθήκη **(2)** της δευτεροβάθμιας εξίσωσης **(1)** ώστε να υπάρχει λύση. Δηλαδή:

$$d - 4f \geq 0 \Rightarrow f \leq \frac{d}{4} \qquad \text{Άρα :} \quad f_{max} = \frac{d}{4}$$

ΘΕΜΑ 20

Ένας λεπτός συγκλίνοντας φακός, με εστιακή απόσταση f, σχηματίζει ένα πραγματικό είδωλο N φορές μεγαλύτερο του αντικειμένου. Δείξτε ότι η απόσταση του ειδώλου από το οπτικό κέντρο ισούται με (N+1)f.

Λύση

Από τον **Πίνακα 2.4** φαίνεται ότι για να είναι το είδωλο πραγματικό και μεγαλύτερο του αντικειμένου θα πρέπει να είναι ανεστραμμένο, οπότε η μεγέθυνσή του θα είναι m = -N. Επομένως από τον ορισμό της μεγέθυνσης **(2-15)** προκύπτει:

$$m = -\frac{s'}{s} \Rightarrow -N = -\frac{s'}{s} \Rightarrow s = \frac{s'}{N} \qquad \textbf{(1)}$$

Άρα αν στο τύπο των φακών αντικατασταθεί η **(1)** λαμβάνεται:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{s'/N} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{N+1}{s'} = \frac{1}{f} \Rightarrow s' = (N+1)f$$

ΘΕΜΑ 21

Αμφίκυρτος φακός πρόκειται να κατασκευαστεί από γυαλί με δείκτη διάθλασης n = 1,50. Η μια επιφάνεια πρέπει να έχει διπλάσια ακτίνα καμπυλότητας από την άλλη και η εστιακή απόσταση πρέπει να είναι f = 80mm. Να υπολογιστούν οι ακτίνες καμπυλότητας του φακού.

Λύση

Από την εξίσωση των κατασκευαστών των φακών **(2-17)** και λαμβάνοντας υπόψη ότι $R_2 = -2R_1$ (αφού είναι η κοίλη επιφάνεια του αμφίκυρτου φακού) προκύπτει:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{-2R_1}\right) \Rightarrow \frac{1}{f} = (n-1)\frac{3}{2R_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{3(n-1)f}{2} = \frac{3(1,5-1)\cdot 80\text{mm}}{2} \Rightarrow R_1 = 60\text{mm}$$

Κι επομένως: $R_2 = 2R_1 = 120\text{mm}$

ΘΕΜΑ 22

α) Να υπολογιστεί ο λόγος της εστιακής απόστασης ενός λεπτού επιπεδόκυρτου φακού προς την εστιακή απόσταση ενός λεπτού αμφίκυρτου φακού, αν οι δυο φακοί έχουν τον ίδιο δείκτη διάθλασης και όλες οι σφαιρικές επιφάνειες έχουν την ίδια ακτίνα καμπυλότητας.
β) Να υπολογιστεί η εστιακή ενός αμφίκοιλου λεπτού φακού με ίσες ακτίνες καμπυλότητας R = 10cm, που είναι κατασκευασμένος από μολυβδύαλο με δείκτη διάθλασης n = 1,65.

Λύση

α) Για τον επιπεδόκυρτο φακό είναι $R_1 = +R$ και $R_2 = \infty$, οπότε αν f_1 είναι η εστιακή του απόσταση τότε από την εξίσωση των κατασκευαστών των φακών **(2-17)** προκύπτει:

$$\frac{1}{f_1} = (n-1)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\infty}\right) \Rightarrow \frac{1}{f_1} = (n-1)\frac{1}{R} \qquad \textbf{(1)}$$

Για τον αμφίκυρτο φακό είναι $R_1 = +R$ και $R_2 = -R$, οπότε αν f_2 είναι η εστιακή του απόσταση τότε η **(2-17)** δίνει:

$$\frac{1}{f_2} = (n-1)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{-R}\right) \Rightarrow \frac{1}{f_2} = (n-1)\frac{2}{R} \qquad \textbf{(2)}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις **(1)** και **(2)** προκύπτει τελικά ότι: $\frac{f_2}{f_1} = \frac{1}{2}$

β) Για έναν αμφίκοιλο φακό είναι $R_1 = -R = -10cm$ και $R_2 = +R = +10cm$, οπότε η **(2-17)** δίνει:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (n-1)\left(\frac{1}{-R} - \frac{1}{R}\right) = (n-1)\frac{(-2)}{R} = -\frac{2(1{,}65-1)}{10cm} =$$

$$= -0{,}13cm^{-1} \Rightarrow f = -7{,}7cm$$

Το αρνητικό πρόσημο της εστιακής απόστασης σημαίνει ότι ο φακός είναι αποκλίνων.

ΘΕΜΑ 23

Ένας λεπτός φακός δείκτη διάθλασης n έχει στον αέρα εστιακή απόσταση f.

α) Όταν ο φακός αυτός βυθιστεί σε υγρό δείκτη διάθλασης n_υ αποδείξτε ότι η εστιακή του απόσταση f' θα δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{f'}=\left(\frac{n}{n_\upsilon}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

δηλαδή τη γνωστή εξίσωση των κατασκευαστών των φακών , όπου αντί του n πρέπει να τεθεί το πηλίκο n/n_υ .

β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος **(α)** αποδείξτε ότι η νέα εστιακή απόσταση του φακού δίνεται από τη σχέση:

$$f'=\frac{n_\upsilon(n-1)}{n-n_\upsilon}f$$

Λύση

α) Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία της **παραγράφου 2.6** για την εξαγωγή της εξίσωσης των κατασκευαστών των φακών, αλλά θεωρώντας ότι το περιβάλλον μέσο του φακού είναι το υγρό με δείκτη διάθλασης n_υ, προκύπτει:

$$\frac{n_\upsilon}{f'}=(n-n_\upsilon)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\Rightarrow\frac{1}{f'}=\frac{n-n_\upsilon}{n_\upsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{f'}=\left(\frac{n}{n_\upsilon}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\qquad\textbf{(1)}$$

Άρα η εξίσωση **(2-17)** ισχύει για κάθε περιβάλλον μέσο του φακού, αρκεί ως δείκτης διάθλασης να λαμβάνεται ο σχετικός δείκτης διάθλασης του υλικού του φακού ως προς το περιβάλλον μέσο.

β) Η εστιακή απόσταση του φακού όταν βρίσκεται στον αέρα, σύμφωνα με την **(2-17)** είναι:

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\qquad\textbf{(2)}$$

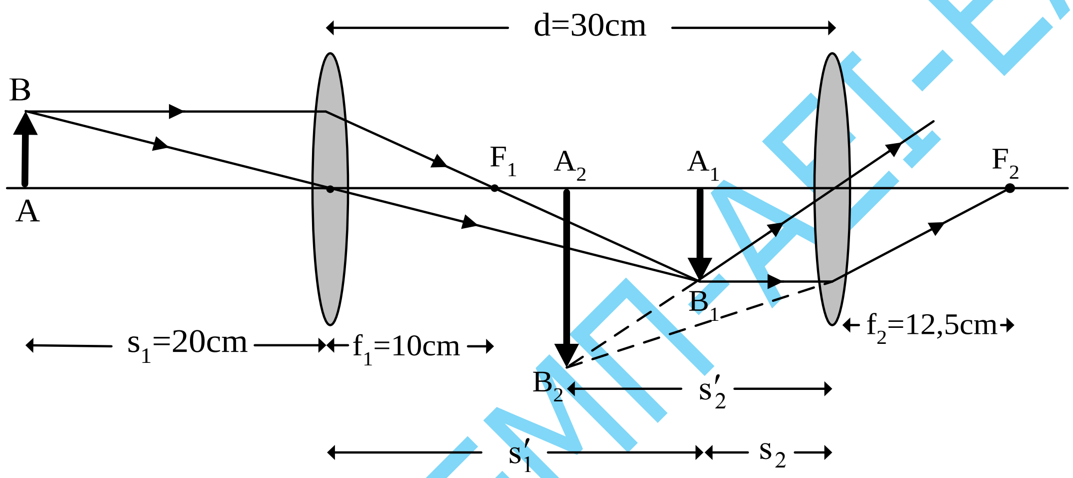
Συνεπώς διαιρώντας τις **(2)** και **(1)** κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{f'}{f}=\frac{n-1}{\frac{n}{n_\upsilon}-1}=\frac{n-1}{\frac{n-n_\upsilon}{n_\upsilon}}=\frac{n_\upsilon(n-1)}{n-n_\upsilon}\Rightarrow f'=\frac{n_\upsilon(n-1)}{n-n_\upsilon}f$$

ΘΕΜΑ 24

Αντικείμενο βρίσκεται 20cm αριστερά φακού με εστιακή απόσταση $f_1 = +10\text{cm}$. Δεύτερος φακός, εστιακής απόστασης $f_2 = +12{,}5\text{cm}$, βρίσκεται σε απόσταση $d = 30\text{cm}$ δεξιά του πρώτου φακού. Κατασκευάστε το διάγραμμα ακτίνων, χρησιμοποιώντας το είδωλο που σχηματίζεται από τον πρώτο φακό, σαν αντικείμενο για το δεύτερο και βρείτε τη θέση και τη μεγέθυνση του τελικού ειδώλου.

Λύση



Επειδή οι εστιακές αποστάσεις των φακών είναι θετικές, οι φακοί είναι συγκλίνοντες (έστω αμφίκυρτοι). Για το είδωλο A_1B_1 που σχηματίζεται από των πρώτο φακό ισχύει:

$$\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_1'}=\frac{1}{f_1}\Rightarrow\frac{1}{s_1'}=\frac{1}{f_1}-\frac{1}{s_1}=\frac{s_1-f_1}{f_1 s_1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_1'=\frac{f_1 s_1}{s_1-f_1}=\frac{10\text{cm}20\text{cm}}{20\text{cm}-10\text{cm}}\Rightarrow s_1'=20\text{cm}$$

Λαμβάνοντας τώρα το είδωλο A_1B_1 ως αντικείμενο για το δεύτερο φακό, σε απόσταση $s_2 = d - s_1' = 30\text{cm} - 20\text{cm} \Rightarrow s_2 = 10\text{cm}$ απ' αυτόν, σχηματίζεται το τελικό είδωλο A_2B_2 για το οποίο ισχύει:

$$\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_2'}=\frac{1}{f_2}\Rightarrow s_2'=\frac{f_2 s_2}{s_2-f_2}=\frac{12{,}5\text{cm}\cdot 10\text{cm}}{10\text{cm}-12{,}5\text{cm}}\Rightarrow s_2'=-50\text{cm}$$

Δηλαδή το τελικό είδωλο A_2B_2 είναι φανταστικό (αφού $s_2' < 0$)και βρίσκεται σε απόσταση 50cm αριστερά του δεύτερου φακού κι επομένως θα είναι στη θέση του αντικειμένου ΑΒ (στο σχήμα έχει σχεδιαστεί σε μια τυχαία θέση). Η μεγέθυνση του πρώτου ειδώλου A_1B_1 είναι:

$$m_1 = -\frac{s_1'}{s_1} = -\frac{20cm}{20cm} \Rightarrow m_1 = -1$$

Δηλαδή το είδωλο A_1B_1 είναι ίσο με το αντικείμενο ΑΒ και ανεστραμμένο.
Ενώ η μεγέθυνση του τελικού ειδώλου A_2B_2 είναι:

$$m_2 = -\frac{s_2'}{s_2} = -\frac{-50cm}{10cm} \Rightarrow m_2 = 5$$

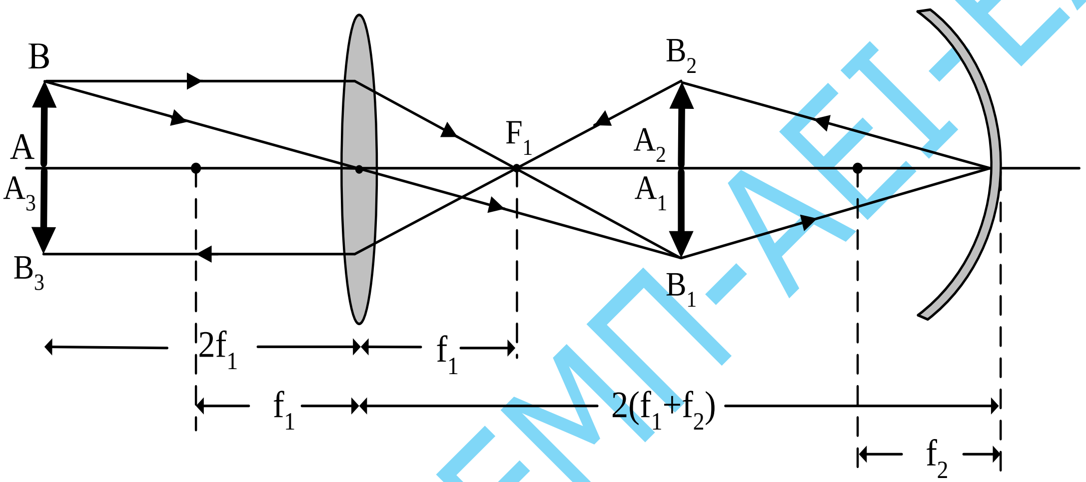
Δηλαδή το είδωλο A_2B_2 είναι 5 φορές μεγαλύτερο από το αντικείμενο του A_1B_1 και ορθό ως προς αυτό.
Άρα το τελικό είδωλο A_2B_2 είναι φανταστικό και ανεστραμμένο ως προς το αντικείμενο ΑΒ και επίσης είναι 5 φορές μεγαλύτερο από αυτό.

ΘΕΜΑ 25

Όρθιο αντικείμενο τοποθετείται σε απόσταση $2f_1$ από συγκλίνοντα φακό, εστιακής απόστασης f_1. Μετά τον φακό και σε απόσταση $2(f_1+f_2)$ βρίσκεται κοίλο κάτοπτρο εστιακής απόστασης f_2.

Σχεδιάζοντας την πορεία των ακτίνων να βρεθεί η θέση, το είδος και το μέγεθος του τελικού ειδώλου.

Λύση



Το είδωλο A_1B_1 του αντικειμένου AB από το φακό θα είναι σε θέση s_1' τέτοια ώστε:

$$\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_1'}=\frac{1}{f_1}\Rightarrow\frac{1}{2f_1}+\frac{1}{s_1'}=\frac{1}{f_1}\Rightarrow\frac{1}{s_1'}=\frac{1}{f_1}-\frac{1}{2f_1}=\frac{1}{2f_1}\Rightarrow s_1'=2f_1$$

και η μεγέθυνσή του είναι: $m_1=-\frac{s_1'}{s_1}=-\frac{2f_1}{2f_1}\Rightarrow m_1=-1$

Άρα το είδωλο A_1B_1 είναι πραγματικό, ανεστραμμένο και ίσο με το αντικείμενο AB.
Το είδωλο A_1B_1 αποτελεί αντικείμενο για το κάτοπτρο σε απόσταση $s_2=2f_2$ κι επομένως θα σχηματίζει είδωλο A_2B_2 σε σημείο τέτοιο ώστε:

$$\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_2'}=\frac{1}{f_2}\Rightarrow\frac{1}{2f_2}+\frac{1}{s_2'}=\frac{1}{f_2}\Rightarrow s_2'=2f_2$$

με μεγέθυνση: $m_2=-\frac{s_2'}{s_2}=-\frac{2f_2}{2f_2}\Rightarrow m_2=-1$

Δηλαδή το είδωλο A_2B_2 σχηματίζεται στο ίδιο σημείο με το αντικείμενό του A_1B_1, είναι ίσο με αυτό και ανεστραμμένο ως προς αυτό.

Τελικά το είδωλο A_3B_3 του αντικειμένου A_2B_2 μέσα από το φακό θα είναι στη θέση αυτή για την οποία:

$$\frac{1}{s_3}+\frac{1}{s_3'}=\frac{1}{f_1}\Rightarrow\frac{1}{2f_1}+\frac{1}{s_3'}=\frac{1}{f_1}\Rightarrow s_3'=2f_1$$

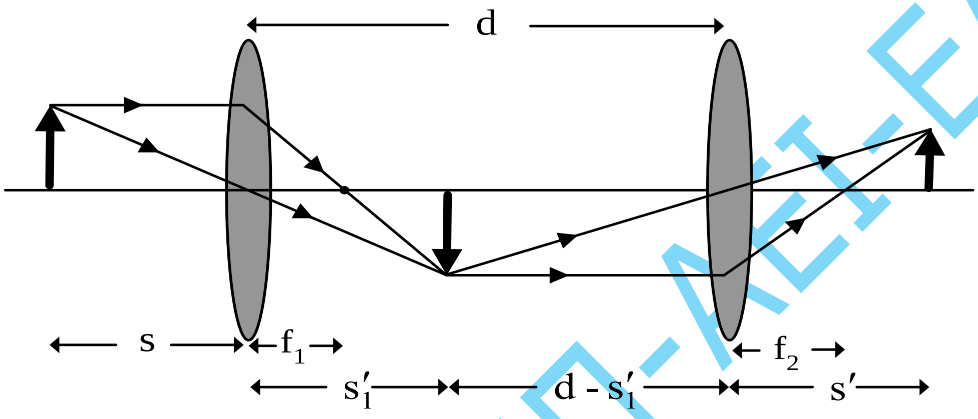
με μεγέθυνση : $m_3=-\frac{s_3'}{s_3}=-\frac{2f_1}{2f_1}\Rightarrow m_3=-1$

Δηλαδή το τελικό είδωλο A_3B_3 σχηματίζεται στην ίδια θέση με το αρχικό αντικείμενο ΑΒ, είναι ίσο με αυτό και ανεστραμμένο ως προς αυτό.

ΘΕΜΑ 26

Να αποδειχθεί ότι η ισχύς ενός συστήματος δυο φακών σε επαφή, ισούται με το άθροισμα των ισχύων των δυο φακών.

Λύση



Έστω ένα σύστημα δυο φακών με εστιακές αποστάσεις f_1 και f_2, που βρίσκονται σε απόσταση d μεταξύ τους. Αν μπροστά από τον πρώτο φακό τοποθετηθεί ένα αντικείμενο σε απόσταση s, θα σχηματισθεί ένα είδωλο σε απόσταση s_1' από αυτόν σε κάποια θέση μεταξύ των δύο φακών . Αν τώρα το είδωλο αυτό αποτελεί αντικείμενο για το δεύτερο φακό σε απόσταση $d - s_1'$ από αυτόν, θα σχηματισθεί το τελικό είδωλο σε απόσταση s' από αυτόν. Η πορεία των ακτίνων φαίνεται στο σχήμα και από τον τύπο των φακών για κάθε ένα από τους φακούς προκύπτει:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s_1'} = \frac{1}{f_1} \qquad \text{και} \qquad \frac{1}{d - s_1'} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f_2}$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω εξισώσεις κατά μέλη και θεωρώντας τους φακούς σε επαφή , δηλαδή $d = 0$ προκύπτει:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

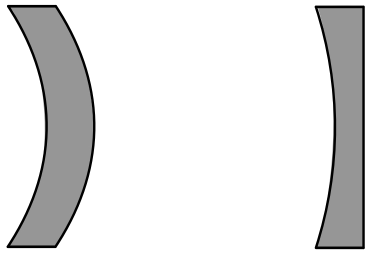
Αλλά το πρώτο μέλος της παραπάνω εξίσωσης εκφράζει την ισχύ του συστήματος των φακών $I = 1/f$. Άρα:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \qquad \text{ή} \qquad I = I_1 + I_2.$$

ΘΕΜΑ 27

Ένας κοιλόκυρτος λεπτός φακός δείκτη διάθλασης $n_1 = 1{,}5$ με ακτίνες καμπυλότητας $R_1 = 5\text{cm}$ και $R_2 = 10\text{cm}$ βρίσκεται σε επαφή με έναν επιπεδόκοιλο λεπτό φακό δείκτη διάθλασης $n_2 = 1{,}6$, που έχει ακτίνα καμπυλότητας $R = 6\text{cm}$. Υπολογίστε την ολική εστιακή απόσταση και την ολική ισχύ του συστήματος των δυο φακών.

Λύση



Για τον κοιλόκυρτο φακό είναι $R_1 = +5\text{cm}$ και $R_2 = +10\text{cm}$, οπότε η εξίσωση των κατασκευαστών των φακών δίνει:

$$\frac{1}{f_1} = (n_1 - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (1{,}5 - 1)\left(\frac{1}{5\text{cm}} - \frac{1}{10\text{cm}}\right) \Rightarrow \frac{1}{f_1} = \frac{1}{20}\text{cm}^{-1}$$

Για τον επιπεδόκοιλο φακό είναι $R_1 = +6\text{cm}$ και $R_2 = \infty$ οπότε:

$$\frac{1}{f_2} = (n_2 - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (1{,}6 - 1)\left(\frac{1}{6\text{cm}} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{0{,}6}{6\text{cm}} \Rightarrow \frac{1}{f_2} = \frac{1}{10}\text{cm}^{-1}$$

Άρα η ολική εστιακή απόσταση f του συστήματος ικανοποιεί τη σχέση:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{10}\right)\text{cm}^{-1} = \frac{3}{20}\text{cm}^{-1} \Rightarrow f = 6{,}67\text{cm}$$

και η ολική ισχύς I του συστήματος είναι:

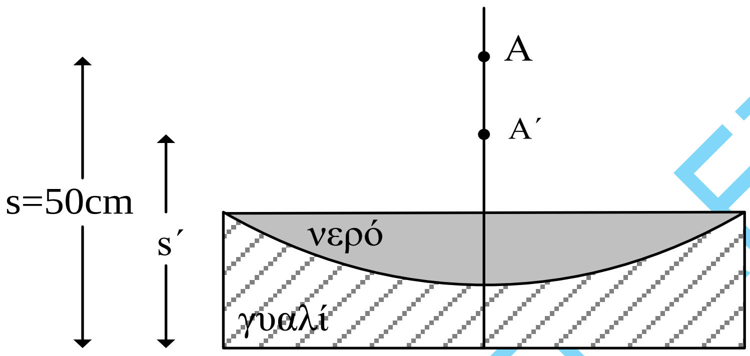
$$I=\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{3}{20}cm^{-1}\Rightarrow I=0{,}15cm^{-1}=15m^{-1}=15dp.$$

Σημείωση: Είναι : $1cm=10^{-2}m\Rightarrow\frac{1}{1cm}=\frac{1}{10^{-2}m}\Rightarrow 1cm^{-1}=10^{2}m^{-1}$

ΘΕΜΑ 28

Επιπεδόκοιλος φακός από γυαλί με ακτίνα καμπυλότητας $R = 20\text{cm}$ είναι οριζόντιος και το κοίλο μέρος του είναι γεμάτο με νερό. Ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού είναι 1,5 και του νερού 1,33. Που σχηματίζεται το είδωλο ενός φωτεινού σημείου το οποίο βρίσκεται στον κύριο άξονα του φακού και σε απόσταση 50cm από αυτόν;

Λύση



Για τον επιπεδόκοιλο φακό από γυαλί είναι $R_1 = -20\text{cm}$ και $R_2 = \infty$, οπότε η ισχύς του σύμφωνα με την **(2-17)** είναι:

$$\frac{1}{f_1} = (n_\gamma - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (1{,}5 - 1)\left(\frac{1}{-20\text{cm}} - \frac{1}{\infty}\right) \Rightarrow \frac{1}{f_1} = \frac{-1}{40}\text{cm}^{-1}$$

Το νερό που γεμίζει το πάνω μέρος του προηγούμενου φακού σχηματίζει έναν επιπεδόκυρτο φακό με ακτίνες καμπυλότητας $R_1 = \infty$ και $R_2 = -20\text{cm}$, οπότε η ισχύς του είναι σύμφωνα με την **(2-17)**:

$$\frac{1}{f_2} = (n_v - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (1{,}33 - 1)\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{-20\text{cm}}\right) \Rightarrow \frac{1}{f_2} = \frac{1}{60}\text{cm}^{-1}$$

Επειδή το γυαλί και το νερό αποτελούν ένα σύστημα φακών, θα ισχύει για την ισχύ του συστήματος :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \left(\frac{-1}{40} + \frac{1}{60}\right)\text{cm}^{-1} = \frac{-20}{2400}\text{cm}^{-1} \Rightarrow \frac{1}{f} = -\frac{1}{120}\text{cm}^{-1}$$

Άρα αφού το αντικείμενο Α βρίσκεται σε απόσταση s = 50cm από το σύστημα των φακών, τότε σύμφωνα με τον τύπο των φακών το είδωλό του σχηματίζεται σε απόσταση s΄ τέτοια ώστε:

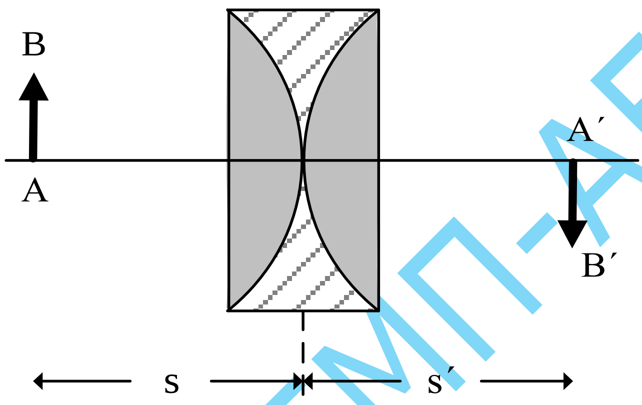
$$\frac{1}{f}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}\Rightarrow\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}-\frac{1}{s}=\left(-\frac{1}{120}-\frac{1}{50}\right)\text{cm}^{-1}=\frac{-170}{6000}\text{cm}^{-1}\Rightarrow s'=-35{,}3\text{cm}$$

Δηλαδή το είδωλο Α΄ είναι φανταστικό και σχηματίζεται στην πλευρά του αντικειμένου.

ΘΕΜΑ 29

Δυο επιπεδόκυρτοι φακοί, με τον ίδιο δείκτη διάθλασης n και ακτίνες καμπυλότητας R_1 και R_2, εφάπτονται με τις κυρτές τους επιφάνειες. Στο διάκενο που σχηματίζεται ανάμεσα στους φακούς τοποθετείται υγρό με δείκτη διάθλασης $n'(n' < n)$. Αντικείμενο ΑΒ τοποθετείται κάθετα στον κοινό κύριο άξονα των φακών. Αν το είδωλο του αντικειμένου που σχηματίζεται είναι ίσο με το αντικείμενο, να βρεθεί η σχέση που συνδέει την απόσταση του αντικειμένου από το σύστημα των φακών με της ακτίνες και τους δείκτες διάθλασης.

Λύση



Οι ισχείς των δύο επιπεδόκυρτων φακών είναι αντίστοιχα:

$$\frac{1}{f_1} = (n-1)\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{-R_1}\right) \Rightarrow \frac{1}{f_1} = (n-1)\frac{1}{R_1}$$

και $$\frac{1}{f_2} = (n-1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{\infty}\right) \Rightarrow \frac{1}{f_2} = (n-1)\frac{1}{R_2}$$

Το υγρό σχηματίζει έναν αμφίκοιλο φακό και η ισχύς του είναι:

$$\frac{1}{f_3} = (n'-1)\left(\frac{1}{-R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow \frac{1}{f_3} = -(n'-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Επομένως η ισχύς του συστήματος των τριών αυτών φακών είναι:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+\frac{1}{f_3}=(n-1)\frac{1}{R_1}+(n-1)\frac{1}{R_2}-(n'-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{f}=(n-n')\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

Επειδή $n'<n$ είναι $n-n'>0$, οπότε η εστιακή απόσταση f είναι θετική $(f>0)$ κι επομένως το σύστημα συμπεριφέρεται ως ένας συγκλίνοντας φακός εστιακής απόστασης :

$$f=\frac{1}{(n-n')\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)} \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά από την εκφώνηση το είδωλο Α΄Β΄ είναι ίσο με το αντικείμενο ΑΒ, δηλαδή η μεγέθυνση είναι:

$$m=\frac{A'B'}{AB}=\frac{s'}{s}=1\Rightarrow s'=s \qquad \textbf{(2)}$$

Άρα ο τύπος των φακών θα δώσει για την απόσταση του αντικειμένου:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}\overset{(2)}{\Rightarrow}\frac{1}{s}+\frac{1}{s}=\frac{1}{f}\Rightarrow\frac{2}{s}=\frac{1}{f}\Rightarrow s=2f\overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow s=\frac{2}{(n-n')\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}$$

ΘΕΜΑ 30

Δυο λεπτοί φακοί, ο έναν συγκλίνων και ο άλλος αποκλίνων, με ίδια απόλυτη τιμή εστιακής απόστασης 15cm έχουν κοινό άξονα. Η απόσταση μεταξύ τους είναι 60cm.
Ένα αντικείμενο ΑΒ με ύψος 5mm τοποθετείται σε απόσταση 25cm από το πρώτο (συγκλίνοντα) φακό.

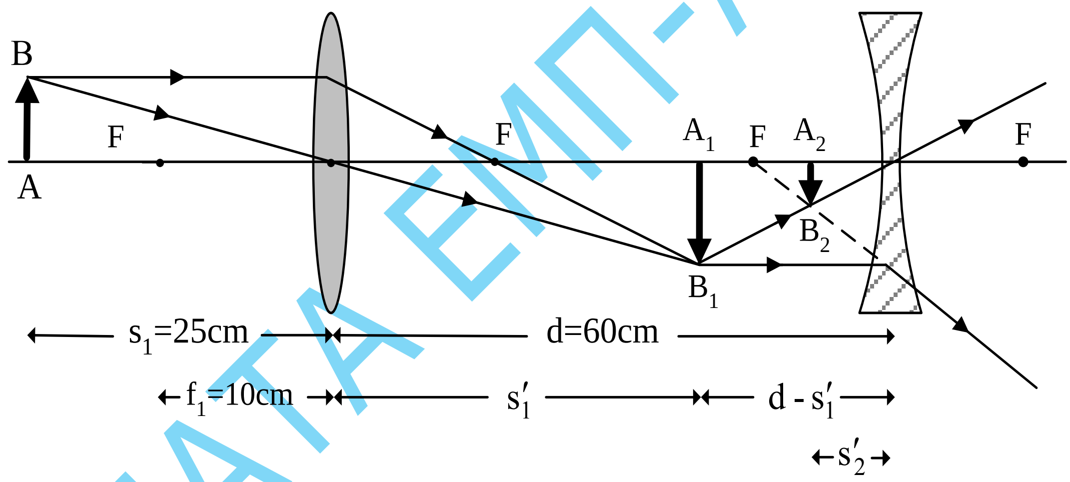
α) Πόσο απέχει το τελικό είδωλο από το πρώτο φακό;

β) Το τελικό είδωλο είναι πραγματικό ή φανταστικό;

γ) Πόσο ύψος έχει το τελικό είδωλο; Είναι ορθό ή ανεστραμμένο;

(Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



α) Η θέση του ειδώλου A_1B_1 του αντικειμένου από το συγκλίνοντα φακό προσδιορίζεται από τον τύπο των φακών ως εξής:

$$\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_1'}=\frac{1}{f}\Rightarrow\frac{1}{s_1'}=\frac{1}{f}-\frac{1}{s_1}=\frac{1}{15}-\frac{1}{25}=\frac{10}{375}\Rightarrow s_1'=37{,}5\text{cm}$$

Το είδωλο αυτό A_1B_1 αποτελεί το αντικείμενο για τον αποκλίνοντα φακό, το οποίο απέχει από αυτόν απόσταση :

$$s_2=d-s_1'=60\text{cm}-37{,}5\text{cm}\Rightarrow s_2=22{,}5\text{cm}$$

και σχηματίζει το τελικό είδωλο A_2B_2 σε τέτοια θέση ώστε:

$$\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_2'}=\frac{1}{f}\Rightarrow\frac{1}{s_2'}=\frac{1}{f}-\frac{1}{s_2}=\frac{1}{-15}-\frac{1}{22{,}5}=\frac{-37{,}5}{337{,}5}\Rightarrow s_2'=-9\text{cm}$$

Άρα το τελικό είδωλο σχηματίζεται στην αριστερή πλευρά του αποκλίνοντα φακού και απέχει από τον συγκλίνοντα φακό απόσταση :

$$s'=d-s_2'=60\text{cm}-9\text{cm}\Rightarrow s'=51\text{cm}$$

β) Το τελικό είδωλο A_2B_2 είναι φανταστικό γιατί σχηματίζεται από τις προεκτάσεις των διαθλώμενων ακτίνων από τον αποκλίνοντα φακό, όπως φαίνεται στο σχήμα και επίσης η απόσταση s_2' είναι αρνητική όπως υπολογίστηκε προηγουμένως.

γ) Η μεγέθυνση του ειδώλου A_1B_1 είναι:

$$m_1=-\frac{s_1'}{s_1}=-\frac{37{,}5\text{cm}}{25\text{cm}}\Rightarrow m_1=-1{,}5$$

Δηλαδή το είδωλο A_1B_1 είναι 1,5 φορές μεγαλύτερο του αντικειμένου ΑΒ και ανεστραμμένο ως προς αυτό.

Η μεγέθυνση του ειδώλου A_2B_2 είναι:

$$m_2=-\frac{s_2'}{s_2}=-\frac{-9\text{cm}}{22{,}5\text{cm}}\Rightarrow m_2=0{,}4$$

Δηλαδή το είδωλο A_2B_2 είναι ίσο με το 0,4 του A_1B_1 και είναι ορθό ως προς το A_1B_1 .Άρα το τελικό είδωλο A_2B_2 είναι ανεστραμμένο ως προς το αρχικό αντικείμενο ΑΒ και είναι ίσο με το $m_1m_2=1{,}5\cdot 0{,}4=0{,}6$ του ΑΒ. Δηλαδή:

$$\frac{A_2B_2}{AB}=0{,}6\Rightarrow A_2B_2=0{,}6AB=0{,}6\cdot 5\text{mm}\Rightarrow A_2B_2=3\text{mm}$$

Άρα το ύψος του τελικού ειδώλου A_2B_2 είναι 3mm.