ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

EMC²

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Θέμα 1

Ξεκινώντας από τη διαφορική μορφή των εξισώσεων Maxwell, να καταλήξετε στην ολοκληρωτική τους μορφή.

Λύση

α) 1η εξίσωση Maxwell (νόμος Gauss για τον ηλεκτρισμό): $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_o$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω εντός όγκου V προκύπτει:

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,dV=\frac{1}{\varepsilon_o}\int_V \rho dV$$

Και σύμφωνα με το θεώρημα Gauss ισχύει: $\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,dV=\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$

Άρα: $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_o}\int_V \rho dV$ (ολοκληρωτική μορφή νόμου Gauss).

β) 2η εξίσωση Maxwell (νόμος Gauss για το μαγνητισμό): $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$

Όπως και στην παραπάνω περίπτωση, ολοκληρώνοντας εντός όγκου V και εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss προκύπτει:

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{B}dV=\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$

γ) 3η εξίσωση Maxwell (νόμος Faraday): $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σε επιφάνεια S προκύπτει:

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{S}=-\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

Και σύμφωνα με το θεώρημα Stokes ισχύει: $\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{S}=\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$

Άρα: $\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$

δ) 4η εξίσωση Maxwell (νόμος Ampere – Maxwell):

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_o\vec{J} + \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σε επιφάνεια S προκύπτει:

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{S} = \mu_o\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} + \mu_o\varepsilon_o\int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

Κι επειδή σύμφωνα με το θεώρημα Stokes ισχύει : $\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{S} = \oint_c \vec{B}\cdot d\vec{\ell}$

Τελικά : $\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_o\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} + \mu_o\varepsilon_o\int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = \mu_o(I + I_d)$

όπου I_d το ρεύμα μετατόπισης.

Θέμα 2

Στο χώρο υπάρχει το χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}(t) = \alpha t\hat{z}$, όπου α σταθερά. Να αποδειχθεί ότι το ηλεκτρικό πεδίο στη θέση $\vec{r}$ είναι :

$$\vec{E} = -\frac{1}{2}\alpha\hat{z}\times\vec{r}$$

Λύση

Αρκεί να δειχθεί ότι τα δοθέντα πεδία επαληθεύουν την 3η εξίσωση Maxwell.

Δηλαδή : $$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \textbf{(1)}$$

Είναι : $$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \alpha\hat{z} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{2}\alpha\hat{z}\times\vec{r} = -\frac{1}{2}\alpha\hat{z}\times(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}) = -\frac{\alpha}{2}(x\hat{y}-y\hat{x})$$

Άρα : $$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\alpha}{2}\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ -y & x & 0\end{vmatrix} = 0\hat{x} - 0\hat{y} - \frac{\alpha}{2}\left[\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right]\hat{z} =$$

$$= -\frac{\alpha}{2}[1-(-1)]\hat{z} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\alpha\hat{z} \qquad \textbf{(3)}$$

Συνεπώς συμπεραίνεται ότι λόγω των **(2)** και **(3)** επαληθεύεται η **(1)**, δηλαδή το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}(t) = \alpha t\hat{z}$ δημιουργεί στη θέση $\vec{r}$ το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = -\frac{1}{2}\alpha\hat{z}\times\vec{r}$.

Θέμα 3

Έστω το ηλεκτρικό πεδίο με συνιστώσες :

$$E_x = \frac{E_o}{\alpha^2}x^2 \qquad \text{και} \qquad E_z = \frac{-2E_o}{\alpha^2}(x+y)z$$

α) Να υπολογιστεί η συνιστώσα E_y, υποθέτοντας ότι $\rho = 0$ και ότι η E_y είναι συνάρτηση μόνο του y.

β) Να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}(t)$, που δημιουργεί αυτό το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$.

γ) Να υπολογιστεί η πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}$, που δημιουργεί το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}(t)$.

δ) Να ελεγχθεί αν ισχύει ότι $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$.

Λύση

α) Σύμφωνα με τη διαφορική μορφή της 1ης εξίσωσης Maxwell κι επειδή $\rho = 0$ προκύπτει :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2E_o}{\alpha^2}x + \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{2E_o}{\alpha^2}(x+y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{2E_o}{\alpha^2}y = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{2E_o}{\alpha^2}y$$

Επειδή η E_y είναι συνάρτηση μόνο του y, ολοκληρώνοντας την παραπάνω προκύπτει :

$$\int_0^{E_y} dE_y = \frac{2E_o}{\alpha^2}\int_0^{y} y\,dy \Rightarrow E_y = \frac{E_o}{\alpha^2}y^2$$

β) Επειδή $\vec{\nabla}\times\vec{E} \neq 0$ το ηλεκτρικό πεδίο αυτό δεν είναι ηλεκτροστατικό κι επομένως είναι επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο, δηλαδή δημιουργείται από τη χρονική μεταβολή κάποιου μαγνητικού πεδίου $\vec{B}(t)$. Σύμφωνα με την 3η εξίσωση Maxwell (νόμο Faraday) είναι :

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά :

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=\frac{E_o}{\alpha^2}\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ x^2 & y^2 & -2(x+y)z\end{vmatrix}=\frac{E_o}{\alpha^2}\left[-2z\hat{x}+2z\hat{y}\right]=\frac{-2E_oz}{\alpha^2}(\hat{x}-\hat{y})$$

Άρα η **(1)** δίνει :

$$-\frac{2E_oz}{\alpha^2}(\hat{x}-\hat{y})=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Rightarrow\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\frac{2E_oz}{\alpha^2}(\hat{x}-\hat{y})$$

Κι ολοκληρώνοντας την παραπάνω ως προς t προκύπτει :

$$\int d\vec{B}=\frac{2E_oz}{\alpha^2}(\hat{x}-\hat{y})\int dt\Rightarrow\vec{B}(t)=\frac{2E_ozt}{\alpha^2}(\hat{x}-\hat{y}) \qquad \textbf{(2)}$$

γ) Σύμφωνα με τη διαφορική μορφή της 4ης εξίσωσης Maxwell προκύπτει :

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_o\vec{J}+\mu_o\varepsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Αλλά : $\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0$ οπότε :

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_o\vec{J}\Rightarrow\vec{J}=\frac{\vec{\nabla}\times\vec{B}}{\mu_o}=\frac{2E_ot}{\mu_o\alpha^2}\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ z & -z & 0\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\vec{J}=\frac{2E_ot}{\mu_o\alpha^2}(\hat{x}+\hat{y})$$

δ) Σύμφωνα με τη σχέση **(2)** εύκολα προκύπτει ότι :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0$$

Θέμα 4

Μέσα από μια κυκλική επιφάνεια ακτίνας R διέρχεται το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = E_o \sin\omega t\hat{z}$. Να υπολογιστεί η ελάχιστη κυκλική συχνότητα ω του $\vec{E}$ ώστε το πλάτος της ταλάντωσης του μαγνητικού πεδίου, που δημιουργείται να είναι B_o.

Λύση

Σύμφωνα με την 4η εξίσωση Maxwell ισχύει :

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_o\vec{J} + \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \textbf{(1)}$$

Επειδή όμως το μαγνητικό πεδίο προέρχεται αποκλειστικά από τη χρονική μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου, δηλαδή $\vec{J} = 0$, η **(1)** γράφεται :

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \textbf{(2)}$$

Ολοκληρώνοντας την **(2)** επί της κυκλικής επιφάνειας S και εν συνεχεία εφαρμόζοντας το θεώρημα Stokes προκύπτει :

$$\int_S(\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{S} = \mu_o\varepsilon_o\int_S\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \Rightarrow \int_c\vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial E}{\partial t}\int_S dS \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B2\pi R = \mu_o\varepsilon_o E_o\omega\cos\omega t\,\pi R^2 \Rightarrow B(t) = \frac{\mu_o\varepsilon_o E_o\omega R}{2}\cos\omega t \qquad \textbf{(3)}$$

Συνεπώς για να είναι το πλάτος του μαγνητικού πεδίου B_o, σύμφωνα με την **(3)** θα πρέπει να ισχύει :

$$B_o = \frac{\mu_o\varepsilon_o E_o\omega R}{2} \Rightarrow \omega = \frac{2B_o}{\mu_o\varepsilon_o E_o R}$$

Θέμα 5

Ένας επίπεδος πυκνωτής έχει κυκλικούς οπλισμούς ακτίνας R, που βρίσκονται σε απόσταση ℓ μεταξύ τους ($\ell << R$). Ο πυκνωτής αυτός φορτίζεται με ρεύμα έντασης I.

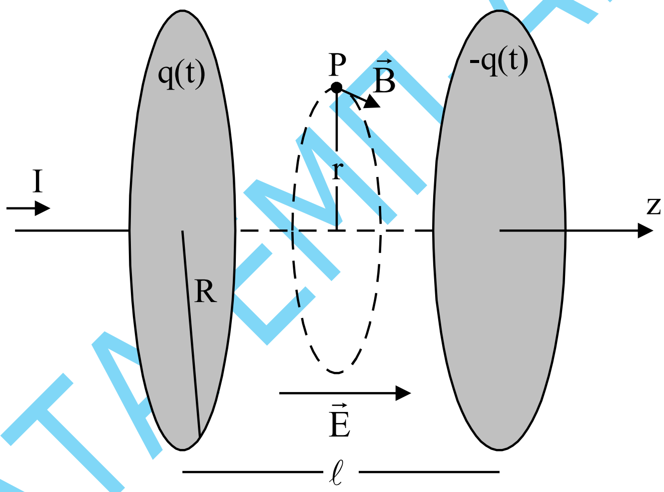
α) Να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο στο χώρο μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή.

β) Να υπολογιστεί το διάνυσμα Poynting $\vec{S}$.

γ) Αποδείξτε ότι ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η ηλεκτροστατική ενέργεια είναι :

$$\int_S \vec{S}\cdot d\vec{S} = \pi R^2 \ell \frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon_o E^2}{2}\right)$$

Λύση



α) Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα φορτίζει τους οπλισμούς του πυκνωτή με ίσα και αντίθετα φορτία. Έστω ότι τη χρονική στιγμή t ο θετικός οπλισμός φέρει φορτίο q(t) ή επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma(t) = q(t)/S = q(t)/\pi R^2$.

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδενικό στο χώρο έξω από τους οπλισμούς και ομογενές στο χώρο μεταξύ των οπλισμών και ισούται με :

$$\vec{E} = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_o}\hat{z} = \frac{q(t)}{\varepsilon_o \pi R^2}\hat{z} \qquad \textbf{(1)}$$

Σύμφωνα με τη διαφορική μορφή της $4^{ης}$ εξίσωσης Maxwell, σε τυχαίο σημείο P του χώρου μεταξύ των οπλισμών, που απέχει απόσταση r από τον άξονα του πυκνωτή, η πυκνότητα ρεύματος είναι $\vec{J} = 0$ και προκύπτει :

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_o\varepsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\overset{(1)}{\Rightarrow}\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_o\varepsilon_o\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{q(t)}{\varepsilon_o\pi R^2}\hat{z}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_o\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{q(t)}{\pi R^2}\right)\hat{z}\Rightarrow\vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{\mu_o}{\pi R^2}\frac{\partial q(t)}{\partial t}\hat{z}=\frac{\mu_o I}{\pi R^2}\hat{z}\qquad\textbf{(2)}$$

όπου $I=\partial q(t)/\partial t$ η ένταση του ρεύματος.

Ολοκληρώνοντας την **(2)** επί της κυκλικής επιφάνειας S ακτίνας r κι εφαρμόζοντας το θεώρημα Stokes προκύπτει :

$$\oint_S(\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{S}=\oint_S\frac{\mu_o I}{\pi R^2}\hat{z}\cdot d\vec{S}\Rightarrow\oint_c\vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\frac{\mu_o I}{\pi R^2}\oint_S\hat{z}\cdot dS\hat{z}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow B2\pi r=\frac{\mu_o I}{\pi R^2}\pi r^2\Rightarrow B=\frac{\mu_o I}{2\pi R^2}r\quad\text{ή διανυσματικά}\quad\vec{B}=\frac{\mu_o I}{2\pi R^2}r\hat{\varphi}\qquad\textbf{(3)}$$

Δηλαδή το μαγνητικό πεδίο είναι εφαπτομενικό επί της καμπύλης c και κάθετο στη διεύθυνση z, όπως προκύπτει από τη **(2)**.

β) Σύμφωνα με τον ορισμό και λόγω των **(1)**, **(3)** το διάνυσμα Poynting είναι :

$$\vec{S}=\frac{1}{\mu_o}\vec{E}\times\vec{B}=\frac{1}{\mu_o}\frac{q(t)}{\varepsilon_o\pi R^2}\hat{z}\times\frac{\mu_o I}{2\pi R^2}r\hat{\varphi}\Rightarrow\vec{S}=\frac{q(t)Ir}{2\varepsilon_o\pi^2R^4}\hat{r}\qquad\textbf{(4)}$$

Δηλαδή το άνυσμα Poynting έχει ακτινική διεύθυνση και φορά προς το εξωτερικό του πυκνωτή.

γ) Επειδή ροή ενέργειας υφίσταται μόνο από την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου, που ορίζουν οι οπλισμοί του πυκνωτή, ο ρυθμός μεταβολής της ηλεκτροστατικής ενέργειας προκύπτει από την ολοκλήρωση του διανύσματος Poynting $\vec{S}$ επί της παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου ακτίνας R και μήκους ℓ. Δηλαδή :

$$\int_{S_{\pi\alpha\rho\alpha\pi\lambda.}} \vec{S}\cdot d\vec{S} \overset{(4)}{=} \int_{S_{\pi\alpha\rho\alpha\pi\lambda.}} \frac{q(t)IR}{2\varepsilon_o\pi^2R^4}\hat{r}\cdot dS\hat{r} = \frac{q(t)I}{2\varepsilon_o\pi^2R^3}\int_S dS =$$

$$= \frac{q(t)I}{2\varepsilon_o\pi^2R^3}2\pi R\ell = \frac{q(t)I}{\varepsilon_o\pi R^2}\ell = \frac{\ell}{\varepsilon_o\pi R^2}q(t)\frac{dq(t)}{dt} = \frac{\ell}{\varepsilon_o\pi R^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2(t)}{2}\right) \qquad \textbf{(5)}$$

Αλλά από την **(1)** είναι : $q(t) = \varepsilon_o\pi R^2E$, οπότε η **(5)** γίνεται :

$$\int_{S_{\pi\alpha\rho\alpha\pi\lambda.}} \vec{S}\cdot d\vec{S} = \pi R^2\ell\frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon_oE^2}{2}\right)$$

Θέμα 6

Να αποδειχθεί και να δοθεί η φυσική σημασία της εξίσωσης της συνέχειας, καθώς επίσης να αποδειχτεί αυτή μέσω των εξισώσεων Maxwell.

Λύση

Το ρεύμα που διαπερνά μια κλειστή επιφάνεια S είναι :

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Συγκεκριμένα το ολικό φορτίο ανά μονάδα χρόνου που εξέρχεται από τον όγκο V που ορίζει η επιφάνεια S, σύμφωνα με το θεώρημα Gauss είναι :

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J}\, dV$$

Αλλά επειδή το φορτίο διατηρείται, η εκροή φορτίου από μια κλειστή επιφάνεια συντελείται εις βάρος του εναπομείναντος μέσα της φορτίου. Δηλαδή :

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J}\, dV = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dV \Rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J}\, dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \qquad \textbf{(1)}$$

Το αρνητικό πρόσημο αντανακλά το γεγονός ότι μια προς τα έξω ροή μειώνει το φορτίο που παραμένει στον όγκο V.

Επειδή η σχέση **(1)** ισχύει για οποιονδήποτε όγκο, συμπεραίνεται ότι :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί την **εξίσωση της συνέχειας** και είναι η μαθηματική διατύπωση της αρχής διατήρησης του φορτίου.

Σύμφωνα με τη διαφορική μορφή της $4^{ης}$ εξίσωσης Maxwell είναι :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \textbf{(2)}$$

Αλλά από την διανυσματική ταυτότητα :

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \mu_o\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \mu_o\varepsilon_o\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_o\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

Και από την 1$^{\eta}$ εξίσωση Maxwell ισχύει : $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_o$ οπότε η **(3)** γίνεται :

$$\mu_o\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_o}\right) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \qquad \text{(εξίσωση συνέχειας)}$$

Θέμα 7

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση της συνέχειας στην περίπτωση ενός επίπεδου πυκνωτή επιφάνειας οπλισμών S που φορτίζεται με ρεύμα I, να αποδείξετε ότι το ρεύμα I ισούται με το ρεύμα μετατόπισης I_d του Maxwell.

Λύση

Σύμφωνα με την εξίσωση συνέχειας είναι : $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω στον όγκο V μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή προκύπτει :

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\,dV+\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dV=0 \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά σύμφωνα με το θεώρημα Gauss ισχύει : $\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\,dV=\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$

Οπότε η **(1)** δίνει :

$$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}+\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dV=0 \Rightarrow \oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}=-\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dV \qquad \textbf{(2)}$$

Όμως από την 1η εξίσωση Maxwell είναι : $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_o \Rightarrow \rho=\varepsilon_o\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$

και η **(2)** δίνει :

$$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}=-\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_o\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\,dV=-\int_V \vec{\nabla}\cdot\left(\varepsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)dV$$

Όμως είναι : $\vec{J}_d=-\varepsilon_o\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

Άρα : $I=\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}=\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_d\,dV=\oint_S \vec{J}_d\cdot d\vec{S}=I_d$

Θέμα 8

Να αποδειχτεί ότι στο εσωτερικό αγωγών η πυκνότητα φορτίων ρ με την πάροδο του χρόνου t τείνει στο μηδέν.

Λύση

Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι σχέσεις του ρεύματος, της τάσης και της αντίστασης ενός αγωγού είναι $I = JS$, $V = E\ell$ και $R = \rho\frac{\ell}{S}$ αντίστοιχα, τότε η γνωστή σχέση του νόμου του Ohm παίρνει τη μορφή :

$$I = \frac{V}{R} \Rightarrow JS = \frac{E\ell}{\rho\,\ell/S} \Rightarrow J = \frac{1}{\rho}E = \sigma E \quad \text{ή διανυσματικά} \quad \boxed{\vec{J} = \sigma\vec{E}} \qquad \textbf{(1)}$$

όπου ρ είναι η ειδική αντίσταση και $\sigma = 1/\rho$ η ειδική αγωγιμότητα.
Η σχέση **(1)** αποτελεί τη **γενικευμένη έκφραση του νόμου του Ohm** κι αντικαθιστώντας την στην εξίσωση της συνέχειας προκύπτει :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \sigma\vec{\nabla}\cdot\vec{E} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} = -\sigma\vec{\nabla}\cdot\vec{E} \qquad \textbf{(2)}$$

Αλλά σύμφωνα με τη διαφορική μορφή της $1^{ης}$ εξίσωσης Maxwell είναι :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_o$$

Οπότε η **(2)** γίνεται :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_o}\rho \Rightarrow \int_{\rho_o}^{\rho(t)}\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_o}\int_0^t dt \Rightarrow \ell n\frac{\rho(t)}{\rho_o} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_o}t \Rightarrow \frac{\rho(t)}{\rho_o} = e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_o}t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(t) = \rho_o e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_o}t}$$

Από την παραπάνω σχέση παρατηρείται ότι όταν $t \to \infty$ τότε $e^{-\infty} \to 0$ δηλαδή η πυκνότητα φορτίου τείνει στο μηδέν $\rho(t) \to 0$. Επίσης όπως φαίνεται η σταθερά της απόσβεσης είναι $\tau = \varepsilon_o/\sigma$.

Θέμα 9

Να αποδειχθεί ότι στο κενό χωρίς πηγές ισχύουν οι σχέσεις :

$$\nabla^2\vec{E} = \mu_o\varepsilon_o \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{και} \quad \nabla^2\vec{B} = \mu_o\varepsilon_o \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

Λύση

Η διαφορική μορφή των εξισώσεων Maxwell στο κενό (δηλαδή για $\rho = 0$ και $\vec{J} = 0$) είναι :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{και} \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \textbf{(1)}$$

Λαμβάνοντας το στροβιλισμό της τρίτης σχέσης των εξισώσεων **(1)** προκύπτει :

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \vec{\nabla}\times\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \qquad \textbf{(2)}$$

Αλλά σύμφωνα με τη γνωστή διανυσματική ταυτότητα ισχύει :

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E}$$

κι επειδή $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ είναι τελικά : $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\nabla^2\vec{E}$ **(3)**

Συνεπώς από τις **(2)**, **(3)** και λαμβάνοντας υπόψη την τέταρτη σχέση των εξισώσεων **(1)** προκύπτει :

$$\nabla^2\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_o\varepsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \Rightarrow \nabla^2\vec{E} = \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Ομοίως με τα παραπάνω λαμβάνοντας το στροβιλισμό της τέταρτης σχέσης των εξισώσεων **(1)** προκύπτει :

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})=\vec{\nabla}\times\left(\mu_o\varepsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=\mu_o\varepsilon_o\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{E})$$

Αλλά : $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})-\nabla^2\vec{B}=-\nabla^2\vec{B}$ (αφού $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$)

Άρα : $-\nabla^2\vec{B}=\mu_o\varepsilon_o\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{E})=\mu_o\varepsilon_o\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\mu_o\varepsilon_o\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\nabla^2\vec{B}=\mu_o\varepsilon_o\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

Θέμα 10

Σε αγώγιμο υλικό ειδικής αγωγιμότητας σ επιβάλλεται μαγνητικό πεδίο $\vec{B}(t)$. Υποθέτοντας ότι η πυκνότητα φορτίου ρ και η πυκνότητα του ρεύματος μετατόπισης $\vec{J}_d$ είναι μηδέν να αποδειχθεί ότι :

$$\nabla^2\vec{E} = \mu_o \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Λύση

Σύμφωνα με τη διαφορική μορφή της 3ης εξίσωσης Maxwell είναι :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Λαμβάνοντας το στροβιλισμό της παραπάνω προκύπτει :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά λόγω της 1ης εξίσωσης Maxwell κι επειδή είναι ρ = 0 ισχύει $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, ενώ σύμφωνα με την 4η εξίσωση Maxwell κι επειδή $\vec{J}_d = 0$ ισχύει : $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} = \mu_o \sigma \vec{E}$ αφού σύμφωνα με τη γενικευμένη έκφραση του νόμου του Ohm είναι : $\vec{J} = \sigma \vec{E}$.

Συνεπώς η **(1)** δίνει :

$$-\nabla^2\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_o \sigma \vec{E}) \Rightarrow \nabla^2\vec{E} = \mu_o \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Θέμα 11

α) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση διάδοσης της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων μέσα σε αγωγό, όπου $\rho = 0$ δίνεται από τη σχέση :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \mu_o \sigma \frac{\partial E}{\partial t} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

β) Αν μια λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι η :

$$E(z,t) = E_o \sin(\omega t - kz) e^{-\alpha z}$$

να αποδειχθεί ότι είναι : $k \cong \alpha = (\mu_o \sigma \omega / 2)^{1/2}$ και να εξηγηθεί η φυσική σημασία της ποσότητας $1/\alpha = (2/\mu_o \sigma \omega)^{1/2}$.

Λύση

α) Από την διαφορική μορφή της $4^{ης}$ εξίσωσης του Maxwell είναι :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Παραγωγίζοντας την προηγούμενη ως προς το χρόνο προκύπτει :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_o \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_o \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά : $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ και $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, οπότε η **(1)** γίνεται :

$$-\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \mu_o \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \nabla^2 \vec{E} = \mu_o \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Επειδή όμως $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_o = 0$ (αφού $\rho = 0$), η **(2)** τελικά γίνεται :

$$\nabla^2\vec{E} = \mu_o\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Θεωρώντας ότι η ένταση $\vec{E}$ μεταβάλλεται μονοδιάστατα (ως προς z) η παραπάνω ανάγεται στην απλούστερη έκφραση :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \mu_o\sigma\frac{\partial E}{\partial t} + \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \qquad \textbf{(3)}$$

β) Μια λύση της εξίσωσης **(3)** είναι η : $E(z,t) = E_o \sin(\omega t - kz)e^{-\alpha z}$

όπου ο όρος απόσβεσης $e^{-\alpha z}$ δηλώνει την εξασθένηση που θα υποστεί το ηλεκτρομαγνητικό κύμα το οποίο προσπίπτει επί αγωγού.

Η λύση αυτή μπορεί να γραφεί σε μιγαδική μορφή ως :

$$E(z,t) = E_o e^{i(\omega t - kz)}e^{-\alpha z} \Rightarrow E(z,t) = E_o e^{i(\omega t - kz + i\alpha z)} \qquad (\text{όπου } i^2 = -1)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω λύση στη διαφορική εξίσωση **(3)** προκύπτει :

$$i^2(-k + i\alpha)^2 = \mu_o\sigma i\omega + i^2\omega^2\mu_o\varepsilon_o \Rightarrow -(-k + i\alpha)^2 = \mu_o\sigma i\omega - \omega^2\mu_o\varepsilon_o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(k^2 + i^2\alpha^2 - 2ik\alpha) = \mu_o\sigma i\omega - \omega^2\mu_o\varepsilon_o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - k^2 + 2ik\alpha = -\omega^2\mu_o\varepsilon_o + \mu_o\sigma i\omega \qquad \textbf{(4)}$$

Εξισώνοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των δυο μελών της εξίσωσης **(4)** προκύπτει :

$$\alpha^2 - k^2 = -\omega^2\mu_o\varepsilon_o \Rightarrow k^2 - \alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \qquad (\text{επειδή } c^2 = 1/\varepsilon_o\,\mu_o)$$

Κι αφού $c^2 >> \omega^2$ είναι $\omega^2/c^2 \cong 0$ οπότε $k^2 - \alpha^2 \cong 0 \Rightarrow \alpha \cong k$ **(5)**

Και : $$2k\alpha = \mu_o \sigma\omega \overset{(5)}{\Rightarrow} \alpha^2 = \frac{\mu_o \sigma\omega}{2} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} = \left(\frac{2}{\mu_o \sigma\omega}\right)^{1/2}$$

Η ποσότητα 1/α ονομάζεται επιδερμικό βάθος και περιγράφει την ταχύτητα απόσβεσης του ηλεκτρικού πεδίου.

Θέμα 12

Δίνεται το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}(x,t)=\dfrac{Ae^{(x-ct)}}{\sqrt{\mu_o\varepsilon_o}}\hat{y}$ και το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}(x,t)=Ae^{(x-ct)}\hat{z}$. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις αυτές περιγράφουν ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

Λύση

Για να αποτελούν οι συναρτήσεις αυτές ηλεκτρομαγνητικό κύμα θα πρέπει το κύμα να διαδίδεται κατά μήκος του άξονα x, ενώ το $\vec{E}$ να ταλαντώνεται στο επίπεδο xy και το $\vec{B}$ στο επίπεδο xz, δηλαδή να είναι εγκάρσιο κύμα (όπως πράγματι ισχύει).
Επίσης ο λόγος των μέτρων των πεδίων είναι :

$$\frac{E}{B}=\frac{1}{\sqrt{\mu_o\varepsilon_o}}\Rightarrow\frac{E}{B}=c$$

Από την κυματική εξίσωση του μαγνητικού πεδίου $\dfrac{\partial^2 B}{\partial x^2}=\dfrac{1}{\upsilon^2}\dfrac{\partial^2 B}{\partial t^2}$ κι επειδή:

$$\frac{\partial B}{\partial x}=Ae^{(x-ct)}\Rightarrow\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}=Ae^{(x-ct)}$$

και $$\frac{\partial B}{\partial t}=-cAe^{(x-ct)}\Rightarrow\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}=c^2Ae^{(x-ct)}$$

τελικά προκύπτει :

$$Ae^{(x-ct)}=\frac{1}{\upsilon^2}c^2Ae^{(x-ct)}\Rightarrow\frac{c^2}{\upsilon^2}=1\Rightarrow\upsilon=c$$

Δηλαδή το κύμα διαδίδεται με την ταχύτητα του φωτός.

Τέλος επειδή οι δοθείσες συναρτήσεις ικανοποιούν και τις κυματικές εξισώσεις περιγράφουν ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

Θέμα 13

Δίνεται το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}(x,t) = cB_o\cos(x-ct)\hat{y}$ και το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}(x,t) = B_o\cos(x-ct)\hat{z}$. Εξετάστε αν αποτελούν ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

Λύση

Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$, όπως φαίνεται και από την αντίστοιχη εξίσωση ταλαντώνεται στο επίπεδο xy και το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ στο επίπεδο xz, ενώ το κύμα θα διαδίδεται κατά μήκος του άξονα x.
Ο λόγος των μέτρων των πεδίων είναι :

$$\frac{E}{B} = \frac{cB_o\cos(x-ct)}{B_o\cos(x-ct)} \Rightarrow \frac{E}{B} = c$$

Επίσης : $$\frac{\partial B}{\partial x} = -B_o\sin(x-ct) \Rightarrow \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = -B_o\cos(x-ct)$$

και $$\frac{\partial B}{\partial t} = cB_o\sin(x-ct) \Rightarrow \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = -c^2 B_o\cos(x-ct)$$

Άρα από την κυματική εξίσωση του μαγνητικού πεδίου προκύπτει :

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \Rightarrow -B_o\cos(x-ct) = -\frac{c^2}{\upsilon^2}B_o\cos(x-ct) \Rightarrow \frac{c^2}{\upsilon^2} = 1 \Rightarrow \upsilon = c$$

Δηλαδή το κύμα διαδίδεται με την ταχύτητα του φωτός.

Επομένως οι δοθείσες συναρτήσεις περιγράφουν ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

Θέμα 14

α) Αποδείξτε ότι ένα επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδιδόμενο στο κενό κατά τον άξονα z περιγράφεται από τη σχέση :

$$\frac{\partial B_y(z,t)}{\partial z} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t}$$

β) Θεωρώντας το ηλεκτρικό πεδίο $E_x(z,t) = A\cos kz \cos\omega t$ και χρησιμοποιώντας την παραπάνω εξίσωση να δείξετε ότι το αντίστοιχο μαγνητικό πεδίο B_y ικανοποιεί τη σχέση :

$$cB_y(z,t) = A\sin kz \sin\omega t$$

γ) Να υπολογιστεί το διάνυσμα Poynting $\vec{S}$ για το ηλεκτρομαγνητικό κύμα που ορίζουν το ηλεκτρικό πεδίο E_x και το μαγνητικό πεδίο B_y του ερωτήματος β.

Να υπολογιστεί η μέση τιμή του $\vec{S}$ και να εξηγηθεί ποιοτικά το αποτέλεσμα.

Λύση

α) Έστω $\vec{E} = E_x(z,t)\hat{x}$ και $\vec{B} = B_y(z,t)\hat{y}$, το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα του ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Σύμφωνα με τη διαφορική μορφή της $4^{ης}$ εξίσωσης Maxwell στο κενό, όπου $\vec{J} = 0$, είναι :

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά : $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & B_y(z,t) & 0 \end{vmatrix} = -\hat{x}\frac{\partial B_y}{\partial z}$ και $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial t}\hat{x}$

Οπότε η **(1)** γίνεται :

$$-\hat{x}\frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial E_x}{\partial t}\hat{x} \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_o\varepsilon_o\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Κι επειδή $c^2 = 1/\varepsilon_o\mu_o$ η παραπάνω γράφεται τελικά :

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} \qquad \textbf{(2)}$$

β) Παραγωγίζοντας την $E_x(z,t)$ ως προς το χρόνο δίνει :

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -A\omega \cos kz \sin \omega t$$

Άρα η **(2)** δίνει :

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{A\omega}{c^2}\cos kz \sin \omega t$$

κι ολοκληρώνοντας ως προς z προκύπτει :

$$B_y = -\frac{A\omega}{c^2}\sin \omega t \int \cos kz \, dz \Rightarrow B_y = \frac{A\omega}{kc^2}\sin \omega t \sin kz \qquad \textbf{(3)}$$

Λόγω της σχέσης διασποράς **(7 – 5)** $\omega = ck$ η **(3)** τελικά δίνει :

$$cB_y(z,t) = A \sin kz \sin \omega t$$

γ) Σύμφωνα με την **(7 – 7)** το διάνυσμα Poynting είναι :

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_o}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{A}{\mu_o}\cos kz \cos \omega t \frac{A}{c}\sin kz \sin \omega t(\hat{x}\times\hat{y}) =$$

$$= \frac{A^2}{\mu_o c}(\sin kz \cos kz)(\sin \omega t \cos \omega t)\hat{z} \qquad \textbf{(4)}$$

Αλλά : $\sin kz \cos kz = \dfrac{\sin 2kz}{2}$ και $\sin \omega t \cos \omega t = \dfrac{\sin 2\omega t}{2}$

Άρα η **(4)** γίνεται :

$$\vec{S} = \frac{A^2}{4\mu_o c} \sin 2kz \sin 2\omega t \, \hat{z}$$

Η μέση τιμή του διανύσματος Poynting $\vec{S}$ τόσο ως προς z, όσο και ως προς t είναι μηδέν, αφού γενικά η μέση τιμή του ημιτόνου είναι $<\sin\varphi> = 0$ για $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Το αποτέλεσμα αυτό είναι συμβιβαστό με το γεγονός ότι τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ έχουν τη μορφή στάσιμων κυμάτων, δηλαδή κυμάτων τα οποία παραμένουν εντοπισμένα σε μια περιοχή του χώρου κι επομένως δεν μεταφέρουν ενέργεια.

Θέμα 15

Μεταλλικός αγωγός κυλινδρικού σχήματος μήκους ℓ, ακτίνας R και ειδικής αντίστασης ρ, διαρρέεται από ομοιόμορφα κατανεμημένο ρεύμα έντασης I. Να υπολογιστούν :

α) Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ και του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ στην επιφάνεια του αγωγού.

β) Ο ρυθμός εξόδου ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας, από το εσωτερικό του αγωγού.

Λύση

α) Σύμφωνα με τη γενικευμένη διατύπωση του νόμου του Ohm είναι :

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} \qquad \textbf{(1)}$$

όπου $\sigma = 1/\rho$ η ειδική αγωγιμότητα και λόγω της ομοιόμορφης κατανομής του ρεύματος είναι : $\vec{J} = \frac{I}{S}\hat{z} = \frac{I}{\pi R^2}\hat{z}$, όπου $\hat{z}$ το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα του κυλινδρικού αγωγού.

Συνεπώς η **(1)** δίνει :

$$\vec{E} = \rho\vec{J} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho I}{\pi R^2}\hat{z} \qquad \textbf{(2)}$$

Εφαρμόζοντας το νόμο του Ampere επί κύκλου ακτίνας r = R υπολογίζεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου στην επιφάνεια του αγωγού.

$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_o I_{enc\ell} \Rightarrow B2\pi R = \mu_o I \Rightarrow B = \frac{\mu_o I}{2\pi R}$$

ή διανυσματικά $\quad \vec{B} = \frac{\mu_o I}{2\pi R}\hat{\varphi} \qquad$ **(3)**

όπου $\hat{\varphi}$ το μοναδιαίο διάνυσμα της εφαπτομενικής διεύθυνσης στην επιφάνεια του κυλίνδρου.

β) Σύμφωνα με την **(7 – 7)** το διάνυσμα Poynting είναι :

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_o}\vec{E}\times\vec{B} \overset{(2),(3)}{=} \frac{\rho I}{\pi R^2}\frac{I}{2\pi R}(\hat{z}\times\hat{\varphi}) \Rightarrow \vec{S} = \frac{\rho I^2}{2\pi^2 R^3}\hat{r} \qquad \textbf{(4)}$$

Ο ρυθμός εξόδου ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας από τον αγωγό, δηλαδή η ισχύς του δίνεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα του διανύσματος Poynting $\vec{S}$ επί της παράπλευρης κυλινδρικής επιφάνειας (δηλαδή είναι η ροή του $\vec{S}$). Επομένως :

$$P = \int\limits_{\substack{\text{παράπλευρης}\\\text{επιφάνειας}}} \vec{S}\cdot d\vec{S} = S \int\limits_{\substack{\text{παράπλευρης}\\\text{επιφάνειας}}} dS \overset{(4)}{=} \frac{\rho I^2}{2\pi^2 R^3}2\pi R\ell \Rightarrow P = \frac{\rho\ell I^2}{\pi R^2} \qquad \textbf{(5)}$$

Αλλά η αντίσταση του αγωγού συναρτήσει των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του δίνεται από τη σχέση : $R = \rho\dfrac{\ell}{\pi R^2}$

Άρα η **(5)** ανάγεται στο γνωστό νόμο του Joule : $P = I^2 R$