ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΑΓΩΓΟΙ - ΠΥΚΝΩΤΕΣ

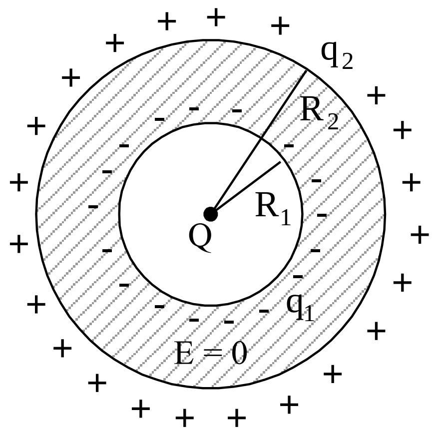
Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Θέμα 1

Ένα σημειακό φορτίο Q τοποθετείται στο κέντρο ενός ουδέτερου σφαιρικού αγώγιμου κελύφους ακτινών R_1 και R_2. Να υπολογιστεί το επαγόμενο φορτίο που συσσωρεύεται στην εσωτερική και εξωτερική επιφάνεια του αγωγού.

Λύση



Επειδή το σφαιρικό αγώγιμο κέλυφος είναι ουδέτερο θα ισχύει αρχικά ότι q = 0 για $R_1 \le r \le R_2$. Λόγω όμως της παρουσίας του φορτίου Q στο κέντρο του συστήματος κι επειδή η ένταση στο εσωτερικό του αγωγού θα πρέπει να είναι μηδέν ($\vec{E} = 0$), εμφανίζονται τα επαγόμενα φορτία q_1 (κατανέμεται στην εσωτερική επιφάνεια) και q_2 (κατανέμεται στην εξωτερική επιφάνεια).
Επίσης λόγω της αρχής διατήρησης του φορτίου θα ισχύει :

$$q = q_1 + q_2 = 0 \Rightarrow q_2 = -q_1 \qquad \textbf{(1)}$$

Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss σε σφαιρική επιφάνεια ακτίνας $R_1 \le r \le R_2$ προκύπτει :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc\ell}}{\varepsilon_o} \Rightarrow E4\pi r^2 = \frac{Q + q_1}{\varepsilon_o} \overset{(E=0)}{\Rightarrow} \frac{Q + q_1}{\varepsilon_o} = 0 \Rightarrow \boxed{q_1 = -Q}$$

και λόγω της **(1)** : $\boxed{q_2 = Q}$

Θέμα 2

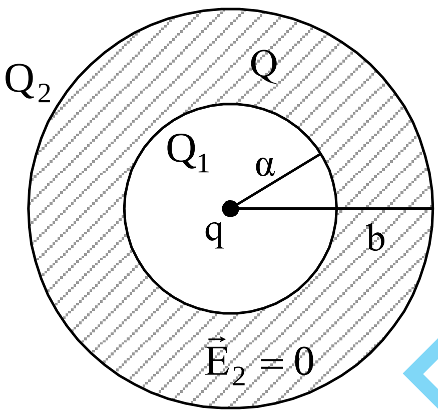
Ένας σφαιρικός αγωγός εσωτερικής ακτίνας α και εξωτερικής b είναι φορτισμένος με ηλεκτρικό φορτίο Q, ενώ στο κέντρο του σφαιρικού αγωγού έχει τοποθετηθεί σημειακό ηλεκτρικό φορτίο q. Να υπολογιστούν :

α) Η τελική κατανομή του ηλεκτρικού φορτίου Q στο σφαιρικό αγώγιμο φλοιό.

β) Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου παντού στο χώρο.

γ) Το ηλεκτρικό δυναμικό παντού στο χώρο.

Λύση



α) Το φορτίο Q με το οποίο είναι φορτισμένος ο σφαιρικός αγωγός θα κατανεμηθεί στην εσωτερική επιφάνεια Q_1 και στην εξωτερική επιφάνεια Q_2 , έτσι ώστε στο εσωτερικό του αγωγού η ένταση να είναι μηδέν, δηλαδή $\vec{E}_2 = 0$.

Σημειώνεται ότι λόγω σφαιρικής συμμετρίας του προβλήματος τα φορτία Q_1, Q_2 είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα στις επιφάνειες του αγώγιμου φλοιού.

Λόγω της αρχής διατήρησης του φορτίου θα ισχύει :

$$Q = Q_1 + Q_2 \qquad \textbf{(1)}$$

Θεωρώντας σφαιρική επιφάνεια S_1 με ακτίνα $\alpha < r < b$ κι επειδή τα σημεία της επιφάνειας αυτής έχουν μηδενική ένταση, ο νόμος του Gauss δίνει:

$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{encl}}{\varepsilon_o} \Rightarrow 0 = \frac{q + Q_1}{\varepsilon_o} \Rightarrow \boxed{Q_1 = -q}$$

και λόγω της **(1)** : $Q_2 = Q - Q_1 \Rightarrow \boxed{Q_2 = Q + q}$

β) Η ένταση $\vec{E}$ υπολογίζεται μέσω του νόμου Gauss :

Για $r \le \alpha$: $\oint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{q_{encl}}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_1 4\pi r^2 = \dfrac{q}{\varepsilon_o} \Rightarrow \vec{E}_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{q}{r^2}\hat{r}$ **(2)**

Για $\alpha < r \le b$: Σύμφωνα με τη βασική ιδιότητα των αγωγών είναι :

$$\vec{E}_2 = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

Για $r > b$: $\oint_{S_3} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{q_{encl}}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_3 4\pi r^2 = \dfrac{q + Q_1 + Q_2}{\varepsilon_o} \overset{(1)}{=} \dfrac{q+Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{E}_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{(q+Q)}{r^2}\hat{r} \qquad \textbf{(4)}$$

γ) Θεωρώντας ως σημείο αναφοράς το άπειρο ($V_\infty = 0$), το ηλεκτρικό δυναμικό θα υπολογιστεί από τη σχέση :

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\hat{r} \Rightarrow \int_0^V dV = -\int_\infty^r \vec{E}dr\,\hat{r} \Rightarrow V = -\int_\infty^r E dr$$

Επομένως :

Για $r > b$: $V_3 = -\int_\infty^r E_3 dr \overset{(4)}{=} -\dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_o}\int_\infty^r \dfrac{dr}{r^2} \Rightarrow V_3 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{q+Q}{r}$

Για $\alpha < r \le b$: $V_2 = -\int_\infty^r E dr = -\int_\infty^b E_3 dr - \int_b^r E_2 dr \overset{(3),(4)}{=} -\dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_o}\int_\infty^b \dfrac{dr}{r^2} - 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q+Q}{b} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Για r < α : $V_1 = -\int_{\infty}^{r} E dr = -\int_{\infty}^{b} E_3 dr - \int_{b}^{\alpha} E_2 dr - \int_{\alpha}^{r} E_1 dr \overset{(2),(3),(4)}{=}$

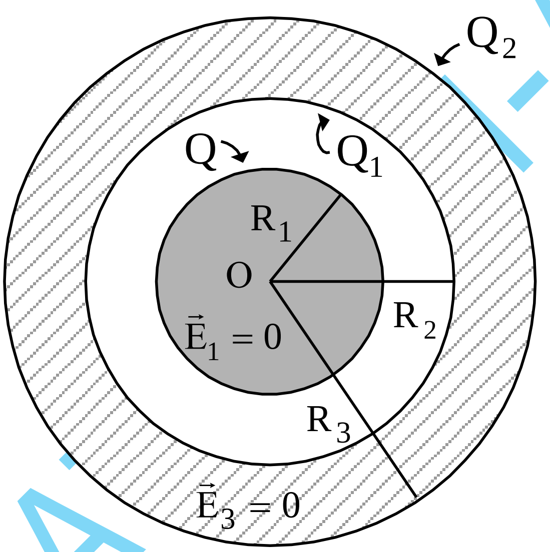
$$= -\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_o}\int_{\infty}^{b}\frac{dr}{r^2} - 0 - \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\int_{\alpha}^{r}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow V_1 = \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_o b} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha}\right)$$

Θέμα 3

Μια αγώγιμη σφαίρα ακτίνας R_1 είναι φορτισμένη με ηλεκτρικό φορτίο Q, ενώ περιβάλλεται από ομόκεντρο σφαιρικό αφόρτιστο φλοιό ακτίνων R_2 και R_3.
α) Να υπολογιστεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε σημείο του χώρου.
β) Αν με λεπτό αγώγιμο σύρμα ενωθεί ο φλοιός και η σφαίρα να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο μετά την αποκατάσταση της ισορροπίας.

Λύση

α)



Λόγω σφαιρικής συμμετρίας, το φορτίο Q κατανέμεται ομοιόμορφα στην επιφάνεια της αγώγιμης σφαίρας ακτίνας R_1, έτσι ώστε στο εσωτερικό να είναι $\vec{E}_1 = 0$.
Επίσης επαγόμενα φορτία εμφανίζονται και στις δυο επιφάνειες του σφαιρικού φλοιού, έτσι ώστε στο εσωτερικό του να είναι $\vec{E}_3 = 0$.
Αν Q_1 είναι το φορτίο της εσωτερικής επιφάνειας, τότε επειδή αυτός είναι αφόρτιστος θα ισχύει, λόγω της διατήρησης του φορτίου :

$$Q_1 + Q_2 = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss σε σφαιρική επιφάνεια ακτίνας $R_2 < r < R_3$ προκύπτει :

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc\ell}}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_3 4\pi r^2 = \frac{Q+Q_1}{\varepsilon_o} \overset{(E_3=0)}{\Rightarrow} Q+Q_1 = 0 \Rightarrow \boxed{Q_1 = -Q}$$

και λόγω της **(1)** : $Q_2 = -Q_1 \Rightarrow \boxed{Q_2 = Q}$

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι :

Για $r < R_1$: $\vec{E}_1 = 0$ (εσωτερικό αγωγού)

Για $R_1 < r < R_2$: $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc\ell}}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_2 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r}$

Για $R_2 < r < R_3$: $\vec{E}_3 = 0$ (εσωτερικό αγωγού)

Για $r > R_3$: $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc\ell}}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_4 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow \vec{E}_4 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r}$

β) Αν ο αγώγιμος φλοιός (η εσωτερική του επιφάνεια) και η αγώγιμη σφαίρα ενωθούν με λεπτό σύρμα θα παρατηρηθεί κίνηση των φορτίων μέσω του σύρματος και τελικά θα αποκατασταθεί ισορροπία όταν ο φλοιός και η σφαίρα αποκτήσουν το ίδιο δυναμικό.
Έστω Q', Q_1' και Q_2' τα ηλεκτρικά φορτία στις επιφάνειες $r = R_1$, $r = R_2$ και $r = R_3$ αντίστοιχα μετά την αποκατάσταση της ισορροπίας.
Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss για $R_1 < r < R_2$, προκύπτει :

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc\ell}}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_2' 4\pi r^2 = \frac{Q'}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_2' = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_o r^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Άρα η διαφορά δυναμικού σφαίρας – φλοιού είναι :

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_{R_1}^{R_2} E_2' dr \Rightarrow V_2 - V_1 = -\frac{Q'}{4\pi\varepsilon_o}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

Αλλά $V_2 = V_1$ λόγω της ένωσης των δυο επιφανειών με το λεπτό σύρμα, οπότε :

$$V_2 - V_1 = 0 \Rightarrow \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = 0 \Rightarrow Q' = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss, τώρα σε σφαιρική επιφάνεια ακτίνας $R_2 < r < R_3$ προκύπτει :

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc\ell}}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_3' 4\pi r^2 = \frac{Q' + Q_1'}{\varepsilon_o} \overset{(E_3'=0)}{\Rightarrow} Q' + Q_1' = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} Q_1' = 0$$

Συνεπώς λόγω της αρχής διατήρησης του φορτίου προκύπτει ότι όλο το φορτίο Q εμφανίζεται στην εξωτερική επιφάνεια του φλοιού.
Δηλαδή : $Q_2' = Q$.

Άρα η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι :

Για $r < R_1$: $\vec{E}_1' = 0$ (εσωτερικό αγωγού)

Για $R_1 < r < R_2$: $\vec{E}_2' = 0$ (επειδή $Q' = 0$)

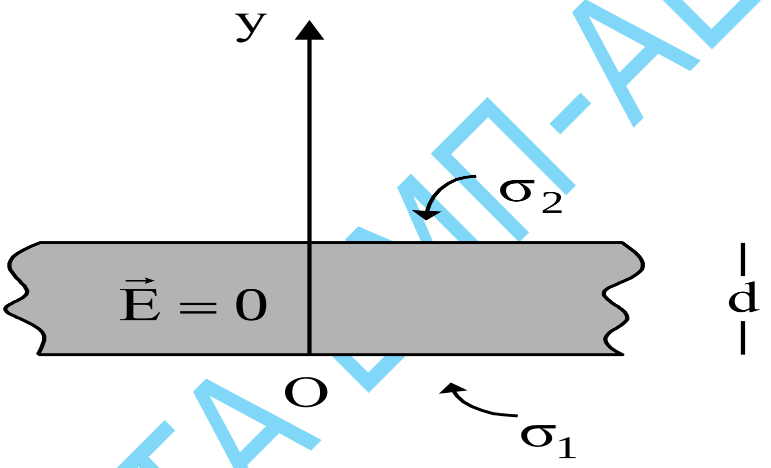
Για $R_2 < r < R_3$: $\vec{E}_3' = 0$ (εσωτερικό αγωγού)

Για $r > R_3$: $\vec{E}_4' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r}$ (με απλή εφαρμογή του νόμου Gauss)

Θέμα 4

Μια άπειρη αγώγιμη πλάκα πάχους d φορτίζεται με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ_o στη μια επιφάνειά της. Να υπολογιστεί η κατανομή του φορτίου και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μετά την αποκατάσταση της ισορροπίας.

Λύση



Μέχρι την αποκατάσταση της ισορροπίας παρατηρείται κίνηση φορτίων κατά την y διεύθυνση και τελικά κατανομή αυτών στις δυο επιφάνειες της πλάκας, έτσι ώστε η ένταση να είναι μηδέν στο εσωτερικό της. Αν σ_1, σ_2 είναι οι επιφανειακές πυκνότητες φορτίου στις επιφάνειες $y = 0$ και $y = d$ αντίστοιχα, τότε σε τμήμα της πλάκας εμβαδού S, λόγω της αρχής διατήρησης του φορτίου θα ισχύει :

$$\sigma_o S = \sigma_1 S + \sigma_2 S \Rightarrow \sigma_o = \sigma_1 + \sigma_2 \qquad \textbf{(1)}$$

Σε ένα τυχαίο σημείο στο εσωτερικό του αγωγού, η ολική ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, που οφείλεται στις δυο επιφάνειες του αγωγού, σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας είναι :

$$\vec{E} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_o}\hat{y} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_o}\hat{y} \qquad \textbf{(2)}$$

Αλλά στο εσωτερικό του αγωγού είναι : $\vec{E}=0$ οπότε η **(2)** δίνει : $\sigma_1 = \sigma_2$ και λόγω της **(1)** είναι :

$$\boxed{\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\sigma_o}{2}} \qquad \textbf{(3)}$$

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας :

Για y > d : $\vec{E} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_o}\hat{y} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_o}\hat{y} \overset{(3)}{\Rightarrow} \vec{E} = \frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o}\hat{y}$

Για y < 0 : $\vec{E} = -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_o}\hat{y} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_o}\hat{y} \overset{(3)}{\Rightarrow} \vec{E} = -\frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o}\hat{y}$

Για 0 < y < d : $\vec{E}=0$ (εσωτερικό αγωγού)

Θέμα 5

Να αποδειχθεί ότι οι οπλισμοί ενός πυκνωτή με επίπεδες και παράλληλες πλάκες εμβαδού S και απόστασης d, έλκονται μεταξύ τους με δύναμη :

$F = q^2/2\varepsilon_o S$.

Επίσης να δειχθεί ότι η πίεση που ασκείται είναι ίση με την πυκνότητα ενέργειας στο πεδίο.

Λύση

Αν υποτεθεί ότι η απόσταση d μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή αυξηθεί κατά dx, τότε το έργο που απαιτείται για την μετακίνηση των οπλισμών είναι :

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{x} = Fdx \qquad \textbf{(1)}$$

όπου $\vec{F}$ η δύναμη μεταξύ των οπλισμών.
Το έργο αυτό πρέπει να ισούται με τη μεταβολή της ηλεκτροστατικής ενέργειας του πυκνωτή και είναι :

$$dU = \frac{\varepsilon_o}{2}E^2 dV = \frac{\varepsilon_o}{2}E^2 Sdx \qquad \textbf{(2)}$$

όπου $dV = Sdx$ ο στοιχειώδης όγκος μεταξύ των οπλισμών κατά τη μετακίνησή τους.

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** προκύπτει :

$$Fdx = \frac{\varepsilon_o}{2}E^2 Sdx \Rightarrow F = \frac{\varepsilon_o}{2}E^2 S \qquad \textbf{(3)}$$

Για έναν επίπεδο πυκνωτή όμως ο νόμος του Gauss δίνει :

$$\Phi_E = ES = \frac{q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{q}{\varepsilon_o S} \qquad \textbf{(4)}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση **(3)** της **(4)** υπολογίζεται η ζητούμενη δύναμη :

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon_o S}$$

Η πίεση που ασκείται είναι :

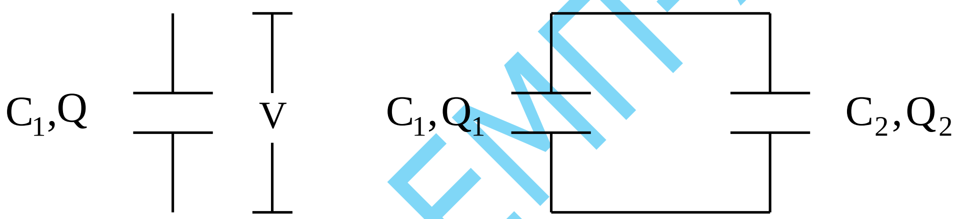
$$P = \frac{F}{S} \overset{(3)}{=} \frac{\varepsilon_o}{2} E^2 = \frac{dU}{dV} = u_E$$

όπου $u_E = \dfrac{dU}{dV} = \dfrac{\varepsilon_o}{2} E^2$ η πυκνότητα ενέργειας του πεδίου.

Θέμα 6

Στα άκρα ενός πυκνωτή χωρητικότητας $C_1 = 20\mu F$ εφαρμόζεται διαφορά δυναμικού V = 500 Volt. Στη συνέχεια στα άκρα του πυκνωτή αυτού συνδέεται παράλληλα ένας αφόρτιστος πυκνωτής χωρητικότητας $C_2 = 5\mu F$. Να υπολογιστεί η διαφορά της ενέργειας στο σύστημα.

Λύση



ΑΡΧΙΚΑ **ΤΕΛΙΚΑ**

Η αρχική ενέργεια είναι : $U_{αρχ} = \frac{1}{2} C_1 V^2$

και η τελική ενέργεια του συστήματος είναι : $U_{τελ} = \frac{Q^2}{2C_{ολ}}$ **(1)**

όπου λόγω παράλληλης σύνδεσης των πυκνωτών η ισοδύναμη χωρητικότητα είναι $C_{ολ} = C_1 + C_2$ και λόγω της αρχής διατήρησης του φορτίου, το ολικό φορτίο του συστήματος παραμένει σταθερό και ίσο με το αρχικό, δηλαδή : $Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V$.

Άρα η **(1)** γίνεται : $U_{τελ} = \frac{1}{2} \frac{C_1^2 V^2}{(C_1 + C_2)}$

Επομένως η διαφορά ενέργειας στο σύστημα είναι :

$$U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}C_1V^2\left[1 - \frac{C_1}{C_1 + C_2}\right] = \frac{1}{2}C_1V^2\,\frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές $C_1 = 20\mu F$, $C_2 = 5\mu F$ και $V = 500$ Volt τελικά προκύπτει :

$$U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\varepsilon\lambda} = 0{,}5\text{Joule}$$