ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ ΟΠΤΙΚΗΣ

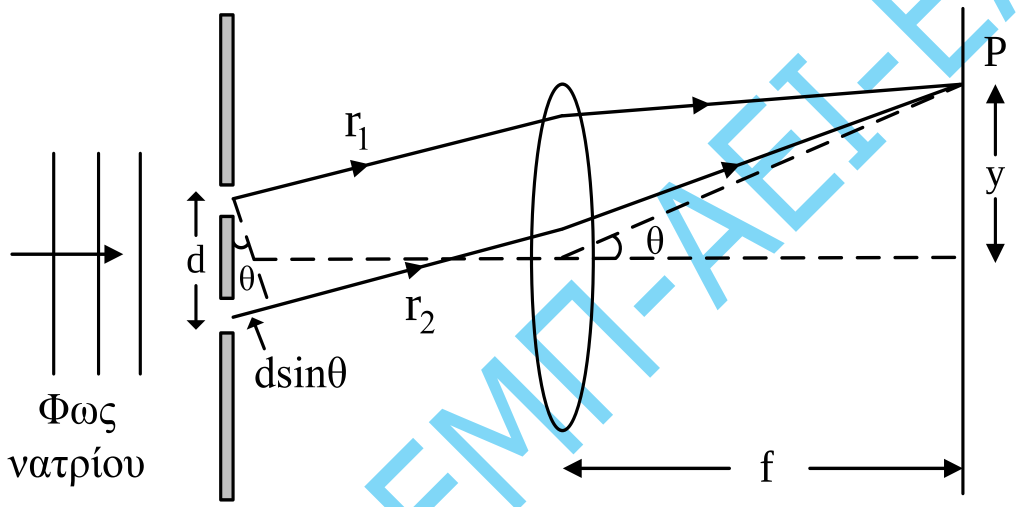
Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 1

Φως νατρίου (λ = 590nm) προσπίπτει πάνω σε διπλή σχισμή διαχωριστικής απόστασης d = 0,2mm. Λεπτός φακός εστιακής απόστασης f = + 1 m τοποθετείται κοντά στη σχισμή. Να υπολογιστεί η απόσταση μεταξύ των κροσσών συμβολής πάνω σε οθόνη τοποθετημένη στο εστιακό επίπεδο του φακού.

Λύση



Για την παραγωγή κροσσών συμβολής στο πείραμα του Young συχνά χρησιμοποιείται συγκλίνοντας φακός και η οθόνη τοποθετείται στο εστιακό του επίπεδο. Έτσι με αυτές τις συνθήκες επιτυγχάνεται η παραλληλία των ακτίνων r_1 και r_2 (ώστε $r_1 - r_2 = d\sin\theta$). Κατά τα λοιπά η συνθήκη ενισχυτικής συμβολής $d\sin\theta = m\lambda$ (m=0,1,2,…) εξάγεται όπως στην παράγραφο **4.1**.
Για τον προσδιορισμό της απόστασης μεταξύ των κροσσών συμβολής τώρα είναι:

$$y = f\tan\theta \cong f\sin\theta \Rightarrow y = m\frac{f\lambda}{d}$$

Άρα η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών κροσσών (m και m+1) είναι:

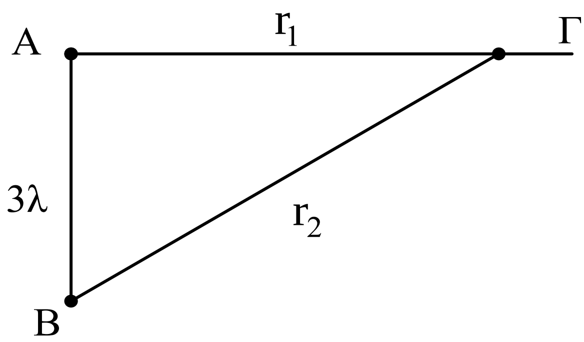
$$\Delta y = y_{m+1} - y_m = (m+1)\frac{f\lambda}{d} - m\frac{f\lambda}{d} \Rightarrow \Delta y = \frac{f\lambda}{d} = \frac{1\text{m}\cdot 590\text{nm}}{0{,}2\text{mm}} =$$

$$= \frac{590\cdot 10^{-9}}{0{,}2\cdot 10^{-3}}\text{m} = 2{,}95\cdot 10^{-3}\text{m} \Rightarrow \Delta y = 2{,}95\text{mm}$$

ΘΕΜΑ 2

Δυο πηγές κυμάτων Α και Β, που είναι σε φάση και έχουν το ίδιο μήκος κύματος λ, βρίσκονται σε απόσταση 3λ μεταξύ τους. Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση από το Α, κατά μήκος της κάθετης ευθείας που διέρχεται από το Α, για την οποία συμβαίνει αναιρετική συμβολή.

Λύση



Έστω Γ το σημείο στο οποίο παρατηρείται η πρώτη αναιρετική συμβολή των κυμάτων από τις δυο πηγές. Η συνθήκη αναιρετικής συμβολής επιβάλει η διαφορά δρόμου $r_2 - r_1$ των δυο κυμάτων να είναι ημιακέραιος αριθμός μηκών κύματος. Δηλαδή πρέπει:

$$r_2 - r_1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad m=0,1,2,\dots$$

Άρα το πρώτο ελάχιστο παρατηρείται για m=0 δηλαδή όταν:

$$r_2 - r_1 = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow r_2 = r_1 + \frac{\lambda}{2} \qquad \textbf{(1)}$$

Επίσης από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι:

$$r_2^2 = r_1^2 + 9\lambda^2 \Rightarrow r_1^2 = r_2^2 - 9\lambda^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} r_1^2 = \left(r_1 + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - 9\lambda^2 = r_1^2 + \frac{\lambda^2}{4} + \lambda r_1 - 9\lambda^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda r_1 = 9\lambda^2 - \frac{\lambda^2}{4} \Rightarrow r_1 = 9\lambda - \frac{\lambda}{4} = \frac{35}{4}\lambda \Rightarrow r_1 = 8{,}75\lambda$$

ΘΕΜΑ 3

Παράλληλες ακτίνες φωτός μήκους κύματος λ προσπίπτουν σε διπλή σχισμή. Οι δυο σχισμές απέχουν μεταξύ τους απόσταση f. Σε οθόνη τοποθετημένη σε απόσταση ℓ από τις σχισμές σχηματίζεται εικόνα συμβολής. Αν ο δεύτερος φωτεινός κροσσός παρατηρείται στην οθόνη να απέχει απόσταση d από το κέντρο της εικόνας συμβολής (όπου βρίσκεται ο μηδενικός φωτεινός κροσσός) να υπολογιστεί το λ συναρτήσει των f, ℓ και d (με την προσέγγιση που επιβάλει η συνθήκη ℓ>>f).

(Τμήμα Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση

Η απόστασή του m – οστού φωτεινού κροσσού από τον κεντρικό φωτεινό κροσσό (m=0) σύμφωνα με την **(4 – 6)** είναι:

$$y = \ell \frac{m\lambda}{f} \qquad \textbf{(1)}$$

Άρα αφού η απόσταση του δεύτερου φωτεινού κροσσού από τον κεντρικό είναι d, η **(1)** για m=2 δίνει:

$$d = \ell \frac{2\lambda}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{df}{2\ell}$$

ΘΕΜΑ 4

Παράλληλες ακτίνες φωτός μήκους κύματος λ προσπίπτουν σε διπλή σχισμή. Σε οθόνη τοποθετημένη σε απόσταση ℓ από τις δυο σχισμές, μετρούνται οι κροσσοί συμβολής. Αν f είναι η απόσταση μεταξύ των σχισμών και ισχύει $\ell >> f$ και $\ell >> \lambda$, να βρεθεί η απόσταση Δy μεταξύ του πρώτου και του τρίτου φωτεινού κροσσού συναρτήσει των λ, ℓ και f.
Αν δίνεται $\ell = 3m$, f = 0,5mm και Δy = 7,2mm να υπολογιστεί το μήκος κύματος λ του προσπίπτοντος φωτός.
(Τμήμα Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση

Σύμφωνα με τη σχέση **(1)** του **Θέματος 3** οι αποστάσεις του πρώτου και του τρίτου φωτεινού κροσσού από τον κεντρικό κροσσό είναι m = 1 και m = 3 αντίστοιχα:

$$y_{1-ου} = \frac{\ell\lambda}{f} \qquad \text{και} \qquad y_{3-ου} = 3\frac{\ell\lambda}{f}$$

Άρα η απόσταση μεταξύ του πρώτου και του τρίτου φωτεινού κροσσού είναι:

$$\Delta y = y_{3\text{-}ου} - y_{1-ου} = 3\frac{\ell\lambda}{f} - \frac{\ell\lambda}{f} \Rightarrow \Delta y = 2\frac{\ell\lambda}{f}$$

Για $\ell = 3m$, f = 0,5mm και Δy = 7,2mm το μήκος κύματος του προσπίπτοντος φωτός σύμφωνα με την τελευταία είναι:

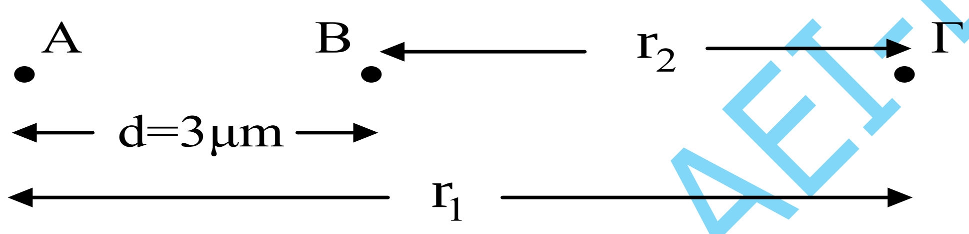
$$\lambda = \frac{\Delta y f}{2\ell} = \frac{7{,}2mm \cdot 0{,}5mm}{2 \cdot 3m} = \frac{3{,}6 \cdot 10^{-6}}{6} m = 0{,}6 \cdot 10^{-6} m \Rightarrow \lambda = 600nm$$

ΘΕΜΑ 5

Δυο πανομοιότυπες πηγές απέχουν μεταξύ τους 3μm και εκπέμπουν λευκό φως (περιέχει όλα τα ορατά μήκη κύματος). Να βρεθεί η συνθήκη μέγιστης έντασης λόγω ενισχυτικής συμβολής για τυχόν σημείο της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι δυο πηγές και να βρεθεί ποια μήκη κύματος του ορατού φάσματος (από 400nm εως 700nm) θα παρατηρηθούν με μέγιστη ένταση.

(Τμήμα Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Έστω ένα τυχαίο σημείο Γ πάνω στην ευθεία που βρίσκονται οι δυο πηγές. Η διαφορά οπτικού δρόμου των κυμάτων από τις πηγές Α και Β μέχρι το σημείο Γ είναι $r_1 - r_2 = d$, όπως φαίνεται εύκολα από το σχήμα.

Επομένως για να συμβαίνει ενισχυτική συμβολή των κυμάτων στο σημείο Γ θα πρέπει η διαφορά αυτή οπτικού δρόμου να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο μηκών κύματος. Δηλαδή η συνθήκη ενισχυτικής συμβολής είναι:

$$r_1 - r_2 = d = m\lambda \qquad m=1,2,\ldots \qquad \textbf{(1)}$$

Από τη συνθήκη **(1)** προκύπτει ότι τα μήκη κύματος για τα οποία παρατηρείται ενισχυτική συμβολή είναι:

$$\lambda = \frac{d}{m}, \qquad m=1,2,\ldots \qquad \textbf{(2)}$$

Άρα από την **(2)** προκύπτει:

Για m = 1: $\lambda_1 = d = 3\mu m = 3000nm$ (εκτός ορατού φάσματος)

Για m = 2: $\lambda_2 = \frac{d}{2} = 1500nm$ (εκτός ορατού φάσματος)

Για m = 3: $\lambda_3 = \frac{d}{3} = 1000nm$ (εκτός ορατού φάσματος)

Για m = 4: $\lambda_4 = \frac{d}{4} = 750nm$ (εκτός ορατού φάσματος)

Για $m = 5$: $\lambda_5 = \frac{d}{5} = 600nm$ **(εντός ορατού φάσματος)**

Για $m = 6$: $\lambda_6 = \frac{d}{6} = 500nm$ **(εντός ορατού φάσματος)**

Για $m = 7$: $\lambda_7 = \frac{d}{7} = 429nm$ **(εντός ορατού φάσματος)**

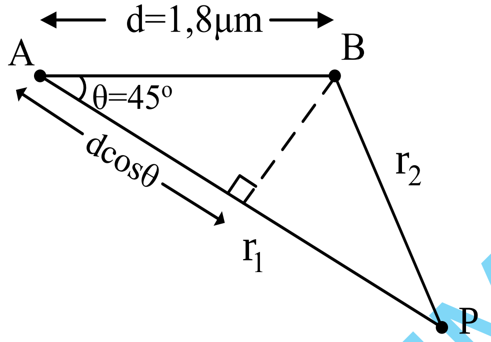
Για $m = 8$: $\lambda_8 = \frac{d}{8} = 375nm$ (εκτός ορατού φάσματος)

Συνεπώς τα μήκη κύματος 600nm, 500nm, και 429nm του ορατού φάσματος παρουσιάζουν ενισχυτική συμβολή και παρατηρούνται με μέγιστη ένταση.

ΘΕΜΑ 6

Δυο πανομοιότυπες σημειακές πηγές απέχουν μεταξύ τους 1,80μm και εκπέμπουν λευκό φως (που περιέχει όλα τα μήκη κύματος του ορατού φωτός από 400nm έως 700nm). Για ποιες τιμές του μήκους κύματος θα παρατηρηθεί, λόγω ενισχυτικής συμβολής, μέγιστη ένταση φωτός σε ένα σημείο που απέχει μεγάλη απόσταση από τις πηγές και βρίσκεται στη κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία 45^o με την ευθεία πάνω στην οποία βρίσκονται οι δυο πηγές;
(Τμήμα Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Έστω ένα σημείο P που βρίσκεται σε μεγάλη απόσταση από τις πηγές και στην κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία 45^o με την ευθεία AB.
Η διαφορά των οπτικών δρόμων των κυμάτων από τις δυο πηγές, αφού το P είναι μακριά και οι ακτίνες r_1 , r_2 είναι σχεδόν παράλληλες θα είναι:

$$r_1 - r_2 = d\cos\theta = 1{,}8\mu m \cdot \cos 45^o = \frac{1{,}8\sqrt{2}}{2}\mu m = 1{,}27\mu m$$

Συνεπώς για να παρατηρείται ενισχυτική συμβολή στο P θα πρέπει:

$$d\sin\theta = n\lambda \Rightarrow 1{,}27\mu m = n\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1{,}27}{n}\mu m, \quad n = 1,2,\ldots$$

Άρα τα μήκη κύματος για τα οποία παρατηρείται ενίσχυση είναι:

Για n = 1: $\lambda_1 = 1{,}27\mu m = 1270nm$ (εκτός ορατού φάσματος)

Για n = 2: $\lambda_2 = \frac{1{,}27}{2}\mu m = 635nm$ **(εντός ορατού φάσματος)**

Για n = 3: $\lambda_3 = \frac{1{,}27}{3}\mu m = 423nm$ **(εντός ορατού φάσματος)**

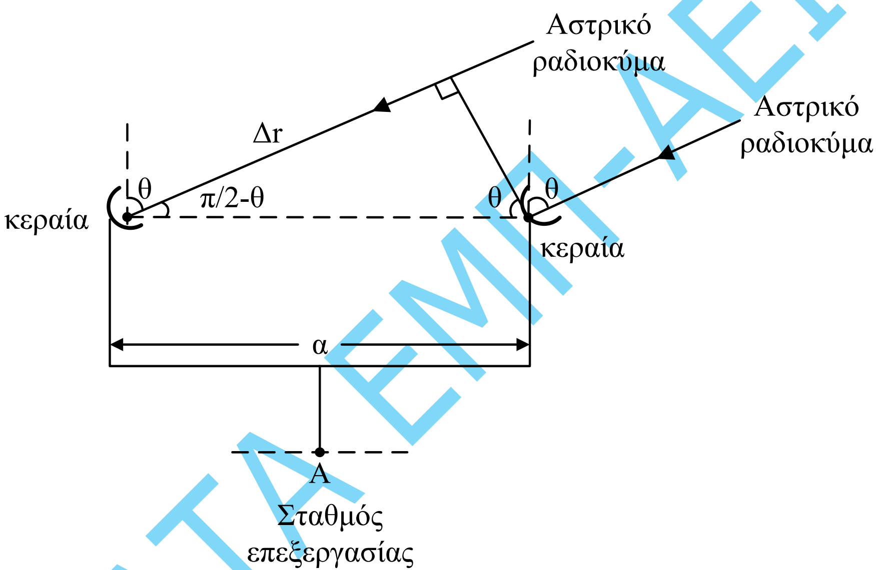
Για n = 4: $\lambda_4 = \frac{1{,}27}{4}\mu m = 318nm$ (εκτός ορατού φάσματος)

Επομένως στα μήκη κύματος 635nm και 423nm θα παρατηρηθεί μέγιστη ένταση φωτός στο σημείο Ρ.

ΘΕΜΑ 7

Μια συμβολομετρική διάταξη, που χρησιμοποιεί στη ραδιοαστονομία συνίσταται από δυο όμοια ραδιοτηλεσκόπια των οποίων οι κεραίες βρίσκονται σε απόσταση α μεταξύ τους. Αρμονικό ραδιοκύμα από ένα άστρο, που συλλαμβάνεται από τις δυο κεραίες, έχει διεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ ως προς την κατακόρυφο. Τα σήματα υφίστανται επαλληλία στο σταθμό επεξεργασίας Α, χωρίς να προκαλείται πρόσθετη διαφορά φάσης.
Να βρεθούν οι γωνίες θ για τις οποίες το προκύπτον από τη συμβολή σήμα είναι μέγιστο, αν το συλλεγόμενο από τις κεραίες ραδιοκύμα έχει μήκος κύματος λ.
(Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Για να διαπιστωθεί αν το αποτέλεσμα της συμβολής των αστρικών ραδιοκυμάτων είναι μέγιστο πρέπει να προσδιοριστεί η διαφορά δρόμου των δυο ακτίνων. Επειδή οι δυο ακτίνες είναι παράλληλες, λόγω της μεγάλης απόστασης της πηγής (άστρου), η διαφορά δρόμου Δr των ακτίνων βρίσκεται φέρνοντας την κάθετο από τη μία ακτίνα στην άλλη.
Από τη γεωμετρία του σχήματος εύκολα προκύπτει ότι:

$$\sin\theta = \frac{\Delta r}{\alpha} \Rightarrow \Delta r = \alpha\sin\theta$$

Συνεπώς για να είναι το προκύπτον από την συμβολή σήμα μέγιστο, δηλαδή για ενισχυτική συμβολή των δυο κυμάτων, θα πρέπει η διαφορά δρόμου τους να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος λ. Άρα:

$$\alpha\sin\theta = m\lambda \Rightarrow \sin\theta = \frac{m\lambda}{\alpha}, \qquad m = 1,2,3,\ldots.$$

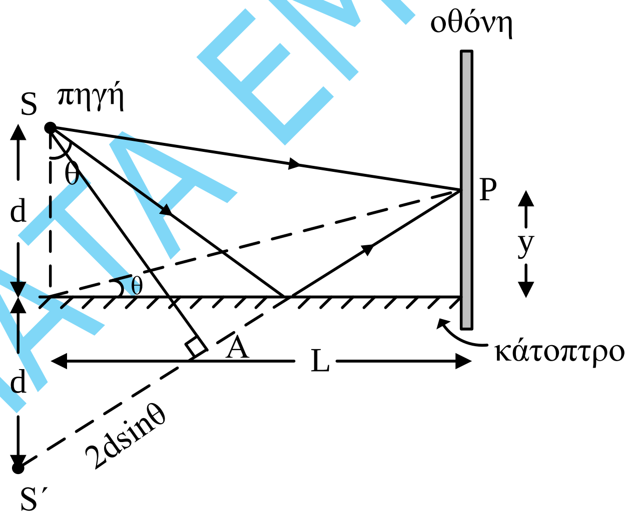
ή αλλιώς : $\theta = \sin^{-1}\frac{m\lambda}{\alpha} = \sin^{-1}\frac{\lambda}{\alpha}, \quad \sin^{-1}\frac{2\lambda}{\alpha}, \ldots$

ΘΕΜΑ 8

Κροσσοί συμβολής παράγονται σε μια οθόνη, σαν αποτέλεσμα των ακτίνων που έρχονται απευθείας από μια πηγή που εκπέμπει φως μήκους κύματος λ και των ακτίνων που ανακλώνται από κάτοπτρο, που βρίσκεται σε απόσταση d κάτω από την πηγή **(πείραμα κατόπτρου Lloyd's)**. Αν L είναι η απόσταση της οθόνης από την πηγή και L >> d να προσδιοριστούν οι αποστάσεις y_m των φωτεινών και των σκοτεινών κροσσών στην οθόνη πάνω από το κάτοπτρο.
Αν λ = 500nm, L = 100cm και d = 1cm να βρεθεί η απόσταση του πρώτου φωτεινού και του πρώτου σκοτεινού κροσσού πάνω από το κάτοπτρο.

Λύση

Στο σημείο P επί της οθόνης συμβάλλουν ένα κύμα που έρχεται απευθείας από την πηγή S και ένα κύμα που ανακλάται από το κάτοπτρο. Το ανακλώμενο κύμα δρα ως ένα κύμα που προέρχεται από μια πηγή S΄. Έτσι η περίπτωση αυτή είναι ισοδύναμη με τη συμβολή διπλής σχισμής, αν η απόσταση d των σχισμών αντικατασταθεί με 2d. Επίσης το ανακλώμενο κύμα υφίσταται μια μετατόπιση φάσης 180° λόγω ανάκλασης.



Η διαφορά των οπτικών δρόμων των δυο ακτίνων είναι :
S΄P-SP = $r_1 - r_2$ =S΄ A$\cong$2dsinθ ή επειδή η θ είναι πολύ μικρή είναι $\sin\theta \cong \theta$ και $r_1 - r_2 \cong 2d\theta$.
Επίσης επειδή y << L είναι tan $\cong$ θ = y/L κι επομένως :

$$r_1 - r_2 = \frac{2dy}{L} \qquad \textbf{(1)}$$

Δηλαδή ακολουθείται η ίδια διαδικασία με τη διάταξη διπλής σχισμής του Young. Στην περίπτωση αυτή όμως λόγω της διαφοράς φάσης 180^o των κυμάτων (δεν είναι σύμφωνα) λόγω ανάκλασης, αυτά συμβάλουν ενισχυτικά στο P όταν η διαφορά δρόμου τους είναι ημιακέραιος αριθμός μηκών κύματος. Δηλαδή:

Συνθήκη ενίσχυσης: $r_1 - r_2 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{2dy}{L} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{\lambda L}{2d}\left(m + \frac{1}{2}\right)$, m=0,1,2,… **θέσεις φωτεινών κροσσών** **(2)**

Ενώ τα κύματα αυτά συμβάλουν αναιρετικά στο P όταν η διαφορά δρόμου τους είναι ακέραιος αριθμός μηκών κύματος. Δηλαδή:

Συνθήκη αναίρεσης: $r_1 - r_2 = m\lambda \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{2dy}{L} = m\lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{L\lambda}{2d} m$, $m = 0,1,2,\ldots$ **θέσεις σκοτεινών κροσσών** **(3)**

Παρατηρείται ότι η τελευταία για m = 0 δίνει y = 0, δηλαδή στην κατώτατη θέση y = 0 πάνω από το κάτοπτρο υπάρχει τώρα ένας σκοτεινός κροσσός .
Για λ = 500nm, L = 100cm και d = 1cm η θέση του πρώτου φωτεινού κροσσού σύμφωνα με την **(2)** για m = 0 είναι:

$$y = \frac{\lambda L}{4d} = \frac{500\text{nm} \cdot 1\text{m}}{4\text{cm}} = \frac{500 \cdot 10^{-9}\,\text{m}^2}{4 \cdot 10^{-2}\,\text{m}} = 1{,}25 \cdot 10^{-5}\,\text{m} \Rightarrow y = 12{,}5\mu\text{m}$$

Ενώ ο πρώτος σκοτεινός κροσσός πάνω από το κάτοπτρο σύμφωνα με την **(3)** για m = 1 είναι σε απόσταση:

$$y = \frac{2L}{2d} = \frac{500\text{nm} \cdot 1\text{m}}{2\text{cm}} \Rightarrow y = 25\mu\text{m}$$

ΘΕΜΑ 9

Να αποδειχτεί ότι η ένταση του συνισταμένου κύματος σε συμβολή δυο σχισμών (πείραμα Young) δίνεται από τη σχέση **(4 – 7)**.

Λύση

Έστω ότι οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου των δυο κυμάτων στο σημείο P του πετάσματος είναι:

$$E_1 = E_o \sin \omega t \qquad \text{και} \qquad E_2 = E_o \sin(\omega t + \varphi)$$

όπου ω η κυκλική συχνότητα των κυμάτων και φ η διαφορά φάσης μεταξύ αυτών. Η συνισταμένη κυματική διαταραχή στο P σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας είναι:

$$E = E_1 + E_2 = E_o \sin \omega t + E_o \sin(\omega t + \varphi) =$$

$$= 2E_o \sin\left(\frac{\omega t + \omega t + \varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega t + \varphi - \omega t}{2}\right) =$$

$$= 2E_o \sin\left(\frac{2\omega t + \varphi}{2}\right) \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \Rightarrow E = 2E_o \sin\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\frac{\varphi}{2}$$

ή αλλιώς : $E = E_\theta \sin(\omega t + \beta)$ **(1)**

όπου $\beta = \varphi/2$ και $E_\theta = 2E_o \cos\beta = E_m \cos\beta$ **(2)**

Παρατηρείται ότι το πλάτος E_θ της συνισταμένης κυματικής διαταραχής, το οποίο καθορίζει την ένταση των κροσσών συμβολής, εξαρτάται από την τιμή της γωνίας θ, δηλαδή από τη θέση του σημείου P. Κι αυτό γιατί η διαφορά φάσης φ οφείλεται στη διαφορά δρόμου των δυο κυμάτων, οπότε:

$$\frac{\text{διαφορά φάσης}}{2\pi} = \frac{\text{διαφορά δρόμου}}{\lambda} \Rightarrow \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{d\sin\theta}{\lambda} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta \qquad \textbf{(3)}$$

Άρα : $\beta = \frac{\varphi}{2} \overset{(3)}{\Rightarrow} \beta = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta$ **(4)**

Επομένως αν αντικατασταθεί η έκφραση αυτή του β στην **(2)** λαμβάνεται το E_θ συναρτήσει της γωνίας θ.

Επειδή η ένταση του συνισταμένου κύματος I_θ είναι ανάλογη του τετραγώνου της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου E_θ ($I_\theta \sim E_\theta^2$), ο λόγος της I_θ προς την ένταση I_o του κάθε συμβαλλόμενου κύματος είναι:

$$\frac{I_\theta}{I_o} = \left(\frac{E_\theta}{E_o}\right)^2 \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{I_\theta}{I_o} = \left(\frac{2E_o\cos\beta}{E_o}\right)^2 = 4\cos^2\beta \Rightarrow I_\theta = 4I_o\cos^2\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_\theta = I_m\cos^2\beta \overset{(4)}{\Rightarrow} I_\theta = I_m\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right) \qquad \textbf{(5)}$$

όπου $I_m = 4I_o$ είναι η μέγιστη ένταση του συνιστάμενου κύματος, η οποία είναι τετραπλάσια της εντάσεως I_o του κάθε κύματος και αντιστοιχεί στο σημείο όπου $\varphi = 2\beta = 0,\pi,2\pi$ ή $\theta = 0,\pi,2\pi$.

✎ Σημείωση

Και από τη σχέση **(5)** της έντασης μπορούν να εξαχθούν οι συνθήκες ενισχυτικής και αναιρετικής συμβολής. Έτσι οι θέσεις των μεγίστων της έντασης (συνθήκη ενίσχυσης) παρατηρούνται όταν:

$$\beta = m\pi \Rightarrow \frac{\pi d\sin\theta}{\lambda} = m\pi \Rightarrow d\sin\theta = m\lambda\,, \qquad m = 0,1,2,\ldots$$

Ενώ τα ελάχιστα της έντασης (συνθήκη αναίρεσης) παρατηρούνται όταν:

$$\beta = \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi \Rightarrow \frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta = \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi \Rightarrow d\sin\theta = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda\,, \quad m = 0,1,2,\ldots$$

ΘΕΜΑ 10

Σε ένα ορισμένο σημείο μιας εικόνας συμβολής του Young, η ένταση στο πέτασμα είναι 6,4% της μέγιστης.
α) Υπολογίστε την ελάχιστη διαφορά φάσης σε αυτή την περίπτωση.
β) Αν το μήκος κύματος του φωτός είναι 587,5nm (από μία λυχνία εκκένωσης ηλίου), προσδιορίστε την διαφορά διαδρομής.

Λύση

α) Αφού στο σημείο αυτό είναι $I_\theta = 0{,}064 I_m$ η σχέση **(5)** του **Θέματος 9** δίνει:

$$I_\theta = I_m \cos^2\beta \Rightarrow 0{,}064 I_m = I_m \cos^2\beta \Rightarrow \cos^2\beta = 0{,}064 \Rightarrow \cos\beta = 0{,}253 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = \cos^{-1} 0{,}253 \Rightarrow \beta = 75^\circ$$

Επομένως επειδή $\beta = \varphi/2$, η διαφορά φάσης φ μεταξύ των δυο κυμάτων είναι:

$$\varphi = 2\beta \Rightarrow \varphi = 150^\circ$$

β) Η διαφορά δρόμου dsinθ των δυο κυμάτων σύμφωνα με την σχέση **(4)** του **Θέματος 9** είναι:

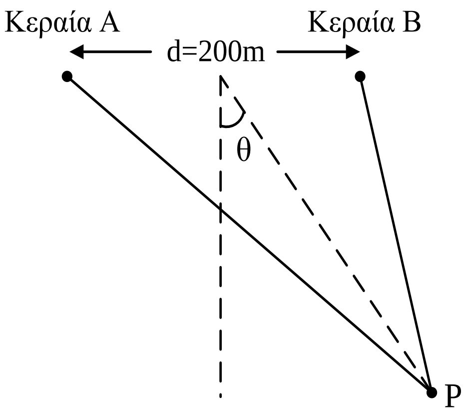
$$\beta = \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda} \Rightarrow d\sin\theta = \frac{\beta\lambda}{\pi} = \frac{75^\circ}{180^\circ} \cdot 587{,}5\text{nm} = 0{,}42 \cdot 587{,}5\text{nm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\sin\theta = 246{,}75\text{nm}$$

ΘΕΜΑ 11

Δυο πανομοιότυπες κεραίες εκπέμπουν σε συχνότητα 3 MHz και απέχουν απόσταση 200m.
α) Να υπολογιστεί η ένταση του σήματος που προκύπτει από τη συμβολή των κυμάτων από τις δυο πηγές σε μεγάλες αποστάσεις από αυτές, ως συνάρτηση της γωνίας θ ως προς άξονα μεσοκάθετο στην ευθεία που ορίζουν και της έντασης I_o της κάθε κεραίας.
β) Να βρεθούν οι τιμές της γωνίας θ για τις οποίας η ένταση είναι μέγιστη.
(Τμήμα Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



α) Το σύστημα των δυο αυτών πανομοιότυπων κεραιών είναι ισοδύναμο με τη διάταξη της συμβολής διπλής σχισμής του πειράματος Young. Έτσι η ένταση του σήματος που προκύπτει από τη συμβολή των κυμάτων από τις δυο κεραίες σε μεγάλες αποστάσεις θα δίνεται από τη σχέση **(5)** του **Θέματος 9**. Δηλαδή:

$$I_\theta = 4I_o \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)$$

όπου dsinθ είναι η διαφορά δρόμου των κυμάτων από τις δυο κεραίες και λ το μήκος κύματος της ακτινοβολίας που εκπέμπουν οι κεραίες. Είναι:

$$c = \lambda v \Rightarrow \lambda = \frac{c}{v} = \frac{3\cdot 10^8\,m/sec}{3\cdot 10^6\,sec^{-1}} \Rightarrow \lambda = 100m$$

Οπότε: $$\frac{\pi d}{\lambda} = \frac{3{,}14\cdot 200m}{100m} = 6{,}28$$

Άρα: $$I_\theta = 4I_o\cos^2(6{,}28\sin\theta)$$

β) Για να είναι η ένταση I_θ μέγιστη θα πρέπει:

$$6{,}28\sin\theta = m\pi \Rightarrow \sin\theta = \frac{m}{2}, \quad m = 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Άρα πρέπει: $$\sin\theta = 0,\pm\frac{1}{2},\pm1 \quad ή \quad \theta = 0^o,30^o,90^o,210^o,270^o$$

Προσέξτε ότι οι τιμές του sinθ μεγαλύτερες από 1 δεν έχουν έννοια.

ΘΕΜΑ 12

Δυο πανομοιότυπες κεραίες Α, Β εκπέμπουν σε μήκος κύματος $\lambda = 200\text{m}$.

α) Να δείξετε ότι η ένταση της εικόνας συμβολής δίνεται από τη σχέση $I = 4I_s\cos^2(\delta/2)$, όπου I_s η ένταση της κάθε κεραίας και δ η διαφορά φάσης μεταξύ των δυο σημάτων.

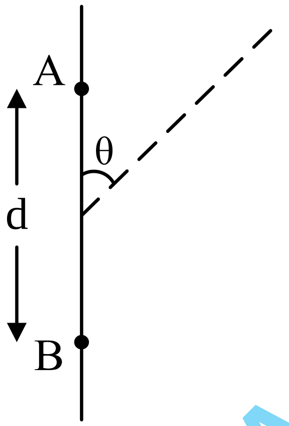
β) Να βρεθεί η απόσταση d μεταξύ των κεραιών για την οποία η ένταση I γίνεται μέγιστη στην κατεύθυνση $\theta=\pi/4$, στις εξής δυο περιπτώσεις:

i) οι κεραίες εκπέμπουν σε φάση

ii) οι κεραίες εκπέμπουν με διαφορά φάσης $\pi/2$.

(Τμήμα Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



α) Η απόδειξη της έντασης της εικόνας συμβολής των δυο κυμάτων των κεραιών είναι ακριβώς η ίδια με αυτή που αναπτύχθηκε στο θέμα 4.9, όπου εδώ είναι $\varphi = \delta$ η διαφορά φάσης μεταξύ των δυο κυμάτων και $I_o = I_s$ η ένταση του κύματος από κάθε κεραία

.

β) Η διαφορά φάσης δ των κυμάνσεων των δυο κεραιών γενικά είναι:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta + \varphi \qquad \textbf{(1)}$$

όπου φ η διαφορά φάσης των κεραιών.

i) Επομένως αν οι κεραίες εκπέμπουν σε φάση, δηλαδή $\varphi = 0$ η **(1)** δίνει:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \delta = \frac{2\pi}{\lambda} d\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \delta = \frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda} d \qquad \textbf{(2)}$$

Άρα στην περίπτωση αυτή η ένταση γίνεται μέγιστη, δηλαδή τα κύματα των δύο κεραιών συμβάλλουν ενισχυτικά όταν:

$$\delta = 2m\pi \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda} d = 2m\pi \Rightarrow d = m\frac{2}{\sqrt{2}}\lambda \Rightarrow d = m\sqrt{2}\lambda, \quad m = 1,2,\ldots$$

Η τιμή $m = 0$ δεν είναι δεκτή , γιατί τότε οι πηγές ταυτίζονται και δεν προκύπτει συμβολή.

Κάνοντας αριθμητική αντικατάσταση προκύπτει ότι η απόσταση d μεταξύ των κεραιών πρέπει να είναι:

$$d = 200\sqrt{2}\text{m},\quad 400\sqrt{2}\text{m},\quad 600\sqrt{2}\text{m},...$$

ii) Στην περίπτωση που οι κεραίες εκπέμπουν με διαφορά φάσης π/2, η **(1)** δίνει:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} d \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \delta = \frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda} d + \frac{\pi}{2} \qquad \textbf{(3)}$$

Άρα τώρα η ένταση μεγιστοποιείται όταν:

$$\delta = 2m\pi \overset{(3)}{\Rightarrow} \frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda} d + \frac{\pi}{2} = 2m\pi \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2\lambda} d + \frac{1}{4} = m \Rightarrow \frac{d}{\sqrt{2}\lambda} = m - \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \left(m - \frac{1}{4}\right)\sqrt{2}\lambda \Rightarrow d = \frac{4m-1}{4}\sqrt{2}\lambda, \qquad m = 1,2,....$$

Η τιμή $m = 0$ απορρίπτεται γιατί δίνει $d < 0$.
Κάνοντας αριθμητική αντικατάσταση τελικά προκύπτει:

$$d = 150\sqrt{2}\text{m},\ 350\sqrt{2}\text{m},\ 550\sqrt{2}\text{m},....$$

ΘΕΜΑ 13

Λεπτή μεμβράνη πάχους 0,40μm φωτίζεται από λευκό φως κάθετο στην επιφάνειά της. Ο δείκτης διάθλασης της μεμβράνης είναι 1,50. Ποια μήκη κύματος από το φάσμα του ορατού φωτός (400nm – 700nm) θα είναι ενισχυμένα στην ανακλώμενη δέσμη;

Λύση

Από τη συνθήκη ενισχυτικής συμβολής από ανάκλαση **(4 – 9)** προκύπτει:

$$2nd = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2nd}{m+1/2} = \frac{2\cdot 1{,}5\cdot 400\text{nm}}{m+1/2} \Rightarrow \lambda = \frac{1200\text{nm}}{m+1/2}$$

Άρα:

Για $m = 0$: $\lambda = 2400\text{nm}$
Για $m = 1$: $\lambda = 800\text{nm}$
Για $m = 2$: $\lambda = 480\text{ nm}$
Για $m = 3$: $\lambda = 343\text{nm}$

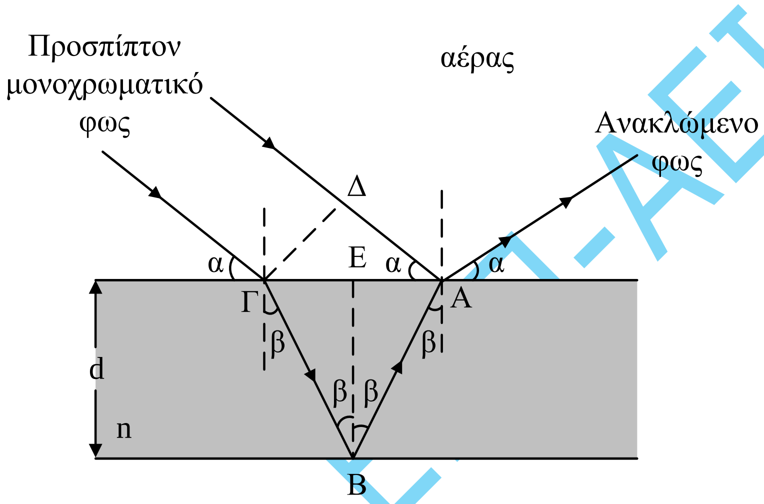
Δηλαδή μόνο το μήκος κύματος $\lambda = 480\text{nm}$ του ορατού φωτός, που αντιστοιχεί στο μπλε χρώμα, θα παρατηρείται ενισχυμένο μετά την ανάκλαση του λευκού φωτός στη μεμβράνη.

ΘΕΜΑ 14

Αν το φως που προσπίπτει στη λεπτή πλάκα του σχήματος είναι μονοχρωματικό με μήκος κύματος λ, να βρεθεί η σχέση που πρέπει να ικανοποιεί η γωνία α για να παρατηρείται έντονο ανακλώμενο φως (συνθήκη ενισχυτικής συμβολής από ανάκλαση).

Λύση

Για να παρατηρείται έντονο ανακλώμενο φως από την πλάκα θα πρέπει οι δυο προσπίπτουσες ακτίνες που συμβάλλουν να είναι στο σημείο Α σε φάση.



Έτσι για να συμβάλουν αυτές ενισχυτικά, επειδή πάνω στην ισοφασική επιφάνεια ΓΔ είναι σε φάση, για να είναι σε φάση και στο Α θα πρέπει η διαφορά δρόμου των δυο ακτίνων να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος.

Δηλαδή:

$$(\Gamma B) + (BA) - (\Delta A) = m\lambda \qquad m = 0,1,2,\ldots \qquad \textbf{(1)}$$

Λόγω της ανάκλασης της ακτίνας στο σημείο Β της κάτω επιφάνειας της πλάκας φαίνεται εύκολα από το σχήμα ότι:

$$(\Gamma B)=(BA) \qquad \textbf{(2)}$$

Επίσης από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ προκύπτει:

$$\cos\beta = \frac{(EB)}{(BA)} \Rightarrow (BA) = \frac{(EB)}{\cos\beta} \Rightarrow (BA) = \frac{d}{\cos\beta} \qquad \textbf{(3)}$$

και $\tan\beta = \dfrac{(EA)}{(EB)} \Rightarrow (EA) = (EB)\tan\beta \Rightarrow (EA) = d\tan\beta$ **(4)**

Και από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ προκύπτει:

$$\cos\alpha = \frac{(\Delta A)}{(A\Gamma)} \Rightarrow (\Delta A) = (A\Gamma)\cos\alpha = 2(EA)\cos\alpha \overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} (\Delta A) = 2d\tan\beta\cos\alpha \qquad \textbf{(5)}$$

Αντικαθιστώντας στην **(1)** τις **(2)**, **(3)** και **(5)** προκύπτει:

$$\frac{2d}{\cos\beta} - 2d\tan\beta\cos\alpha = m\lambda \Rightarrow \frac{2d}{\cos\beta}(1-\sin\beta\cos\alpha) = m\lambda \qquad \textbf{(6)}$$

Στο σημείο Γ η γωνία διάθλασης β αντιστοιχεί σε γωνία πρόσπτωσης $90^o - \alpha$, οπότε ο νόμος του Snell δίνει:

$$n_{\alpha\acute{\varepsilon}\rho\alpha}\sin(90^\circ - \alpha) = n\sin\beta \Rightarrow 1\sin(90^\circ-\alpha) = n\sin\beta \Rightarrow \cos\alpha = n\sin\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\beta = \frac{\cos\alpha}{n} \qquad \textbf{(7)}$$

Και από τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα προκύπτει:

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1 \Rightarrow \cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} \overset{(7)}{\Rightarrow} \cos\beta = \sqrt{1-\frac{\cos^2\alpha}{n^2}} \qquad \textbf{(8)}$$

Επομένως αντικαθιστώντας στην **(6)** τις **(7)** και **(8)** προκύπτει τελικά η ζητούμενη συνθήκη:

$$\frac{2d}{\sqrt{1-\dfrac{\cos^2\alpha}{n^2}}}\left(1-\frac{\cos\alpha}{n}\cos\alpha\right) = m\lambda \Rightarrow \frac{2dn}{\sqrt{n^2-\cos^2\alpha}}\left(1-\frac{\cos^2\alpha}{n}\right) = m\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2d(n-\cos^2\alpha) = m\lambda\sqrt{n^2-\cos^2\alpha} \qquad m = 0,1,2,\ldots$$

ΘΕΜΑ 15

Σε ένα πείραμα δακτυλίων Newton η ακτίνα καμπυλότητας του φακού είναι 5m και η διάμετρός του 20mm. Στο φακό προσπίπτει μονοχρωματικό φως μήκους κύματος 548nm.
α) Πόσοι δακτύλιοι δημιουργούνται;

β) Πόσοι δακτύλιοι θα εμφανίζονταν αν η διάταξη ήταν βυθισμένη στο νερό (n = 1,33);

Λύση

α) Σύμφωνα με την **(4 – 13)** η ακτίνα του δακτυλίων Newton είναι:

$$r=\sqrt{\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda R}\Rightarrow r^2=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda R\Rightarrow\frac{r^2}{\lambda R}=m+\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m=\frac{r^2}{\lambda R}-\frac{1}{2} \qquad \textbf{(1)}$$

Αν στην παραπάνω αντικατασταθεί η ακτίνα του δακτυλίου με τη ακτίνα του φακού, δηλαδή r = 10mm = 10^{-2}m, προκύπτει ο αριθμός των κυκλικών κροσσών συμβολής (δακτυλίων Newton)που εμφανίζονται. Δηλαδή:

$$m=\frac{10^{-4}m^2}{548\cdot10^{-9}m\cdot5m}-\frac{1}{2}=\frac{10^5}{2740}-\frac{1}{2}=36{,}5-\frac{1}{2}\Rightarrow m=36$$

β) Βυθίζοντας το σύστημα στο νερό μεταβάλλεται το μήκος κύματος του φωτός και γίνεται:

$$\lambda'=\frac{\lambda}{n}=\frac{548nm}{1{,}33}\Rightarrow\lambda'=412nm$$

Άρα στην περίπτωση αυτή η **(1)** δίνει τον αριθμό των σχηματιζόμενων δακτυλίων ως:

$$m'=\frac{r^2}{\lambda' R}-\frac{1}{2}=\frac{10^{-4}m^2}{412\cdot10^{-9}m\cdot5m}-\frac{1}{2}=\frac{10^5}{2060}-\frac{1}{2}=48{,}5-\frac{1}{2}\Rightarrow m'=48$$

ΘΕΜΑ 16

Αν η απόσταση του πρώτου και του πέμπτου ελάχιστου σε σχηματισμό περίθλασης απλής σχισμής είναι 0,35mm, με το πέτασμα σε απόσταση 50cm από τη σχισμή και χρησιμοποιώντας φως μήκους κύματος 550nm, ποιο είναι το πλάτος της σχισμής;

Λύση

Η απόσταση των σκοτεινών κροσσών (ελαχίστων) από το κέντρο του διαμορφώματος σύμφωνα με την **(4 – 15)** είναι:

$$y_m = R\frac{m\lambda}{\alpha}, \qquad m = 1,2,3,\ldots$$

Επομένως το πρώτο ελάχιστο (m = 1) σχηματίζεται στη θέση:

$$y_1 = \frac{R\lambda}{\alpha} \qquad \textbf{(1)}$$

Ενώ το πέμπτο ελάχιστο (m = 5) στη θέση:

$$y_5 = \frac{5R\lambda}{\alpha} \qquad \textbf{(2)}$$

Άρα η απόσταση y = 0,35mm μεταξύ του πρώτου και του πέμπτου ελαχίστου είναι:

$$y = y_5 - y_1 \overset{(1),(2)}{\Rightarrow} y = \frac{5R\lambda}{\alpha} - \frac{R\lambda}{\alpha} \Rightarrow y = \frac{4R\lambda}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{4R\lambda}{y} =$$

$$= \frac{4\cdot 0{,}5\text{m}\cdot 550\cdot 10^{-9}\text{m}}{0{,}35\cdot 10^{-3}\text{m}} \Rightarrow \alpha = 3{,}14\cdot 10^{-3}\text{m} \;\; \text{ή} \;\; 3{,}14\text{mm}$$

ΘΕΜΑ 17

Σχισμή πλάτους 1mm φωτίζεται από φως μήκους κύματος 589 nm. Ένας σχηματισμός περίθλασης παρατηρείται πάνω σε οθόνη 3m μακριά από τη σχισμή. Να υπολογιστεί η απόσταση ανάμεσα στα δυο πρώτα ελάχιστα της περίθλασης, τα οποία βρίσκονται εκατέρωθεν του κεντρικού μεγίστου.

Λύση

Το πρώτο ελάχιστο της περίθλασης (m = 1) σύμφωνα με την **(4 – 15)** εμφανίζεται στη θέση :

$$y_1 = \frac{R\lambda}{\alpha} = \frac{3m \cdot 589 \cdot 10^{-9}\,m}{10^{-3}\,m} \Rightarrow y_1 = 1{,}76\ mm$$

Άρα για τα δυο πρώτα ελάχιστα της περίθλασης εκατέρωθεν του κεντρικού μεγίστου, επειδή ισαπέχουν από αυτό, η απόστασή τους θα είναι:

$$d = 2y_1 = 2 \cdot 1{,}76mm \Rightarrow d = 3{,}52mm$$

ΘΕΜΑ 18

Ερυθρό φως μήκους κύματος 633nm, προερχόμενο από ένα laser He-Ne, διέρχεται διαμέσου σχισμής εύρους 0,3 mm. Η εικόνα περίθλασης παρατηρείται σε πέτασμα τοποθετημένο σε απόσταση 4m. Ορίζοντας ως εύρος ενός φωτεινού κροσσού την απόσταση μεταξύ των εκατέρωθεν αυτού ελαχίστων , να υπολογιστούν:

α) Το εύρος του κεντρικού φωτεινού κροσσού.

β) Το εύρος του πρώτου φωτεινού κροσσού, αμέσως μετά τον κεντρικό φωτεινό κροσσό, προς τη μία ή την άλλη του πλευρά.

Λύση

α) Το εύρος του κεντρικού φωτεινού κροσσού d, σύμφωνα με το **Θέμα 17** είναι ίσο με το διπλάσιο της απόστασης του πρώτου ελαχίστου y_1 από το κεντρικό μέγιστο. Από την **(4 – 15)** για m = 1 είναι:

$$y_1 = \frac{R\lambda}{\alpha} = \frac{4\text{m} \cdot 633 \cdot 10^{-9}\text{m}}{0{,}3 \cdot 10^{-3}\text{m}} = 8{,}44 \cdot 10^{-3}\text{m} \Rightarrow y_1 = 8{,}44\,\text{mm}$$

Άρα: $d = 2y_1 = 2 \cdot 8{,}44\text{mm} \Rightarrow \quad d = 16{,}88\text{mm}$

β) Αντίστοιχα το εύρος του πρώτου φωτεινού κροσσού d_1 , αμέσως μετά τον κεντρικό φωτεινό κροσσό , ισούται με την απόσταση μεταξύ του πρώτου ελαχίστου y_1 και του δευτέρου ελαχίστου y_2 από το κεντρικό μέγιστο.

Από την **(4 – 15)** για m = 2 είναι:

$$y_2 = \frac{2R\lambda}{\alpha} = \frac{2 \cdot 4\text{m} \cdot 633 \cdot 10^{-9}\text{m}}{0{,}3 \cdot 10^{-3}\text{m}} = 16{,}88 \cdot 10^{-3}\text{m} \Rightarrow y_2 = 16{,}88\ \text{mm}$$

Άρα : $d_1 = y_2 - y_1 = 16{,}88\text{mm} - 8{,}44\text{mm} \Rightarrow d_1 = 8{,}44\text{mm}$

ΘΕΜΑ 19

Φως μήκους κύματος 589 nm από μια απόμακρη πηγή προσπίπτει επί σχισμής εύρους 0,85mm και η προκύπτουσα εικόνα περίθλασης παρατηρείται επί πετάσματος απέχοντος 2m από τη σχισμή.

α) Να υπολογιστεί το εύρος του κεντρικού φωτεινού κροσσού, δηλαδή η απόσταση μεταξύ των δυο πρώτων σκοτεινών κροσσών εκατέρωθεν του κεντρικού φωτεινού κροσσού.

β) Αν η όλη διάταξη (σχισμή, πέτασμα και ο μεταξύ τους χώρος) βυθιστεί στο νερό (n = 1,33), να υπολογιστεί το αντίστοιχο εύρος του κεντρικού φωτεινού κροσσού στη περίπτωση αυτή.

Λύση

α) Το εύρος του κεντρικού φωτεινού κροσσού d,όπως αναφέρθηκε και στα **Θέματα 17** και **18**, ισούται με το διπλάσιο της απόστασης του πρώτου ελαχίστου y_1 από κεντρικό μέγιστο.
Από την **(4 – 15)** για m = 1 είναι:

$$y_1 = \frac{R\lambda}{\alpha} = \frac{2m \cdot 589 \cdot 10^{-9}\,m}{0{,}85 \cdot 10^{-3}\,m} = 1{,}39 \cdot 10^{-3}\,m \Rightarrow y_1 = 1{,}39mm$$

Άρα: $d = 2y_1 = 2 \cdot 1{,}39mm \Rightarrow d = 2{,}78mm$

β) Αν η όλη διάταξη βυθιστεί στο νερό θα μεταβληθεί το μήκος κύματος του φωτός και συγκεκριμένα θα γίνει:

$$\lambda' = \frac{\lambda}{n} = \frac{589nm}{1{,}33} \Rightarrow \lambda' = 443nm$$

Συνεπώς στην περίπτωση αυτή η απόσταση του πρώτου ελαχίστου y_1' από το κεντρικό μέγιστο θα είναι:

$$y_1' = \frac{R\lambda'}{\alpha} = \frac{2m \cdot 443 \cdot 10^{-9}\,m}{0{,}85 \cdot 10^{-3}\,m} = 1{,}04 \cdot 10^{-3}\,m \Rightarrow y_1' = 1{,}04mm$$

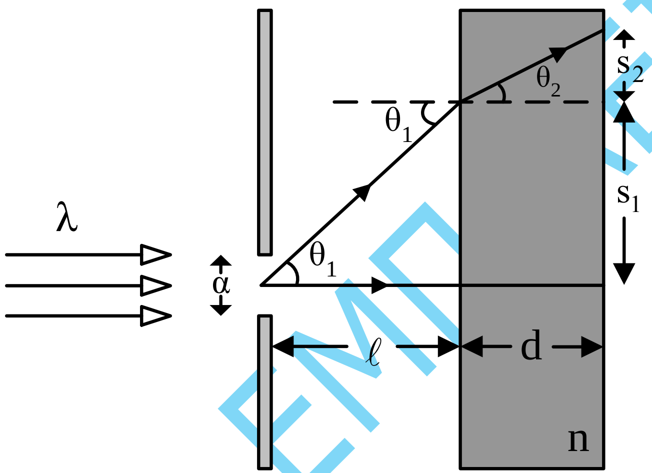
Άρα το εύρος του κεντρικού φωτεινού κροσσού στην περίπτωση αυτή θα είναι:

$$d' = 2\,y_1' = 2 \cdot 1{,}04mm \Rightarrow d' = 2{,}08mm$$

ΘΕΜΑ 20

Ακτινοβολία μήκους κύματος λ περιθλάται από λεπτή ορθογώνια σχισμή πλάτους $\alpha=\lambda\sqrt{2}$ πίσω από τη σχισμή και σε απόσταση $\ell=2\text{m}$ βρίσκεται ορθογώνια διαφανής πλάκα πάχους $d=\sqrt{3}\text{m}$ που έχει δείκτη διάθλασης $n=\sqrt{2}$. Το περιθλώμενο φως εισέρχεται στην πλάκα και προβάλλεται στην πίσω πλευρά της που είναι αδιαφανής (δηλαδή δεν εξέρχεται από την πλάκα). Να βρεθεί η απόσταση του πρώτου ελαχίστου της περιθλώμενης ακτινοβολίας από το κεντρικό της μέγιστο στην πίσω αδιαφανή πλευρά της πλάκας.

Λύση



Σύμφωνα με την **(4 – 14)** τα ελάχιστα της περιθλώμενης ακτινοβολίας στην μπροστά πλευρά της πλάκας εμφανίζονται στα σημεία εκείνα για τα οποία ισχύει :

$$\alpha\sin\theta = m\lambda, \quad \text{όπου} \quad m=1,2,3,\ldots$$

(Στην τιμή m=0 εμφανίζεται το κεντρικό μέγιστο).
Επομένως το πρώτο ελάχιστο (m=1) εμφανίζεται σε γωνία θ_1 τέτοια ώστε :

$$\alpha\sin\theta_1 = \lambda \Rightarrow \sin\theta_1 = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta_1 = 45^o$$

Σύμφωνα με την τριγωνομετρία του σχήματος το πρώτο ελάχιστο θα εμφανίζεται στην μπροστινή πλευρά της πλάκας σε απόσταση s_1 για την οποία :

$$\tan\theta_1 = \frac{s_1}{\ell} \Rightarrow s_1 = \ell\tan\theta_1 = 2\tan 45^o \Rightarrow s_1 = 2\text{m}$$

Στη συνέχεια η ακτινοβολία εισέρχεται στην πλάκα και διαθλάται και η γωνία διάθλασης θ_2 μπορεί να υπολογιστεί με το νόμο του Snell ως :

$$n_\alpha \sin\theta_1 = n\sin\theta_2 \Rightarrow \sin\theta_2 = \frac{\sin\theta_1}{n} = \frac{\sin 45^o}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_2 = 30^o$$

Έτσι η απόσταση s_2 θα είναι :

$$\tan\theta_2 = \frac{s_2}{d} \Rightarrow s_2 = d\tan\theta_2 = \sqrt{3}\tan 30^o = \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{3}m \Rightarrow s_2 = 1m$$

Άρα επειδή η ακτινοβολία του κεντρικού μέγιστου δεν διαθλάται γιατί προσπίπτει κάθετα στην επιφάνεια της πλάκας, προκύπτει τελικά ότι το πρώτο ελάχιστο θα εμφανιστεί στην πίσω επιφάνεια της πλάκας σε απόσταση $s_1+s_2=3m$ από το κεντρικό μέγιστο.

ΘΕΜΑ 21

Η ένταση του φωτός στην εικόνα περίθλασης Fraunhofer από μια απλή σχισμή δίνεται από τη σχέση:

$$I = I_o \left(\frac{\sin\delta}{\delta} \right)^2 \qquad \textbf{(1)}$$

όπου $\delta = \dfrac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$ και I_o η μέγιστη ένταση στην κατεύθυνση $\theta = 0$ (κεντρικό μέγιστο).

α) Δείξτε ότι η ένταση πέφτει στο μισό της μέγιστης τιμής όταν $\sin^2\delta = \delta^2/2$.

β) Να προσδιοριστούν οι θέσεις των ελαχίστων και των μεγίστων της περιθλάσεως Fraunhofer μιας σχισμής, δηλαδή οι εξισώσεις που δίνουν τις τιμές του δ για τις οποίες η ένταση I ελαχιστοποιείται και μεγιστοποιείται αντίστοιχα.

γ) Προσδιορίστε τις τρεις μικρότερες μη αρνητικές τιμές του δ, που επαληθεύουν την εξίσωση του δ για την οποία η ένταση I μεγιστοποιείται.

Λύση

α) Αν $I = I_o / 2$ τότε η σχέση **(1)** δίνει:

$$\frac{I_o}{2} = I_o \left(\frac{\sin\delta}{\delta} \right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\sin^2\delta}{\delta^2} \Rightarrow \sin^2\delta = \frac{\delta^2}{2}$$

Δηλαδή είναι μια υπερβατική σχέση ως προς δ.

β) Οι ακραίες τιμές της συνάρτησης I(δ) αντιστοιχούν σε τιμές της δ για τις οποίες ισχύει:

$$\frac{dI}{d\delta} = 0 \Rightarrow I_o \frac{2\delta^2 \sin\delta\cos\delta - 2\delta\sin^2\delta}{\delta^4} = 0 \Rightarrow I_o \frac{2\sin\delta(\delta\cos\delta - \sin\delta)}{\delta^3} = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

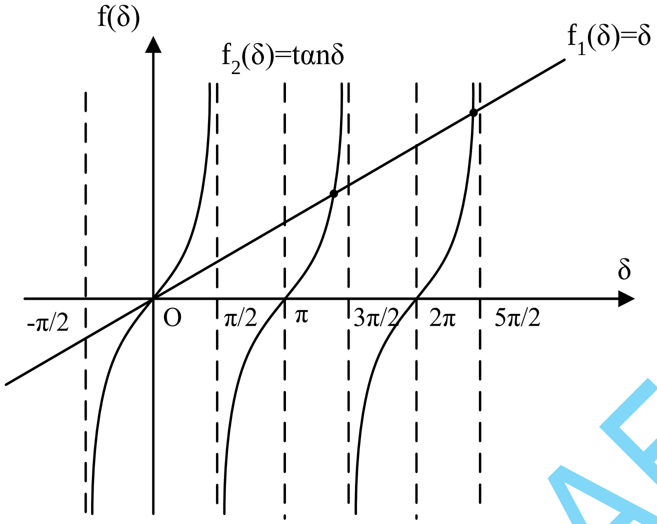
Οι λύσεις της εξίσωσης **(2)** είναι: $\sin\delta = 0$ και $\delta\cos\delta - \sin\delta = 0$ (με $\delta \neq 0$)
Εφαρμόζοντας το κριτήριο της δευτέρας παραγώγου προκύπτει ότι ελάχιστα εμφανίζονται όταν $\sin\delta = 0$ και $\delta \neq 0$, δηλαδή όταν:

$$\delta = m\pi, \quad m = 1,2,3,\ldots \qquad ή \qquad \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda} = m\pi \Rightarrow \boxed{a\sin\theta = m\lambda} \quad (\min)$$

Αντίθετα τα μέγιστα θα εμφανίζονται για τιμές του δ που είναι διάφορες του μηδενός και επαληθεύουν τη σχέση:

$$\delta\cos\delta - \sin\delta = 0 \Rightarrow \delta\cos\delta = \sin\delta \Rightarrow \boxed{\tan\delta = \delta} \quad (\max)$$

γ) Η εξίσωση των μεγίστων tanδ = δ λύνεται γραφικά με τη βοήθεια των σημείων τομής της ευθείας $f_1(\delta) = \delta$ με τις καμπύλες $f_2(\delta) = \tan\delta$, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

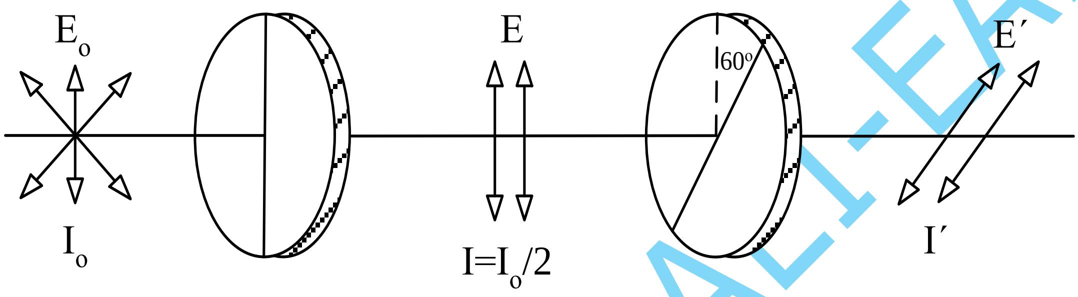


Παρατηρείται ότι από τα σημεία τομής το πρώτο μέγιστο εμφανίζεται για δ = 0 (κεντρικό μέγιστο), ενώ τα δευτερεύοντα μέγιστα για δ = 1,43π, 2,46π, 3,47π ,…. Σημειώνεται ότι τα μέγιστα δεν είναι ακριβώς στο μέσο της απόστασης μεταξύ δυο διαδοχικών ελαχίστων.

ΘΕΜΑ 22

Μη πολωμένο φως έντασης I_o προσπίπτει σε πολωτικό φίλτρο. Το εξερχόμενο φως διέρχεται μέσω ενός δεύτερου πολωτικού φίλτρου, του οποίου ο άξονας σχηματίζει γωνία 60^o με τον άξονα του πρώτου φίλτρου. Να βρείτε την ένταση της δέσμης μετά τη διέλευσή της από το δεύτερο πολωτή και την κατάσταση πόλωσής της.

Λύση



Η ένταση του φωτός που διέρχεται από τον πρώτο πολωτή, σύμφωνα με την **(4 – 19)** είναι:

$$I = \frac{I_o}{2}$$

Επομένως η ένταση του φωτός που διέρχεται από το δεύτερο πολωτή, σύμφωνα με το νόμο του Malus **(4 – 20)** είναι:

$$I' = I\cos^2\varphi = \frac{I_o}{2}\cos^2 60^\circ = \frac{I_o}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{I_o}{2}\cdot\frac{1}{4} \Rightarrow I' = \frac{I_o}{8}$$

Το διερχόμενο φως από το δεύτερο πολωτή είναι γραμμικά πολωμένο και σχηματίζει γωνία 60^o με το γραμμικά πολωμένο φως που εξέρχεται από τον πρώτο πολωτή, όπως φαίνεται στο σχήμα.

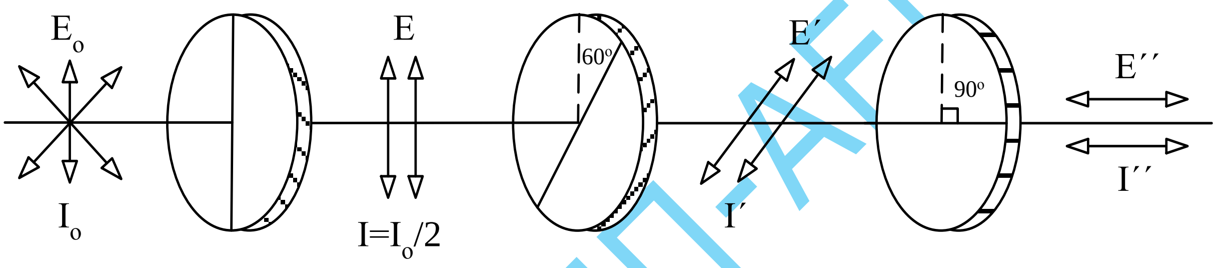
ΘΕΜΑ 23

Τρία πολωτικά φίλτρα συστοιχούνται διαδοχικά με τις επιφάνειές τους παράλληλες, ενώ ο άξονας πόλωσης του δεύτερου και τρίτου πολωτή σχηματίζει γωνία 60^o και 90^o αντίστοιχα με τον άξονα πόλωσης του πρώτου πολωτή.

α) Αν μη πολωμένο φως έντασης I_o προσπίπτει στη διάταξη των πολωτών , βρείτε την ένταση και την κατάσταση πόλωσης του φωτός που εξέρχεται από κάθε φίλτρο.

β) Αν απομακρυνθεί το δεύτερο φίλτρο, πόση είναι η ένταση της φωτεινής δέσμης που εξέρχεται από καθένα από τα άλλα δυο φίλτρα;

Λύση



Η ένταση του φωτός που εξέρχεται από το πρώτο πολωτικό φίλτρο, σύμφωνα με την **(4 – 19)** είναι:

$$I = \frac{I_o}{2} \qquad \textbf{(1)}$$

Το φως αυτό είναι γραμμικά πολωμένο στη διεύθυνση του άξονα πόλωσης του πρώτου φίλτρου.

Όταν το φως εξέρχεται από το δεύτερο πολωτικό φύλλο είναι γραμμικά πολωμένο ως προς τη διεύθυνση του άξονα πόλωσης του φίλτρου αυτού και επειδή η γωνία μεταξύ των αξόνων πόλωσης των δυο πρώτων πολωτικών φίλτρων είναι $\varphi = 60^o$, η ένταση του φωτός αυτού, σύμφωνα με το νόμο του Malus **(4 – 20)** είναι:

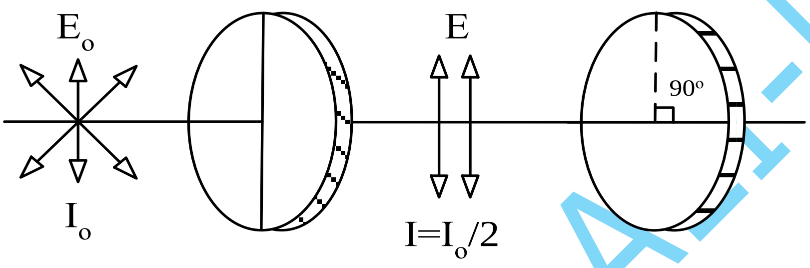
$$I' = I\cos^2\varphi \overset{(1)}{=} \frac{I_o}{2}\cos^2 60^o = \frac{I_o}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow I' = \frac{I_o}{8} \qquad \textbf{(2)}$$

Τελικά όταν το φως εξέρχεται από το τρίτο πολωτικό φίλτρο είναι γραμμικά πολωμένο ως προς τη διεύθυνση του άξονα πόλωσης του τρίτου φίλτρου , δηλαδή η πόλωση είναι κάθετη ως προς την πόλωση του διερχόμενου φωτός από το πρώτο φίλτρο.

Επειδή η γωνία μεταξύ τον αξόνων πόλωσης του δεύτερου και του τρίτου πολωτικού φίλτρου είναι $\theta = 30^o$, η ένταση του εξερχόμενου φωτός από το τρίτο φίλτρο, σύμφωνα με το νόμο του Malus **(4 – 20)** είναι:

$$I'' = I'\cos^2\theta \overset{(2)}{=} \frac{I_o}{8}\cos^2 30^\circ = \frac{I_o}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{I_o}{8}\cdot\frac{3}{4} \Rightarrow I'' = \frac{3}{32}I_o$$

β)



Αν απομακρυνθεί το δεύτερο πολωτικό φίλτρο, τότε η ένταση του φωτός που εξέρχεται από το πρώτο φίλτρο σύμφωνα με την **(4 – 19)** είναι πάλι:

$$I = \frac{I_o}{2}$$

Επειδή τώρα η γωνία μεταξύ των αξόνων πόλωσης των δυο αυτών φίλτρων είναι $\varphi = 90^o$, η ένταση του τελικά εξερχόμενου φωτός , σύμφωνα με το νόμο του Malus **(4 – 20)** είναι:

$$I' = I\cos^2\varphi = \frac{I_o}{2}\cos^2 90^o \Rightarrow I' = 0$$

Δηλαδή στην περίπτωση αυτή δεν εξέρχεται φως από το τελικό πολωτικό φίλτρο.

ΘΕΜΑ 24

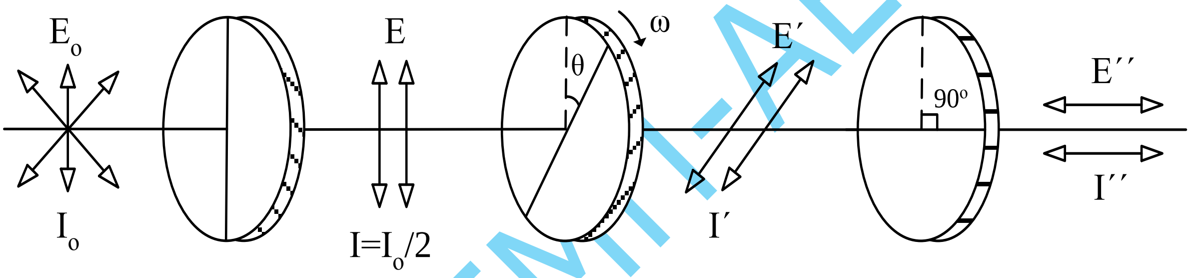
Τρία πολωτικά φίλτρα συστοιχούνται με τα επίπεδα των επιφανειών τους παράλληλα, ενώ οι άξονες πόλωσης του δεύτερου και του τρίτου πολωτή σχηματίζουν γωνίες θ και 90^o αντίστοιχα με τον άξονα πόλωσης του πρώτου πολωτή.
Μη πολωμένο φως έντασης I_o προσπίπτει στη συστοιχία.

α) Βρείτε μια έκφραση για την ένταση του φωτός που εξέρχεται από τη συστοιχία των πολωτών συναρτήσει των I_o και θ.

β) Για ποια τιμή του θ μεγιστοποιείται η ένταση της εξερχόμενης δέσμης;

γ) Αν ο μεσαίος πολωτής περιστρέφεται γύρω από τον άξονα με γωνιακή ταχύτητα ω, να βρεθεί η ένταση της διερχόμενης ακτινοβολίας από τον τρίτο πολωτή.

Λύση



α) Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία του ερωτήματος **(α)** του **Θέματος 22** προκύπτει ότι η ένταση από το πρώτο φίλτρο είναι:

$$I = I_o / 2 \qquad \textbf{(1)}$$

Από το νόμο του Malus η ένταση του φωτός από το δεύτερο φίλτρο είναι:

$$I' = I\cos^2\theta \overset{(1)}{\Rightarrow} I' = \frac{I_o}{2}\cos^2\theta \qquad \textbf{(2)}$$

Αντίστοιχα επειδή η γωνία των αξόνων πόλωσης του δεύτερου και του τρίτου φίλτρου είναι 90^o-θ , η ένταση I'' της εξερχόμενης δέσμη από τη συστοιχία των πολωτών, σύμφωνα με το νόμο του Malus είναι:

$$I'' = I'\cos^2(90^\circ - \theta) \overset{(2)}{=} \frac{I_o}{2}\cos^2\theta\cos^2(90^\circ - \theta) \Rightarrow I'' = \frac{I_o}{2}\cos^2\theta\sin^2\theta \qquad \textbf{(3)}$$

όπου λόγω συμπληρωματικότητας $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$.

β) Η τιμή του θ για την οποία μεγιστοποιείται η ένταση I'' της εξερχόμενης δέσμης αντιστοιχεί στον προσδιορισμό του μεγίστου της συνάρτησης $I''(\theta)$, δηλαδή της **(3)**. Επομένως:

$$\frac{dI''}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{I_o}{2}\left[2\cos\theta(-\sin\theta)\sin^2\theta + \cos^2\theta 2\sin\theta\cos\theta\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2I_o}{2}(-\cos\theta\sin^3\theta + \cos^3\theta\sin\theta) = 0 \Rightarrow \cos^3\theta\sin\theta - \cos\theta\sin^3\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^3\theta\sin\theta = \cos\theta\sin^3\theta \Rightarrow \cos^2\theta = \sin^2\theta \Rightarrow \cos\theta = \sin\theta \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

Άρα για $\theta = 45^o$ είναι: $I''_{max} = \frac{I_o}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{I_o}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow I''_{max} = \frac{I_o}{8}$

γ) Όταν ο μεσαίος πολωτής περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω, η γωνία θ που θα σχηματίζει ο άξονάς του με τον πρώτο πολωτή κάθε χρονική στιγμή θα είναι $\theta = \omega t$.
Επίσης σύμφωνα με τα παραπάνω η ένταση της εξερχόμενης δέσμης από τον τρίτο πολωτή θα είναι σύμφωνα με την **(3)** :

$$I'' = \frac{I_o}{2}\cos^2\theta\sin^2\theta$$

Εφαρμόζοντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες :

$$\cos2\theta = 1 - 2\sin^2\theta \quad \text{και} \quad \sin2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \quad \text{προκύπτει :}$$

$$\cos4\theta = 1 - 2\sin^2 2\theta = 1 - 2(2\sin\theta\cos\theta)^2 \Rightarrow \cos4\theta = 1 - 8\sin^2\theta\cos^2\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta\cos^2\theta = \frac{1-\cos4\theta}{8}$$

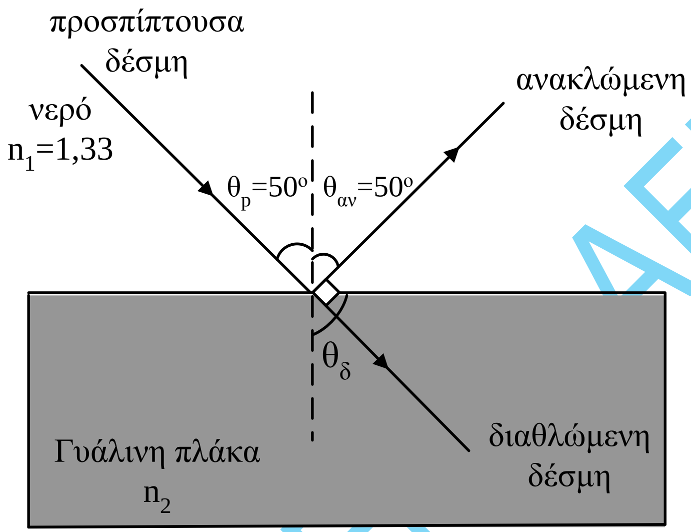
Άρα : $I'' = \frac{I_o}{16}(1-\cos4\theta) \Rightarrow I'' = \frac{I_o}{16}(1-\cos4\omega t)$

Δηλαδή η εξερχόμενη ακτινοβολία έχει τετραπλάσια συχνότητα της συχνότητας περιστροφής.

ΘΕΜΑ 25

Φως διαδιδόμενο στο νερό, δείκτη διάθλασης 1,33, προσπίπτει σε γυάλινη πλάκα υπό γωνία πρόσπωσης 50^o, με αποτέλεσμα ένα μέρος της δέσμης να ανακλάται και ένα άλλο μέρος της να διαθλάται. Αν η ανακλώμενη και η διαθλώμενη δέσμη σχηματίζουν γωνία 90^o, ποιος είναι ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού;

Λύση



Επειδή η ανακλώμενη και η διαθλώμενη δέσμη είναι κάθετες μεταξύ τους, η γωνία αυτή πρόσπτωσης ισούται με τη γωνία πόλωσης θ_p , για την οποία η ανακλώμενη δέσμη είναι γραμμικά πολωμένη και η διαθλώμενη είναι μερικά πολωμένη.
Από το σχήμα φαίνεται ότι η γωνία διάθλασης θ_δ είναι συμπληρωματική της γωνίας πρόσπτωσης (ή πόλωσης) $\theta_p = 50^o$ κι επομένως ισχύει:

$$\theta_p + \theta_\delta = 90^o \Rightarrow \theta_\delta = 90^o - \theta_p \qquad \textbf{(1)}$$

Άρα από το νόμο διάθλασης του Snell προκύπτει:

$$n_1 \sin\theta_p = n_2 \sin\theta_\delta \overset{(1)}{=} n_2 \sin(90^\circ - \theta_p) \Rightarrow n_1 \sin\theta_p = n_2 \cos\theta_p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_2 = n_1 \frac{\sin\theta_p}{\cos\theta_p} \Rightarrow n_2 = n_1 \tan\theta_p = 1{,}33 \tan 50^o = 1{,}33 \cdot 1{,}19 \Rightarrow n_2 = 1{,}58$$

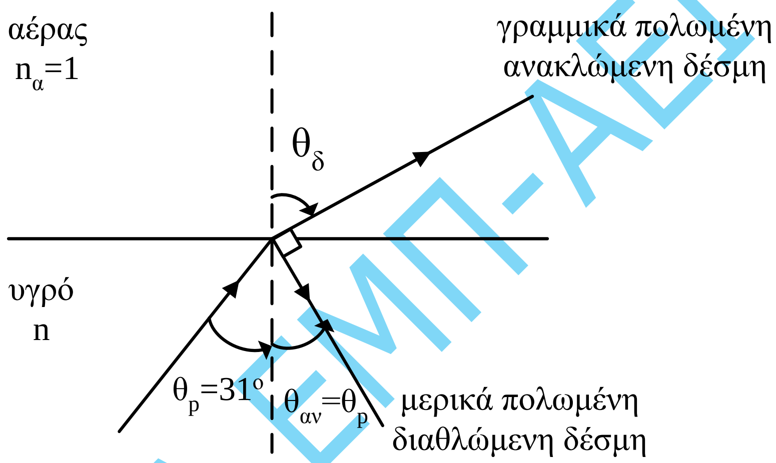
ΘΕΜΑ 26

Μη πολωμένο φως, διαδιδόμενο σε υγρό δείκτη διάθλασης n, προσπίπτει στην επιφάνεια του υγρού , πάνω από την οποία υπάρχει αέρας. Αν το φως προσπίπτει στην επιφάνεια υπό γωνία 31^o ως προς την κατακόρυφο, το φως που ανακλάται διαδιδόμενο και πάλι στο υγρό, είναι τελείως πολωμένο.

α) Πόσος είναι ο δείκτης διάθλασης n του υγρού;

β) Ποια γωνία σχηματίζει με την κάθετο στην επιφάνεια το διαθλώμενο φως, που διαδίδεται στον αέρα;

Λύση



α) Η γωνία αυτή πρόσπτωσης αντιστοιχεί στη γωνία πόλωσης $θ_p$, αφού η ανακλώμενη δέσμη είναι γραμμικά πολωμένη. Επομένως σύμφωνα με το νόμο του Brewster **(4 – 22)** ισχύει στην περίπτωση αυτή:

$$\tan\theta_p = \frac{n_\alpha}{n} \Rightarrow \tan\theta_p = \frac{1}{n} \Rightarrow n = \frac{1}{\tan\theta_p} = \frac{1}{\tan 31^o} = \frac{1}{0{,}6} \Rightarrow n = 1{,}66$$

β) Επειδή η γωνία πρόσπτωσης ισούται με τη γωνία πόλωσης, η ανακλώμενη και η διαθλώμενη δέσμη είναι κάθετες μεταξύ τους και από το σχήμα φαίνεται ότι η γωνία διάθλασης $θ_δ$ είναι συμπληρωματική της γωνίας πόλωσης, οπότε ισχύει:

$$\theta_p + \theta_\delta = 90^o \Rightarrow \theta_\delta = 90^o - \theta_p = 90^o - 31^o \Rightarrow \theta_\delta = 59^o$$

ΘΕΜΑ 27

Ένα διπλοθλαστικό υλικό έχει δείκτες διάθλασης n_1 και n_2 για τις δυο κάθετες συνιστώσες γραμμικώς πολωμένου φωτός που διαδίδεται διαμέσου του υλικού. Το μήκος κύματος του διαδιδόμενου φωτός στο κενό είναι λ_o. Αν το υλικό αυτό πρόκειται να χρησιμοποιηθεί ως πλακίδιο λ/4 να δειχτεί ότι το ελάχιστο πάχος του υλικού που καλύπτει τις λειτουργικές απαιτήσεις ενός πλακιδίου λ/4 είναι :

$$d = \frac{\lambda_o}{4(n_1 - n_2)}$$

Λύση

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου για τις δυο κάθετες συνιστώσες του γραμμικά πολωμένου φωτός που διαδίδεται μέσα στο υλικό είναι :

$$E_1 = E_o \sin(\omega t - k_1 d) \quad \text{και} \quad E_2 = E_o \sin(\omega t - k_2 d) \qquad \textbf{(1)}$$

όπου d το πάχος του υλικού και k_1, k_2 οι κυματάριθμοι των δυο συνιστωσών. Επίσης είναι : $k_1 = 2\pi/\lambda_1$ και $k_2 = 2\pi/\lambda_2$ όπου λ_1, λ_2 είναι τα μήκη κύματος των δυο συνιστωσών μέσα στο υλικό.

Αλλά από τους δείκτες διάθλασης των δυο συνιστωσών προκύπτει :

$$n_1 = \frac{\lambda_o}{\lambda_1} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\lambda_o}{n_1} \quad \text{και} \quad n_2 = \frac{\lambda_o}{\lambda_2} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{\lambda_o}{n_2}$$

Επομένως είναι : $k_1 = \dfrac{2\pi n_1}{\lambda_o}$ και $k_2 = \dfrac{2\pi n_2}{\lambda_o}$

Οπότε οι σχέσεις **(1)** γίνονται :

$$E_1 = E_o \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_o} n_1 d\right) \quad \text{και} \quad E_2 = E_o \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_o} n_2 d\right)$$

Η διαφορά φάσης μεταξύ των δυο αυτών εξερχομένων κυμάτων από το διπλοθλαστικό υλικό είναι :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_o} n_1 d - \frac{2\pi}{\lambda_o} n_2 d \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_o} d(n_1 - n_2) \qquad \textbf{(2)}$$

Άρα για να χρησιμοποιηθεί το υλικό αυτό ως πλακίδιο λ/4 θα πρέπει η διαφορά φάσης των δυο εξερχόμενων κυμάτων να είναι π/2, οπότε η **(2)** δίνει το ελάχιστο πάχος του υλικού ως :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda_o} d(n_1 - n_2) \Rightarrow d = \frac{\lambda_o}{4(n_1 - n_2)}$$

ΘΕΜΑ 28

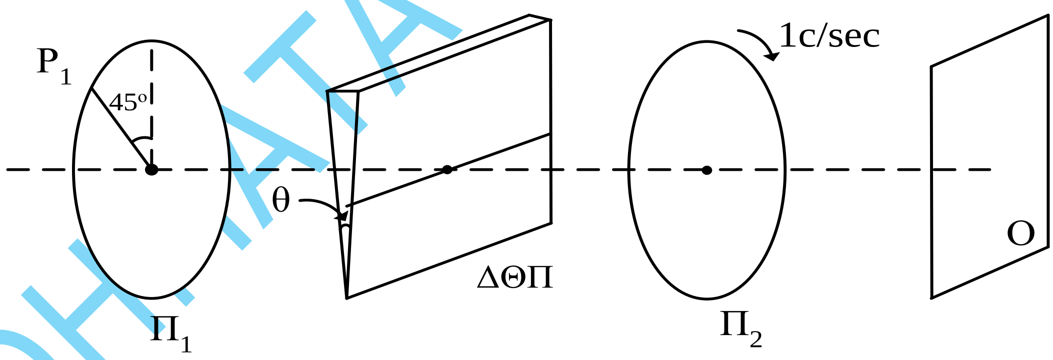
Οπτική διάταξη αποτελείται από πολωτή $Π_1$, σφηνοειδές διπλοθλαστικό πλακίδιο ΔΘΠ με γωνία κορυφής θ=1 mrad, πολωτή $Π_2$ και οθόνη Ο, όλα παράλληλα μεταξύ τους και κάθετα προς την οριζόντια διεύθυνση διάδοσης παράλληλης δέσμης μη πολωμένου μονοχρωματικού φωτός με μήκος κύματος λ=500nm.
Ο πολωτής $Π_1$ έχει το χαρακτηριστικό του επίπεδο P_1 στραμμένο κατά 45^o ως προς την κατακόρυφη διεύθυνση. Το σφηνοειδές διπλοθλαστικό πλακίδιο ΔΘΠ έχει την ακμή της σφήνας οριζόντια και τους δυο χαρακτηριστικούς του άξονες παράλληλο και κάθετο αντίστοιχα προς την ακμή του. Φως πολωμένο κατακόρυφα οδεύει στο ΔΘΠ με δείκτη διάθλασης $n_κ$ = 1,445, ενώ φως πολωμένο οριζόντια οδεύει στο ΔΘΠ με δείκτη διάθλασης n_o = 1,455.

α) Υπολογίστε την κατάσταση πόλωσης του διερχόμενου φωτός μετά το ΔΘΠ, ως συνάρτηση της κατακόρυφης απόστασης από την ακμή του σφηνοειδούς πλακιδίου.

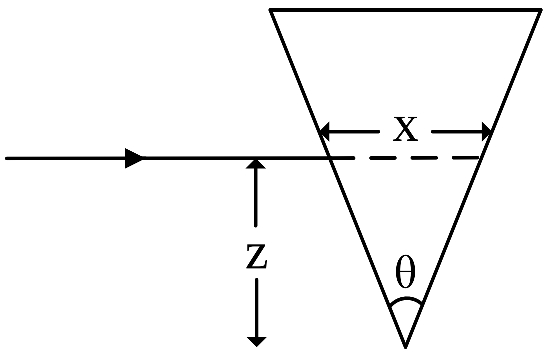
β) Περιγράψτε τι βλέπει ένας παρατηρητής στην οθόνη Ο, όταν ο πολωτής $Π_2$ περιστρέφεται περί τον άξονα διάδοσης του φωτός με ρυθμό 1 κύκλο/sec και εξηγείστε.

Υπόδειξη : Οι δυο συνιστώσες πόλωσης που μπαίνουν στο ΔΘΠ εν φάσει, εξέρχονται απ' αυτό με διαφορά φάσης που εξαρτάται από τους δείκτες διάθλασης και το πάχος της περιοχής του ΔΘΠ την οποία διασχίζουν. Αγνοείστε φαινόμενα πολλαπλών ανακλάσεων και μεταβολής στη διεύθυνση διάδοσης του φωτός.
(Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



α) Το αρχικά μη πολωμένο μονοχρωματικό φως εξέρχεται από τον πολωτή $Π_1$ γραμμικά πολωμένο σχηματίζοντας γωνία 45^o με τον κατακόρυφο άξονα του ΔΘΠ.



Στη συνέχεια το γραμμικά αυτό πολωμένο φως προσπίπτει σε ένα σημείο του ΔΘΠ σε απόσταση z από την κορυφή του. Μέσα στο ΔΘΠ η δέσμη αυτή διαχωρίζεται στην κατακόρυφα και την οριζόντια πολωμένη.
Έτσι για το κατακόρυφα πολωμένο φως είναι :

$$E_{\kappa}(x,t) = E_o \sin(\omega t - k_{\kappa} x) \qquad \textbf{(1)}$$

Ενώ για το οριζόντια (παράλληλα) πολωμένο φως είναι :

$$E_{\pi}(x,t) = E_o \sin(\omega t - k_{\pi} x) \qquad \textbf{(2)}$$

όπου $k_{\kappa} = 2\pi/\lambda_{\kappa}$, $k_{\pi} = 2\pi/\lambda_{\pi}$ οι κυματάριθμοι του κατακόρυφου και οριζόντιου πολωμένου φωτός αντίστοιχα και $x \cong z\theta$ η απόσταση (πάχος) που διανύουν μέσα στο υλικό του ΔΘΠ.
Επίσης από τους δείκτες διάθλασης των δυο συνιστωσών πόλωσης προκύπτει :

$$n_{\kappa} = \frac{c}{\upsilon_{\kappa}} = \frac{\lambda}{\lambda_{\kappa}} \Rightarrow \lambda_{\kappa} = \frac{\lambda}{n_{\kappa}} \qquad \text{και} \qquad n_{\pi} = \frac{c}{\upsilon_{\pi}} = \frac{\lambda}{\lambda_{\pi}} \Rightarrow \lambda_{\pi} = \frac{\lambda}{n_{\pi}}$$

Συνεπώς οι σχέσεις **(1)** και **(2)** γίνονται :

$$E_{\kappa}(x,t) = E_o \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n_{\kappa} z\theta\right) \qquad \text{και} \qquad E_{\pi}(x,t) = E_o \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n_{\pi} z\theta\right)$$

Άρα η διαφορά φάσης των δυο εξερχόμενων κυμάτων από το ΔΘΠ είναι :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} n_\pi z\theta - \frac{2\pi}{\lambda} n_\kappa z\theta = \frac{2\pi}{\lambda} z\theta(n_\pi - n_\kappa) = \frac{2\pi \cdot 10^{-3} z}{500 \cdot 10^{-9}}(1{,}455 - 1{,}445) =$$

$$= \frac{2\pi}{5} \cdot 10^4 z \cdot 10^{-2} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{200}{5}\pi z \qquad \textbf{(3)}$$

Επομένως :

1) Για $\Delta\varphi = \pi/2$ η **(3)** δίνει : $\frac{\pi}{2} = \frac{200\pi}{5} z_o \Rightarrow z_o = \frac{5}{400} = 0{,}0125\text{m}$
Δηλαδή τότε το ΔΘΠ μετατρέπει το γραμμικά πολωμένο φως σε δεξιόστροφα κυκλικά πολωμένο φως.

2) Για $\Delta\varphi = \pi$ είναι $z = 2z_o = 0{,}025\text{m}$ και τότε το διερχόμενο φως από το ΔΘΠ είναι γραμμικά πολωμένο.

3) Για $\Delta\varphi = 3\pi/2$ είναι $z = 3z_o = 0{,}0375\text{m}$ και τότε το διερχόμενο φως από το ΔΘΠ είναι αριστερόστροφα κυκλικά πολωμένο.

4) Για $\Delta\varphi = 2\pi$ είναι $z = 4z_o = 0{,}05\text{m}$ και τότε το διερχόμενο φως είναι γραμμικά πολωμένο.

5) Τέλος για οποιοδήποτε άλλη τιμή του Δφ άρα και της απόστασης z το διερχόμενο φως από το ΔΘΠ θα είναι ελλειπτικά πολωμένο.

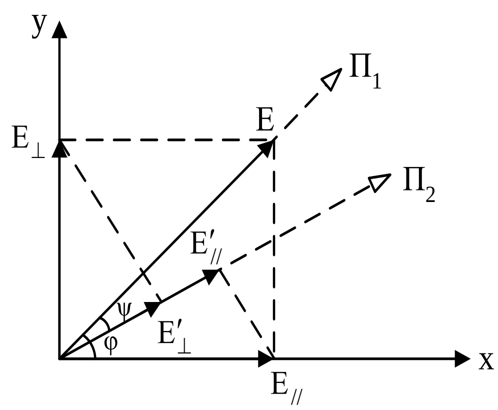
β) Ο πολωτής Π_2 περιστρέφεται περί τον άξονα διάδοσης του φωτός με γωνιακή ταχύτητα ω = 1κύκλο/sec = 2π rad/sec. Δηλαδή η γωνία που σχηματίζουν οι άξονες των πολωτών Π_1 και Π_2 κάθε χρονική στιγμή είναι $\psi = \omega t = 2\pi t$ (rad).
Αν Ε είναι το πλάτος του διερχόμενου γραμμικά πολωμένου κύματος από τον πολωτή Π_1, τότε τα πλάτη των διερχόμενων συνιστωσών από το διπλοθλαστικό πλακίδιο ΔΘΠ θα είναι :

$$E_{//} = E\cos\varphi \quad \text{και} \quad E_{\perp} = E\sin\varphi \qquad \textbf{(4)}$$

όπου $\varphi = 45^o$ η γωνία του Π_1, με τη διεύθυνση του παράλληλου άξονα του ΔΘΠ. Η διαφορά φάσης των συνιστωσών $E_{//}$, $E_{\perp}$ είναι :

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_\kappa)x \qquad \textbf{(5)}$$

όπου $x \cong z\theta$ το πάχος του ΔΘΠ, λ το μήκος κύματος και n_o, n_κ οι δείκτες διάθλασης της τακτικής και έκτακτης ακτίνας.



Κάτοψη της διατάξεως. Οι πολωτές Π_1 και Π_2 σχηματίζουν γωνία ψ.

Επομένως τα πλάτη των διερχόμενων συνιστωσών από τον αναλυτή Π_2 θα είναι οι προβολές των πλατών $E_{//}$, $E_\perp$ πάνω στον Π_2. Δηλαδή :

$$\left.\begin{aligned} E'_{//} &= E_{//}\cos(\varphi-\psi) \overset{(4)}{=} E\cos\varphi\cos(\varphi-\psi) \\ E'_{\perp} &= E_{\perp}\sin(\varphi-\psi) \overset{(4)}{=} E\sin\varphi\sin(\varphi-\psi) \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(6)}$$

και θα έχουν την ίδια διαφορά φάσης Φ σύμφωνα με την **(5)**.
Άρα από την συμβολή των δυο τελευταίων ομοεπίπεδων συνιστωσών θα προκύψει ένταση ακτινοβολίας :

$$I = E'^2_{//} + E'^2_{\perp} + 2E'_{//}E'_{\perp}\cos\Phi$$

Λόγω των σχέσεων **(6)** και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\cos\Phi = 1 - 2\sin^2\frac{\Phi}{2}$ τελικά προκύπτει :

$$I = E^2\left[\cos^2\psi - \sin 2\varphi \sin(\varphi - \omega)\sin^2\frac{\Phi}{2}\right] \quad \textbf{(7)}$$

Παρατηρείται ότι η **(7)** για Φ=0, δηλαδή αν απομακρυνθεί το ΔΘΠ καταλήγει στο γνωστό νόμο του Malus : $I = E^2\cos^2\psi$. Δηλαδή ο δεύτερος όρος εξαρτάται μόνο από το ΔΘΠ.
Επειδή $\psi = 2\pi t$ και $\varphi = \pi/4$ η **(7)** γίνεται :

$$I = E^2\left[\cos^2 2\pi t - \sin\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\pi t\right)\sin^2\frac{\Phi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$I = E^2\left[\cos^2 2\pi t - \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\pi t\right)\sin^2\frac{\Phi}{2}\right] \qquad \textbf{(8)}$$

Συνεπώς η σχέση **(8)** δίνει την ένταση του εξερχόμενου φωτός από τον Π_2 συνάρτηση της περιστροφής του Π_2 και της διαφοράς φάσης (της κατάστασης πόλωσης) του φωτός από το ΔΘΠ.

Στις ειδικές περιπτώσεις όπου $\Phi = \pi/2$ ή $3\pi/2$ η **(8)** γίνεται :

$$I = E^2\left[\cos^2 2\pi t - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\pi t\right)\right]$$

Για $\Phi = \pi$ δίνει : $I = E^2\left[\cos^2 2\pi t - \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\pi t\right)\right]$

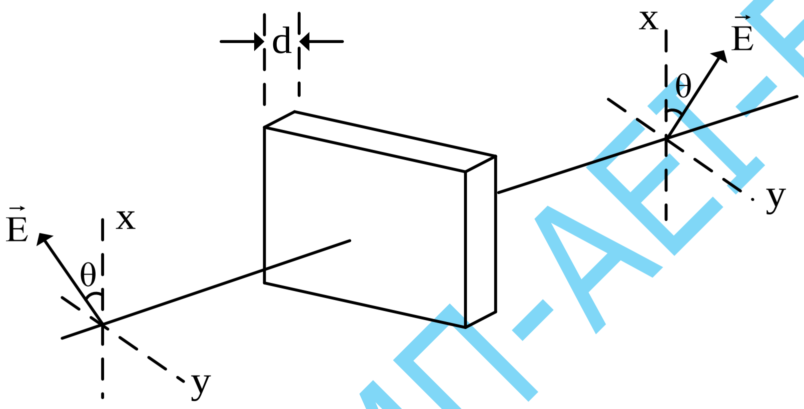
Για $\Phi = 2\pi$ δίνει : $I = E^2\cos^2 2\pi t$

Παρατηρείται τελικά ότι σε κάθε περίπτωση, δηλαδή για οποιαδήποτε μορφή πόλωσης του εξερχόμενου φωτός από το ΔΘΠ, υπάρχουν κάποιες θέσεις κατά την περιστροφή του Π_2 για τις οποίες η ένταση είναι μέγιστη και κάποιες άλλες για τις οποίες είναι ελάχιστη.

ΘΕΜΑ 29

Να δειχθεί ότι η επίδραση πλακιδίου καθυστέρησης λ/2 με τον άξονα εύκολης διέλευσης να σχηματίζει γωνία θ με την κατεύθυνση πόλωσης επίπεδα πολωμένου φωτός, έχει ως αποτέλεσμα την περιστροφή του επιπέδου πόλωσης κατά γωνία 2θ.
(Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Έστω ότι ένα επίπεδα γραμμικά πολωμένο κύμα προσπίπτει πάνω σε πλακίδιο λ/2, με το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ να σχηματίζει γωνία θ με τον οπτικό άξονα του πλακιδίου.
Η συνιστώσα του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου η παράλληλη προς τον οπτικό άξονα είναι $E_x = E\cos\theta$, ενώ η συνιστώσα η κάθετη στον οπτικό άξονα είναι $E_y = E\sin\theta$.
Το πλακίδιο λ/2 όμως δημιουργεί μια διαφορά φάσης π μεταξύ των δυο αυτών κυμάτων. Έτσι οι συνιστώσες του εξερχόμενου κύματος γίνονται $E_x = E\cos\theta$ και $E_y = -E\sin\theta$.
Επομένως το εξερχόμενο κύμα είναι επίπεδα πολωμένο, έχει το ίδιο πλάτος με το προσπίπτον και σχηματίζει γωνία θ με τον οπτικό άξονα, αλλά στην αντίθετη πλευρά του οπτικού άξονα σε σχέση με το προσπίπτον κύμα. Δηλαδή το εξερχόμενο κύμα σχηματίζει γωνία πολώσεως 2θ με το προσπίπτον.
Άρα το πλακίδιο λ/2 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να στρέψει το επίπεδο πόλωσης κατά γωνία 2θ.

ΘΕΜΑ 30

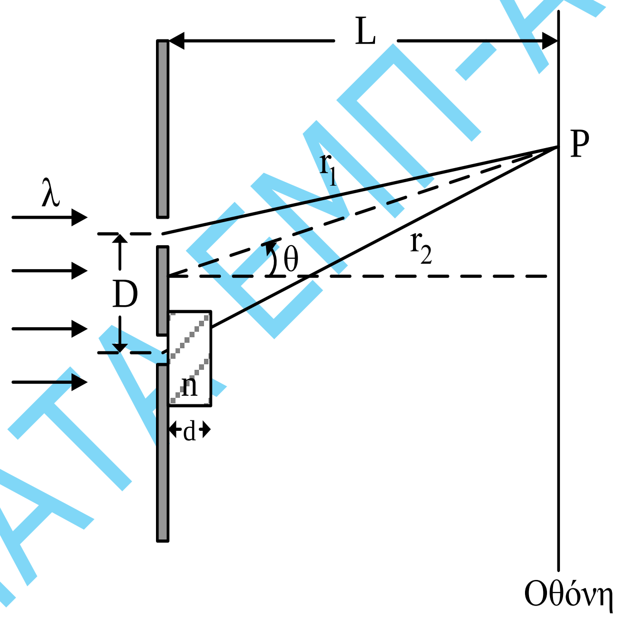
Παράλληλη μονοχρωματική δέσμη πολωμένου φωτός με μήκος κύματος λ πέφτει κάθετα σε διάφραγμα, το οποίο φέρει δυο παράλληλες σχισμές μικρού εύρους, σε απόσταση D μεταξύ τους (D>>λ).

α) Μπροστά από τη μια σχισμή τοποθετείται διαφανές πλακίδιο πάχους d και δείκτη διάθλασης n. Υπολογίστε την κατανομή έντασης σε οθόνη παράλληλη προς το διάφραγμα και σε απόσταση L (L>>D), ως συνάρτηση της γωνίας, ως προς τη μεσοκάθετο στις δυο σχισμές.

β) Αν το προηγούμενο πλακίδιο ήταν διπλοθλαστικό, περιγράψτε ποια είναι η εικόνα στην οθόνη για τις περιπτώσεις που το πάχος του διπλοθλαστικού πλακιδίου ήταν τέτοιο ώστε το άνυσμα πόλωσης μετά το πλακίδιο να έχει περιστραφεί κατά **i)** 0^o, **ii)** 90^o, **iii)** 180^o.

(Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



α) Πριν καλυφθεί η μια σχισμή με το διαφανές πλακίδιο τα σημεία μέγιστης έντασης πάνω στην οθόνη εμφανίζονται στα σημεία εκείνα για τα οποία, σύμφωνα με την **(4 – 2)** ισχύει ότι η διαφορά οπτικού δρόμου $r_1 - r_2 = D\sin\theta$ είναι :

$$D\sin\theta = m\lambda, \qquad m = 0,1,2,\ldots \qquad \textbf{(1)}$$

Όταν τοποθετείται το πλακίδιο μπροστά από τη μια σχισμή ο οπτικός δρόμος από την πάνω σχισμή παραμένει ίδιος $r_1' = r_1$, ενώ από την κάτω σχισμή γίνεται $r_2' = r_2 - d + dn$.
Άρα η διαφορά οπτικού δρόμου τώρα είναι :

$$r_1' - r_2' = r_1 - r_2 + d - dn \Rightarrow r_1' - r_2' = D\sin\theta - d(n-1)$$

Δηλαδή το πλακίδιο προκαλεί μια πρόσθετη διαφορά φάσης ίση με 2πd(n-1)/λ.
Επομένως όταν τοποθετηθεί το πλακίδιο τα σημεία μέγιστης έντασης πάνω στην οθόνη εμφανίζονται όταν :

$$r_1' - r_2' = m\lambda \Rightarrow D\sin\theta - d(n-1) = m\lambda\,, \qquad m=0,1,2,\ldots$$

Δηλαδή παρατηρείται μια παράλληλη μετατόπιση των κροσσών συμβολής.

β) Αν το προηγούμενο πλακίδιο ήταν διπλοθλαστικό τότε οι αντίστοιχοι οπτικοί δρόμοι των ακτινών o και e μέσα στο πλακίδιο είναι $n_o d$ και $n_e d$. Δηλαδή η διαφορά των οπτικών τους δρόμων είναι :

$$\Delta r = (n_o - n_e)d$$

Επειδή κάθε μήκος κύματος αντιστοιχεί σε μια μετατόπιση φάσης 2π rad θα ισχύει :

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta r}{\lambda} \Rightarrow \Delta r = \frac{\lambda}{2\pi}\Delta\varphi \qquad \textbf{(2)}$$

Η παραπάνω σχέση δίνει τη διαφορά δρόμου Δr την οποία προκαλεί το διπλοθλαστικό πλακίδιο σε μια ακτίνα που διέρχεται από αυτό.

Επομένως :

1) Αν το διπλοθλαστικό πλακίδιο προκαλεί στο διερχόμενο κύμα μια μετατόπιση φάσεως 0^o τότε από την **(2)** εύκολα προκύπτει ότι και η διαφορά δρόμου Δr θα είναι μηδέν.
Άρα η εικόνα συμβολής πάνω στην οθόνη θα δίνεται από τη σχέση **(1)**, δηλαδή όπως σαν να μην υπήρχε το πλακίδιο :

$$D\sin\theta = m\lambda, \qquad m=0,1,2,\ldots$$

2) Αν είναι Δφ = π/2 τότε από τη **(2)** είναι Δr = λ/4, δηλαδή τότε το διπλοθλαστικό πλακίδιο προκαλεί μια επιπλέον διαφορά δρόμου λ/4 (δηλαδή είναι πλακίδιο λ/4) κι επομένως τα σημεία μέγιστης έντασης θα παρατηρούνται όταν :

$$D\sin\theta + \frac{\lambda}{4} = m\lambda \Rightarrow D\sin\theta = \left(m - \frac{1}{4}\right)\lambda\,, \qquad m=0,1,2,\ldots$$

3) Αν είναι $\Delta\varphi = \pi$ τότε η **(2)** δίνει $\Delta r = \lambda/2$ δηλαδή εμφανίζεται μια επιπλέον διαφορά δρόμου $\lambda/2$ (πλακίδιο $\lambda/2$) και τα σημεία μέγιστης συμβολής στην οθόνη παρατηρούνται όταν :

$$D\sin\theta + \frac{\lambda}{2} = m\lambda \Rightarrow D\sin\theta = \left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda , \qquad m=0,1,2,\ldots$$