ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 1

Έστω ένα σωματίδιο μάζας m σε ένα δυναμικό της μορφής:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & ,\ \text{για } x<0 \\ \dfrac{V_o}{\alpha}x & ,\ \text{για } x>0 \end{cases}$$

όπου V_o και α σταθερές με διαστάσεις ενέργειας και μήκους αντίστοιχα.
Να εκτιμήσετε την ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης με χρήση της αρχής της αβεβαιότητας.

Λύση

Η ενέργεια του σωματιδίου είναι:

$$E = K + V(x) \Rightarrow E = \frac{p^2}{2m} + \frac{V_o}{\alpha}x \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά σύμφωνα με την αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg ισχύει:

$$\Delta x\, \Delta p \cong \hbar \Rightarrow xp \cong \hbar \Rightarrow p \cong \frac{\hbar}{x} \qquad \textbf{(2)}$$

Συνεπώς η **(1)** λόγω της **(2)** γίνεται:

$$E = \frac{\hbar^2}{2mx^2} + \frac{V_o}{\alpha}x \qquad \textbf{(3)}$$

Άρα μελετώντας την παραπάνω συνάρτηση E(x), προσδιορίζεται η θέση x που καθιστά την ενέργεια ελάχιστη, δηλαδή την ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης. Οπότε:

$$\frac{dE}{dx} = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} -\frac{\hbar^2}{mx^3} + \frac{V_o}{\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{mx^3}{\hbar^2} = \frac{\alpha}{V_o} \Rightarrow x = \left(\frac{\alpha\hbar^2}{mV_o}\right)^{1/3} \qquad \textbf{(4)}$$

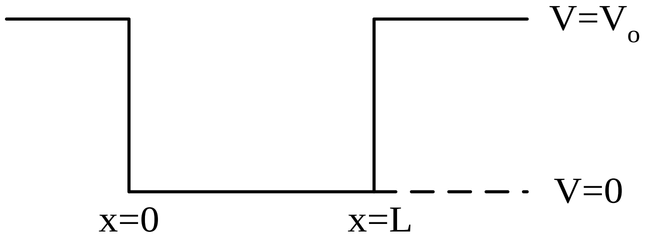
Επομένως αντικαθιστώντας την **(4)** στην **(3)** προκύπτει η ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης ως:

$$E_{min} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{mV_o}{\alpha\hbar^2}\right)^{2/3} + \frac{V_o}{\alpha}\left(\frac{\alpha\hbar^2}{mV_o}\right)^{1/3}$$

ΘΕΜΑ 2

Χρησιμοποιώντας την αρχή της αβεβαιότητας εκτιμήστε (σε eV) την τάξη μεγέθους του ελάχιστου βάθους V_o που θα πρέπει να έχει ένα πηγάδι δυναμικού πλάτους $L=1Å=10^{-10}$ m ώστε να κρατάει δέσμιο :
α) ένα ηλεκτρόνιο και **β)** ένα πρωτόνιο.
Δίνεται: $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}\,\text{Joule} \cdot \text{sec}$, $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\text{kgr}$, $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\text{kgr}$

Λύση



Η αβεβαιότητα στη θέση είναι Δx=L και επειδή για 0<x<L είναι V=0 η αβεβαιότητα στην ολική ενέργεια είναι:

$$\Delta E = \frac{(\Delta p)^2}{2m} \Rightarrow \Delta p = \sqrt{2m\Delta E}$$

Άρα η αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg δίνει:

$$\Delta x\, \Delta p \geq \hbar \Rightarrow L\sqrt{2m\Delta E} \geq \hbar \Rightarrow \Delta E \geq \frac{\hbar^2}{2mL^2}$$

Επομένως το ελάχιστο βάθος του δυναμικού πρέπει να είναι:

$$V_o = \Delta E_{min} \Rightarrow V_o = \frac{\hbar^2}{2mL^2}$$

Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές προκύπτει:

α) $V_o = \dfrac{1{,}05^2 \cdot 10^{-68}\,J^2\,\sec^2}{2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\text{kgr} \cdot 10^{-20}\,m^2} = 6{,}05 \cdot 10^{-19}\,\text{Joule} \cong 4\text{eV}$

β) $V_o = \dfrac{1{,}05^2 \cdot 10^{-68}\,J^2\,\sec^2}{2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\text{kgr} \cdot 10^{-20}\,m^2} = 3{,}3 \cdot 10^{-22}\,\text{Joule} \cong 10^{-3}\text{eV}$

όπου : $1\text{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{Joule}$

Δηλαδή παρατηρείται ότι το ελάχιστο βάθος δυναμικού που απαιτείται για το πρωτόνιο είναι πολύ μικρότερο από αυτό που απαιτείται για το ηλεκτρόνιο.

ΘΕΜΑ 3

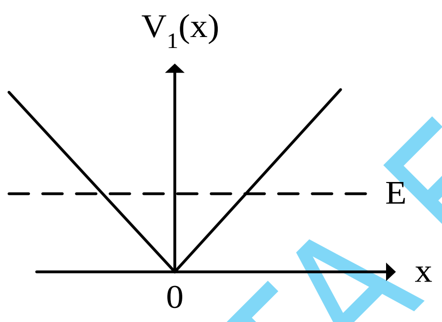
Σωματίδιο μάζας m κινείται στα δυναμικά :

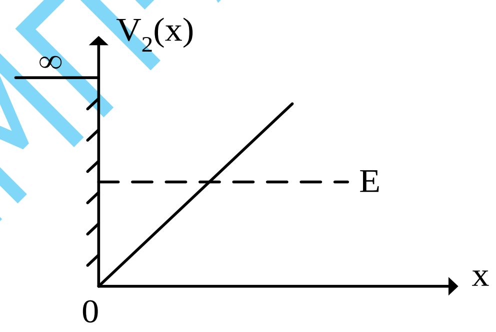
$$V_1(x) = \frac{|x|}{\sqrt{m}} \quad \text{και} \quad V_2(x) = \begin{cases} \infty & \text{για } x<0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{m}} & \text{για } x>0 \end{cases} \quad \text{αντίστοιχα.}$$

Χρησιμοποιώντας τη γενικευμένη συνθήκη κβάντωσης του Bohr να βρεθούν τα ενεργειακά επίπεδα και να συγκριθούν.

Λύση

Οι γραφικές παραστάσεις των δυναμικών $V_1(x)$ και $V_2(x)$ φαίνονται στα ακόλουθα σχήματα.





Η ορμή του σωματιδίου προκύπτει από την ολική ενέργεια ως:

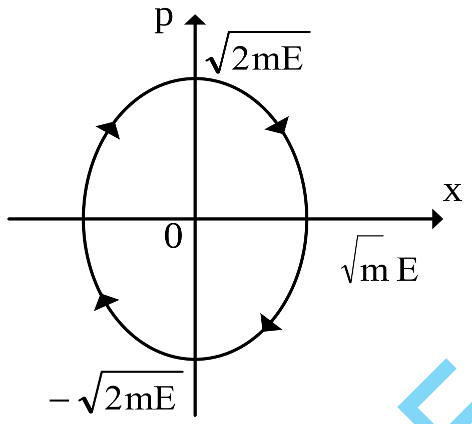
$$E = K + V(x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{x}{\sqrt{m}} \Rightarrow p^2 = 2m\left(E - \frac{x}{\sqrt{m}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \pm\sqrt{2m\left(E - \frac{x}{\sqrt{m}}\right)} \qquad \textbf{(1)}$$

όπου το + συμβολίζει την κίνηση προς τα δεξιά, ενώ το – την κίνηση προς τα αριστερά. Η γραφική παράσταση της **(1)** στο χώρο των φάσεων είναι η έλλειψη του ακόλουθου σχήματος:

Για x=0 η **(1)** δίνει $p = \pm\sqrt{2mE}$

Για p=0 η **(1)** δίνει $x = \sqrt{m}\ E$



Σύμφωνα με τη γενικευμένη συνθήκη κβάντωσης του Bohr είναι:

$$\oint_c p\,dx = nh \qquad \textbf{(2)}$$

όπου λόγω συμμετρίας το φασικό ολοκλήρωμα για το δυναμικό $V_1(x)$ είναι τέσσερις φορές το ολοκλήρωμα $\int_0^{\sqrt{m}E} p\,dx$ σε κάθε τεταρτημόριο. Δηλαδή:

$$\oint_c p\,dx = 4\int_0^{\sqrt{m}E} p\,dx \overset{(1)}{=} 4\int_0^{\sqrt{m}E}\sqrt{2m(E - x/\sqrt{m})dx} = 4\sqrt{2m}\int_0^{\sqrt{m}E}\sqrt{E - x/\sqrt{m}}\,dx =$$

$$= 4\sqrt{2m}\,\frac{2}{-3/\sqrt{m}}\left(E - \frac{x}{\sqrt{m}}\right)^{3/2}\Bigg|_0^{\sqrt{m}E} = -\frac{8}{3}\sqrt{2}m\left[\left(E - \frac{\sqrt{m}E}{\sqrt{m}}\right)^{3/2} - E^{3/2}\right] =$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{2}mE^{3/2} \qquad \textbf{(3)}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το ολοκλήρωμα : $\int\sqrt{\alpha x + b}\,dx = \frac{2(\alpha x + b)^{3/2}}{3\alpha}$

Άρα η **(2)** λόγω της **(3)** δίνει:

$$\frac{8}{3}\sqrt{2}mE^{3/2} = nh \Rightarrow E_n = \left(\frac{3nh}{8\sqrt{2}m}\right)^{2/3}$$

Ενώ για το δυναμικό $V_2(x)$ το φασικό ολοκλήρωμα περιορίζεται στη μισή διαδρομή της προηγούμενης περίπτωσης, λόγω του άπειρου φράγματος δυναμικού στο x=0.

Συνεπώς η συνθήκη **(2)** τώρα δίνει:

$$\oint_c p dx = nh \Rightarrow 2\int_0^{\sqrt{m}E} \sqrt{2m\left(E - \frac{x}{\sqrt{m}}\right)} dx = nh \Rightarrow \frac{4}{3}\sqrt{2}mE^{3/2} = nh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_n = \left(\frac{3nh}{4\sqrt{2}m}\right)^{2/3}$$

Η σύγκριση των παραπάνω σταθμών φανερώνει ότι οι ενεργειακές στάθμες του $V_2(x)$ είναι υψηλότερες των αντιστοίχων σταθμών του $V_1(x)$.

ΘΕΜΑ 4

Σωμάτιο μάζας m πέφτει κατακόρυφα σε οριζόντιο δάπεδο και αναπηδά ελαστικά. Χρησιμοποιήστε τη γενικευμένη συνθήκη κβάντωσης του Bohr για να κβαντίσετε την κίνηση του σωματίου και υπολογίστε τα επιτρεπτά ύψη H_n και τις αντίστοιχες ενεργειακές στάθμες E_n αυτού του συστήματος.
Υπολογίστε το πηλίκο των σχετικών ενεργειακών μεταβολών $\Delta E_n/E_n$, στο όριο των μεγάλων ενεργειών E_n και εξηγείστε τη σημασία του.

Δίνεται: $\int \sqrt{\alpha x + b}\, dx = \dfrac{2(\alpha x + b)^{3/2}}{3\alpha}$

Λύση

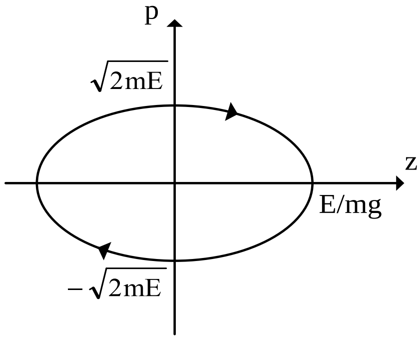
Η δυναμική ενέργεια του σωματίου σε μια τυχαία θέση οφείλεται στο βάρος του και είναι $V(z) = mgz$. Έτσι από την ολική του ενέργεια προκύπτει:

$$E = K + V = \frac{p^2}{2m} + mgz \Rightarrow \frac{p^2}{2m} = E - mgz \Rightarrow p = \pm\sqrt{2m(E - mgz)} \qquad \textbf{(1)}$$

όπου τα πρόσημα ± συμβολίζουν τη φορά της κίνησης.
Η γραφική παράσταση της **(1)** στο χώρο των φάσεων είναι η έλλειψη του ακόλουθου σχήματος.

Για z=0 η **(1)** δίνει $p = \pm\sqrt{2mE}$

Για p=0 η **(1)** δίνει $z = E/mg$



Άρα από τη γενικευμένη συνθήκη κβάντωσης του Bohr προκύπτει:

$$\oint_c p dz = nh \Rightarrow 4\int_0^{E/mg} \sqrt{2m(E - mgz)}dz = nh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{2m}\int_0^{E/mg} \sqrt{E - mgz}\, dz = nh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{2m}\,\frac{2(E-mgz)^{3/2}}{-3mg}\Bigg|_0^{E/mg} = nh \Rightarrow \frac{-8\sqrt{2}}{3\sqrt{mg}}\left[\left(E-mg\frac{E}{mg}\right)^{3/2} - E^{3/2}\right] = nh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{mg}}E^{3/2} = nh \Rightarrow \boxed{E_n = \left(\frac{3nh\sqrt{mg}}{8\sqrt{2}}\right)^{2/3}} \qquad \textbf{(2)}$$

Τα επιτρεπτά ύψη H_n αντιστοιχούν στα σημεία όπου το σωμάτιο σταματά, δηλαδή $K=0$ και επομένως:

$$E_n = V(H_n) \overset{(2)}{\Rightarrow} \left(\frac{3nh\sqrt{mg}}{8\sqrt{2}}\right)^{2/3} = mgH_n \Rightarrow H_n = \frac{1}{mg}\left(\frac{3nh\sqrt{mg}}{8\sqrt{2}}\right)^{2/3}$$

Το πηλίκο των σχετικών ενεργειακών μεταβολών είναι:

$$\frac{\Delta E_n}{E_n} = \frac{E_{n+1}-E_n}{E_n} = \frac{E_{n+1}}{E_n} - 1 \overset{(2)}{=} \frac{\left(\frac{3(n+1)h\sqrt{mg}}{8\sqrt{2}}\right)^{2/3}}{\left(\frac{3nh\sqrt{mg}}{8\sqrt{2}}\right)^{2/3}} - 1 = \frac{(n+1)^{2/3}}{n^{2/3}} - 1$$

Στο όριο των μεγάλων ενεργειών E_n, δηλαδή για $n\to\infty$ είναι $n+1 \cong n$ οπότε $\frac{(n+1)^{2/3}}{n^{2/3}} \cong 1$ και η προηγούμενη δίνει:

$$\frac{\Delta E_n}{E_n} \cong 1-1 = 0$$

Η φυσική σημασία του τελευταίου αποτελέσματος έγκειται στο γεγονός ότι στις μεγάλες ενέργειες, οι ενεργειακές στάθμες είναι δυσδιάκριτες (δηλαδή πάρα πολύ κοντά η μια στην άλλη) και επομένως το ενεργειακό φάσμα είναι σχεδόν συνεχές.

ΘΕΜΑ 5

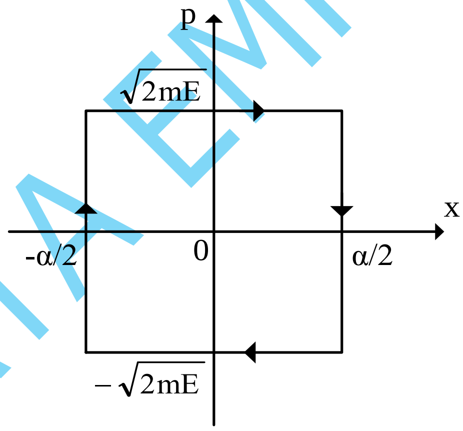
Χρησιμοποιήστε τη γενικευμένη συνθήκη κβάντωσης του Bohr για να υπολογίσετε, ημικλασσικά, τις επιτρεπτές ενεργειακές στάθμες E_n :
α) της μεταφορικής κίνησης ενός σωματιδίου μάζας m που βρίσκεται στο εσωτερικό ενός μονοδιάστατου φρέατος δυναμικού άπειρου βάθους και πλάτους α.
β) της περιστροφικής κίνησης ενός μορίου περί το κέντρο βάρους του, με ροπή αδράνειας I ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο βάρους του.

Λύση

α) Η δυναμική ενέργεια του σωματιδίου μέσα στο απειρόβαθο φρέαρ δυναμικού είναι V(x)=0, οπότε από την ολική του ενέργεια υπολογίζεται η ορμή του ως:

$$E = K + V(x) \Rightarrow E = \frac{p^2}{2m} + 0 \Rightarrow p = \pm\sqrt{2mE} \qquad \textbf{(1)}$$

όπου τα πρόσημα ± συμβολίζουν τη φορά της κίνησης.
Η γραφική παράσταση της **(1)** στο χώρο των φάσεων φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Άρα από τη γενικευμένη συνθήκη κβάντωσης του Bohr προκύπτει:

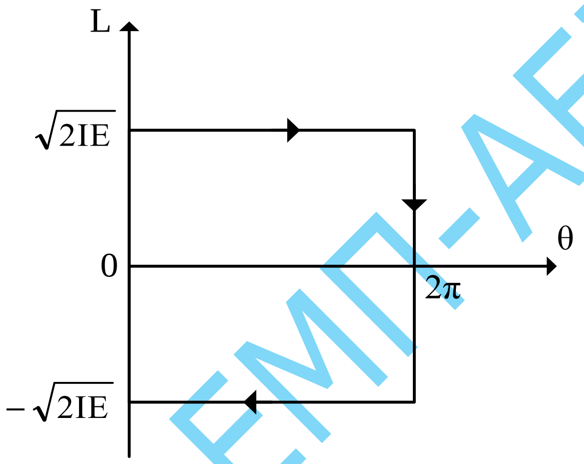
$$\oint_c p\,dx = nh \overset{(1)}{\Rightarrow} 4\int_0^{\alpha/2}\sqrt{2mE}\,dx = nh \Rightarrow 4\sqrt{2mE}\,\frac{\alpha}{2} = nh \Rightarrow \sqrt{E} = \frac{nh}{2\sqrt{2m}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E_n = \frac{n^2h^2}{8m}}$$

β) Η δυναμική ενέργεια του περιστρεφόμενου μορίου περί το κέντρο βάρους του είναι μηδενική V=0, ενώ η κινητική του ενέργεια είναι $K=L^2/2I$ όπου L η στροφορμή του. Επομένως από την ολική του ενέργεια προκύπτει:

$$E = K + V \Rightarrow E = \frac{L^2}{2I} + 0 \Rightarrow L = \pm\sqrt{2IE} \qquad \textbf{(2)}$$

όπου τα πρόσημα ± συμβολίζουν τη φορά της περιστροφικής κίνησης.
Η γραφική παράσταση της **(2)** στο χώρο των φάσεων φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Άρα από τη γενικευμένη συνθήκη κβάντωσης του Bohr προκύπτει:

$$\oint_c L\,d\theta = nh \overset{(2)}{\Rightarrow} 2\int_0^{2\pi}\sqrt{2IE}\,d\theta = nh \Rightarrow 2\sqrt{2IE}\,2\pi = nh \Rightarrow \sqrt{E} = \frac{nh}{4\pi\sqrt{2I}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E_n = \frac{n^2h^2}{32\pi^2 I} = \frac{n^2\hbar^2}{8I}}$$

ΘΕΜΑ 6

Σώμα μάζας m κινείται σε μονοδιάστατο δυναμικό πεδίο με συνάρτηση δυναμική ενέργειας $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$, όπου ω σταθερά.

α) Χρησιμοποιήστε τη γενικευμένη συνθήκη κβάντωσης του Bohr για να υπολογίσετε τις επιτρεπτές μέγιστες απομακρύνσεις α_n και τις αντίστοιχες ενεργειακές στάθμες E_n αυτού του συστήματος.

β) Αν η κυματοσυνάρτηση της βασικής κατάστασης, όπως προκύπτει από την ακριβή λύση της εξίσωσης Schrodinger είναι:

$$\psi(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{\frac{-\alpha^2x^2}{2}}$$

όπου $\alpha^2 = m\omega/\hbar$, να υπολογίσετε την ιδιοτιμή της ενέργειας της βασικής κατάστασης και να τη συγκρίνετε με την τιμή που προκύπτει για την ίδια ενέργεια με βάση τα αποτελέσματα του ερωτήματος **(α)**. Σχολιάστε τη σχέση των δυο αποτελεσμάτων.

Δίνεται: $\int\sqrt{\alpha^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{\alpha^2 - x^2} + \frac{\alpha^2}{2}\arcsin\frac{x}{\alpha}$

Λύση

α) Από την ολική ενέργεια του σώματος προσδιορίζεται η ορμή του ως:

$$E = K + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \Rightarrow \frac{p^2}{2m} = E - \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \pm\sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)} \qquad \textbf{(1)}$$

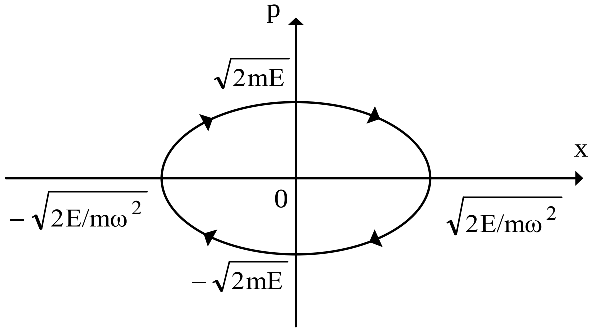
Η γραφική παράσταση της **(1)** στο χώρο των φάσεων αποδίδεται στο ακόλουθο σχήμα.

Για x=0 η **(1)** δίνει :

$$p = \pm\sqrt{2mE}$$

Για p=0 η **(1)** δίνει :

$$x = \pm\sqrt{2E/m\omega^2}$$



Άρα από τη γενικευμένη συνθήκη κβάντωσης του Bohr προκύπτει:

$$\oint_c p dx = nh \overset{(1)}{\Rightarrow} 4\int_0^{\sqrt{2E/m\omega^2}} \sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)}dx = nh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{2m}\int_0^{\sqrt{2E/m\omega^2}} \sqrt{E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2}\,dx =$$

$$= 4\sqrt{2m}\sqrt{\frac{1}{2}m\omega^2}\int_0^{\sqrt{2E/m\omega^2}} \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - x^2}\,dx = nh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4m\omega\left[\frac{x}{2}\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - x^2} + \frac{E}{m\omega^2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2E/m\omega^2}}\right]_0^{\sqrt{2E/m\omega^2}} = nh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4m\omega\left[0 + \frac{E}{m\omega^2}(\arcsin 1 - \arcsin 0)\right] = nh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4m\omega\frac{E}{m\omega^2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = nh \Rightarrow 2\frac{\pi}{\omega}E = nh \Rightarrow E_n = n\frac{h}{2\pi}\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E_n = n\hbar\omega} \qquad \textbf{(2)}$$

Οι μέγιστες απομακρύνσεις α_n αντιστοιχούν στα σημεία όπου το σώμα σταματά, δηλαδή K=0. Οπότε:

$$E_n = V(x = \alpha_n) \overset{(2)}{\Rightarrow} n\hbar\omega = \frac{1}{2}m\omega^2\alpha_n^2 \Rightarrow \alpha_n^2 = \frac{2n\hbar}{m\omega} \Rightarrow \boxed{\alpha_n = \sqrt{\frac{2n\hbar}{m\omega}}}$$

β) Η κυματοσυνάρτηση που δίνεται επαληθεύει την εξίσωση Schrodinger του αρμονικού ταλαντωτή **(8-40)**:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\psi = E\psi \qquad \textbf{(3)}$$

Αλλά είναι: $\psi(x)=\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}e^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}} \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial x}=-\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}\alpha^2 x e^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}}$

οπότε:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=-\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}\alpha^2\left[e^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}}-\alpha^2x^2e^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}}\right]=-\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}\alpha^2(1-\alpha^2x^2)e^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=-\alpha^2(1-\alpha^2x^2)\psi(x) \qquad \textbf{(4)}$$

Αντικαθιστώντας την **(4)** στην **(3)** και απλοποιώντας στη συνέχεια το εμφανιζόμενο παντού ψ(x) προκύπτει:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2(1-\alpha^2x^2)\psi(x)+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi(x)=E\psi(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2(1-\alpha^2x^2)+\frac{1}{2}m\omega^2x^2=E$$

Αλλά: $\alpha^2=m\omega/\hbar$ οπότε η τελευταία δίνει:

$$E=\frac{\hbar^2}{2m}\frac{m\omega}{\hbar}\left(1-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)+\frac{1}{2}m\omega^2x^2=$$

$$=\frac{\hbar\omega}{2}\left(1-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)+\frac{1}{2}m\omega^2x^2=\frac{\hbar\omega}{2}-\frac{1}{2}m\omega^2x^2+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E=\frac{\hbar\omega}{2}}$$

Συγκρίνοντας το παραπάνω αποτέλεσμα με αυτό του ερωτήματος **(α)** παρατηρείται ότι στη βασική κατάσταση (n=0) η ενέργεια είναι E=0 ημικλασσικά, ενώ σύμφωνα με την εξίσωση του Schrodinger κβαντομηχανικά είναι $E=\hbar\omega/2$. Αυτό οφείλεται στην αρχή της αβεβαιότητας, η οποία εισάγει αυτή την ουσιαστική διαφορά, απαιτώντας μια ελάχιστη ενεργειακή στάθμη ίση με $\hbar\omega/2$.
Για έναν κλασικό ταλαντωτή, η ελάχιστη ενέργεια E=0, δίνει τις ακριβείς και ταυτόχρονες τιμές x=0 και p=0, δηλαδή μηδενική ταλάντωση. Ενώ κβαντομηχανικά η αρχή της αβεβαιότητας το απαγορεύει αυτό, επειδή είναι αδύνατο να είναι ταυτόχρονα ακριβώς καθορισμένη και η θέση και η ορμή του σώματος. Για το λόγο αυτό κβαντομηχανικά η ελάχιστη ενέργεια είναι $E=\hbar\omega/2$.

ΘΕΜΑ 7

α) Χρησιμοποιήστε τη συνθήκη κβάντωσης του Bohr (2πrp=nh, n: ακέραιος) στο πρόβλημα ενός ηλεκτρονίου μάζας m και φορτίου –e που περιφέρεται σε κύκλο ακτίνας r περί ένα θετικό πυρήνα φορτίου e (άτομο του υδρογόνου) και δείξτε ότι το ενεργειακό φάσμα του συστήματος είναι: $E_n = \frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}$, όπου $\hbar = h/2\pi$.

β) Θεωρείστε γνωστά τα ενεργειακά φάσματα: σωματιδίου μάζας m σε μονοδιάστατο πηγάδι δυναμικού πλάτους α και άπειρου ύψους: $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m\alpha^2}$

και μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή συχνότητας ω: $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$

Δείξτε ότι στο όριο των μεγάλων ενεργειών, οι σχετικές ενεργειακές μεταβολές $\Delta E_n / E_n$ τείνουν στο ίδιο όριο. Εξηγείστε τη σημασία του κοινού αυτού ορίου.

Λύση

α) Η ελκτική δύναμη που ασκείται στο ηλεκτρόνιο από τον πυρήνα, σύμφωνα με το νόμο του Coulomb είναι:

$$F = -\frac{e^2}{r^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Όμως η δύναμη αυτή παίζει το ρόλο της κεντρομόλου, οπότε ισχύει:

$$\frac{e^2}{r^2} = m\frac{\upsilon^2}{r} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{e^2}{mr}} \qquad \textbf{(2)}$$

Επομένως η συνθήκη κβάντωσης του Bohr δίνει:

$$2\pi rp = nh \Rightarrow 2\pi rm\upsilon = nh \Rightarrow rm\upsilon = n\frac{h}{2\pi} \overset{(2)}{\Rightarrow} rm\sqrt{\frac{e^2}{mr}} = n\hbar \Rightarrow e\sqrt{mr} = n\hbar \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{r} = \frac{n\hbar}{e\sqrt{m}} \Rightarrow r_n = \frac{n^2\hbar^2}{me^2} \quad , n = 1,2,... \qquad \textbf{(3)}$$

Η **(3)** δίνει τις επιτρεπόμενες τροχιές του ηλεκτρονίου.

Η δυναμική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι:

$$F=-\frac{dV}{dr}\overset{(1)}{\Rightarrow}-\frac{e^2}{r^2}=-\frac{dV}{dr}\Rightarrow\int_0^V dV=e^2\int_\infty^r\frac{dr}{r^2}\Rightarrow V=-\frac{e^2}{r} \qquad \textbf{(4)}$$

Άρα η ολική ενέργεια είναι:

$$E=K+V\overset{(4)}{=}\frac{1}{2}m\upsilon^2-\frac{e^2}{r}\overset{(2)}{=}\frac{1}{2}m\frac{e^2}{mr}-\frac{e^2}{r}\Rightarrow E=-\frac{e^2}{2r}\overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\boxed{E_n=-\frac{me^4}{2\hbar^2n^2}\quad ,n=1,2,...} \qquad \textbf{(5)}$$

β) Οι σχετικές ενεργειακές μεταβολές των τριών συστημάτων είναι:

- **Άτομο Υδρογόνου :**

$$\frac{\Delta E_n}{E_n}=\frac{E_{n+1}-E_n}{E_n}=\frac{E_{n+1}}{E_n}-1=\frac{-\frac{me^4}{2\hbar^2(n+1)^2}}{-\frac{me^4}{2\hbar^2n^2}}-1=\frac{n^2}{(n+1)^2}-1$$

- **Απειρόβαθο πηγάδι :**

$$\frac{\Delta E_n}{E_n}=\frac{E_{n+1}-E_n}{E_n}=\frac{E_{n+1}}{E_n}-1=\frac{\frac{(n+1)^2\pi^2\hbar^2}{\alpha^2 2m}}{\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{\alpha^2 2m}}-1=\frac{(n+1)^2}{n^2}-1$$

- **Αρμονικός ταλαντωτής :**

$$\frac{\Delta E_n}{E_n}=\frac{E_{n+1}-E_n}{E_n}=\frac{E_{n+1}}{E_n}-1=\frac{(n+1+1/2)\hbar\omega}{(n+1/2)\hbar\omega}-1=\frac{n+3/2}{n+1/2}-1$$

Στο όριο των μεγάλων ενεργειών, δηλαδή για n πολύ μεγάλο είναι $n+1\cong n$ και $n+3/2\cong n+1/2\cong n$ οπότε και οι τρεις παραπάνω σχετικές ενεργειακές μεταβολές τείνουν στο ίδιο όριο $\Delta E_n/E_n\to 0$, δηλαδή στο μηδέν.
Η σημασία του κοινού αυτού ορίου είναι ότι στις μεγάλες ενέργειες, οι ενεργειακές στάθμες γίνονται δυσδιάκριτες, πάρα πολύ κοντά η μια στην άλλη και επομένως το ενεργειακό φάσμα είναι σχεδόν συνεχές.

ΘΕΜΑ 8

Θεωρείστε ηλεκτρόνιο με μάζα ηρεμίας m_o και φορτίο e, το οποίο επιταχύνεται σε διαφορά δυναμικού V. Υπολογίστε το μήκος κύματος de Broglie του ηλεκτρονίου στη σχετικιστική περίπτωση. Δείξτε ότι, στη μη σχετικιστική περίπτωση, το μήκος κύματος μιας δέσμης ηλεκτρονίων που επιταχύνονται σε μια διαφορά δυναμικού V, είναι ανάλογο του $V^{-1/2}$.

Δίνεται η σχετικιστική σχέση ορμής – ενέργειας: $E^2 = m_o^2c^4 + p^2c^2$

Λύση

Σύμφωνα με το θεώρημα έργου – κινητικής ενέργειας όταν το ηλεκτρόνιο επιταχύνεται σε διαφορά δυναμικού V ισχύει:

$$W = \Delta K \Rightarrow eV = K \qquad \textbf{(1)}$$

Σχετικιστικά η ορμή των ηλεκτρονίων υπολογίζεται από τις σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{l} E^2 = m_o^2c^4 + p^2c^2 \\ E = K + E_o = K + m_oc^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (K + m_oc^2)^2 = m_o^2c^4 + p^2c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K^2 + m_o^2c^4 + 2Km_oc^2 = m_o^2c^4 + p^2c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2c^2 = K^2 + 2Km_oc^2 \Rightarrow p = \frac{1}{c}\sqrt{K(K + 2m_oc^2)} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{eV(eV + 2m_oc^2)} \qquad \textbf{(2)}$$

Άρα το μήκος κύματος de Broglie των ηλεκτρονίων δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = \frac{h}{p} \overset{(2)}{\Rightarrow} \lambda = \frac{hc}{\sqrt{eV(eV + 2m_oc^2)}}$$

Με χρήση της μη σχετικιστικής μηχανικής (κλασσικά) από την κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων υπολογίζεται η ορμή τους ως:

$$K = \frac{p^2}{2m_o} \overset{(1)}{\Rightarrow} eV = \frac{p^2}{2m_o} \Rightarrow p = \sqrt{2m_oeV} \qquad \textbf{(3)}$$

Συνεπώς το μήκος κύματος των ηλεκτρονίων μη σχετικιστικά είναι:

$$\lambda = \frac{h}{p} \overset{(3)}{\Rightarrow} \lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_o eV}}$$

ΘΕΜΑ 9

Προσδιορίστε με ποιο τρόπο μεταβάλλονται οι ιδιοσυναρτήσεις $\psi_n(x)$ και οι ιδιοτιμές της ενέργειας E_n για σωματίδιο κινούμενο κβαντομηχανικά σε μονοδιάστατο δυναμικό $V(x)$ όταν το δυναμικό αυτό μεταβληθεί κατά μια σταθερή ποσότητα V_o.

Λύση

Από τη χρονοανεξάρτητη εξίσωση Schrodinger **(8-17)** προκύπτει:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}+[E-V(x)]\psi(x)=0\Rightarrow\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}+V(x)\psi(x)=E\psi(x)$$

Προσθέτοντας και στα δυο μέλη της παραπάνω εξίσωσης την ποσότητα $V_o\psi(x)$ λαμβάνεται:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}+[V(x)+V_o]\psi(x)=(E+V_o)\psi(x)$$

Όπως γίνεται άμεσα φανερό, οι ιδιοσυναρτήσεις $\psi_n(x)$ επαληθεύουν και τη νέα εξίσωση Schrodinger με το αυξημένο κατά V_o δυναμικό. Επομένως οι κυματοσυναρτήσεις $\psi_n(x)$ δεν μεταβάλλονται, ενώ οι ιδιοτιμές της ενέργειας E_n του αρχικού προβλήματος αυξάνονται κατά τη σταθερή ποσότητα V_o.

ΘΕΜΑ 10

Για ένα σωμάτιο με ενέργεια E=0 η κυματοσυνάρτησή του βρέθηκε ότι δίνεται από τη σχέση: $\psi(x) = Ae^{-x^2/L^2}$
Να προσδιοριστεί η συνάρτηση δυναμικού V(x).

Λύση

Η δοσμένη κυματοσυνάρτηση ψ(x) επαληθεύει την εξίσωση Schrodinger για E=0.

Δηλαδή: $$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} - V(x)\psi(x) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά: $$\frac{\partial\psi(x)}{\partial x} = -\frac{2A}{L^2}xe^{-x^2/L^2}$$

και

$$\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} = -\frac{2A}{L^2}\left[e^{-x^2/L^2} - \frac{2x^2}{L^2}e^{-x^2/L^2}\right] \Rightarrow \frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} = \frac{2A}{L^2}\left(\frac{2x^2}{L^2} - 1\right)e^{-x^2/L^2}$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ και $\psi(x)$ στην εξίσωση **(1)** προκύπτει:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{2A}{L^2}\left(\frac{2x^2}{L^2} - 1\right)e^{-x^2/L^2} - V(x)Ae^{-x^2/L^2} = 0 \Rightarrow V(x) = \frac{\hbar^2}{mL^4}(2x^2 - L^2)$$

‘

ΘΕΜΑ 11

Έστω σωματίδιο εντός φρέατος δυναμικού μήκους L βρισκόμενο στην κατάσταση $\psi_n(x)$.
α) Ποια είναι η πιθανότητα να εντοπιστεί το σωματίδιο στο αριστερό τέταρτο του φρέατος;
β) Ποια είναι η τιμή του κβαντικού αριθμού n που μεγιστοποιεί αυτή την πιθανότητα;
γ) Ποιο το όριο της πιθανότητας καθώς $n\to\infty$;

Λύση

α) Οι κυματοσυναρτήσεις του σωματιδίου στο απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού σύμφωνα με την **(8-27)** είναι:

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi}{L}x \qquad \textbf{(1)}$$

Η πιθανότητα να εντοπιστεί το σωματίδιο στο αριστερό τέταρτο του φρέατος είναι:

$$P=\int_0^{L/4}\left|\psi_n(x)\right|^2 dx \overset{(1)}{=} \frac{2}{L}\int_0^{L/4}\sin^2\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{2}{L}\int_0^{L/4}\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2n\pi}{L}x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{L}\left[x-\frac{L}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{L}x\right]_0^{L/4}=\frac{1}{L}\left[\frac{L}{4}-\frac{L}{2n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2}-\sin 0\right)\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{P=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}} \qquad \textbf{(2)}$$

β) Η προηγούμενη πιθανότητα θα μεγιστοποιείται τοπικά εκεί που $\sin(n\pi/2)=-1$
Δηλαδή όταν:

$$\sin\frac{n\pi}{2}=-1\Rightarrow\frac{n\pi}{2}=2k\pi+\frac{3\pi}{2}\Rightarrow n=4k+3 \qquad ,k=0,1,2,...$$

Επομένως η πιθανότητα μεγιστοποιείται για τους κβαντικούς αριθμούς n=3,7,11,15,…

γ) Για $n\to\infty$ ο όρος $\frac{1}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\to 0$, οπότε σύμφωνα με τη **(2)** η πιθανότητα είναι $P=\frac{1}{4}$.

ΘΕΜΑ 12

Έστω σωματίδιο εντός απειρόβαθου φρέατος δυναμικού μήκους L βρισκόμενο στην κατάσταση $\psi_3(x)$.

α) Να προσδιοριστεί η πιθανότητα να εντοπιστεί το σωματίδιο στην περιοχή $[L/3, 2L/3]$. Ποια η πιθανότητα να βρίσκεται στις υπόλοιπες περιοχές;

β) Να βρεθεί η πιο πιθανή θέση στην οποία είναι δυνατόν να εντοπιστεί το σωματίδιο.

Λύση

α) Η κυματοσυνάρτηση της κατάστασης του σωματιδίου είναι:

$$\psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\frac{3\pi}{L}x \qquad \textbf{(1)}$$

Επομένως η πιθανότητα να εντοπιστεί το σωματίδιο στην περιοχή $[L/3, 2L/3]$ είναι:

$$P = \int_{L/3}^{2L/3} |\psi_3(x)|^2 dx \overset{(1)}{=} \frac{2}{L}\int_{L/3}^{2L/3} \sin^2\frac{3\pi}{L}x\, dx = \frac{2}{L}\int_{L/3}^{2L/3} \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{6\pi}{L}x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{L}\left[x - \frac{L}{6\pi}\sin\frac{6\pi}{L}x\right]_{L/3}^{2L/3} = \frac{1}{L}\left[\frac{2L}{3} - \frac{L}{3} - \frac{L}{6\pi}(\sin 4\pi - \sin 2\pi)\right] =$$

$$= \frac{1}{L}\left[\frac{L}{3} - \frac{L}{6\pi}(0-0)\right] \Rightarrow P = \frac{1}{3}$$

Σύμφωνα με τη συνθήκη κανονικοποίησης η πιθανότητα του σωματιδίου να βρίσκεται στις υπόλοιπες περιοχές P΄ είναι:

$$P' + P = 1 \Rightarrow P' = 1 - P = 1 - \frac{1}{3} \Rightarrow P' = \frac{2}{3}$$

β) Η πυκνότητα πιθανότητας να βρεθεί το σωματίδιο στη θέση x είναι:

$$p(x) = |\psi_3(x)|^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} p(x) = \frac{2}{L}\sin^2\frac{3\pi}{L}x \qquad \textbf{(2)}$$

Συνεπώς ο προσδιορισμός της πιο πιθανής θέσης εντοπισμού του σωματιδίου έγκειται στην εύρεση του μέγιστου ακροτάτου της συνάρτησης της πυκνότητα πιθανότητας p(x). Οπότε:

$$\frac{dp(x)}{dx}=0\overset{(2)}{\Rightarrow}\frac{2}{L}2\sin\frac{3\pi}{L}x\cdot\frac{3\pi}{L}\cos\frac{3\pi}{L}x=0\Rightarrow\frac{12\pi}{L^2}\sin\frac{3\pi}{L}x\cdot\cos\frac{3\pi}{L}x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{12\pi}{L^2}\frac{1}{2}\sin\frac{6\pi}{L}x=0\Rightarrow\frac{6\pi}{L^2}\sin\frac{6\pi}{L}x=0\Rightarrow\sin\frac{6\pi}{L}x=0\Rightarrow\frac{6\pi}{L}x=n\pi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=n\frac{L}{6}\overset{n=3}{\Rightarrow}x=\frac{L}{2}$$

Η δεύτερη παράγωγος της p(x) είναι:

$$\frac{d^2p}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{6\pi}{L^2}\sin\frac{6\pi}{L}x\right)=\frac{6\pi}{L^2}\frac{6\pi}{L}\cos\frac{6\pi}{L}x=\frac{36\pi^2}{L^3}\cos\frac{6\pi}{L}x$$

Στο σημείο του ακροτάτου x=L/2 δίνει:

$$\left.\frac{d^2p}{dx^2}\right|_{x=L/2}=\frac{36\pi^2}{L^3}\cos 3\pi=-\frac{36\pi^2}{L^3}<0$$

Άρα στη θέση x=L/2 η πυκνότητα πιθανότητας είναι μέγιστη, δηλαδή η θέση x=L/2 είναι η πιο πιθανή θέση εντοπισμού του σωματιδίου.

ΘΕΜΑ 13

Σωματίδιο κινείται πάνω στον άξονα x. Σε κάποια χρονική στιγμή η κυματοσυνάρτησή του έχει τη μορφή: $\psi(x) = be^{-|x-x_o|/\alpha}$, όπου x_o και $\alpha>0$ δοσμένες παράμετροι με διαστάσεις μήκους.

α) Ποια πρέπει να είναι η απόλυτη τιμή του b ώστε η $|\psi(x)|^2$ να είναι μια κατανομή πιθανότητας, δηλαδή η $\psi(x)$ να είναι κανονικοποιημένη;

β) Υπολογίστε την πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο στο διάστημα (x_o-α, x_o+α).

Λύση

α) Για να είναι η $\psi(x)$ κανονικοποιημένη θα πρέπει, σύμφωνα με τη συνθήκη κανονικοποίησης, το ολοκλήρωμα της πυκνότητας πιθανότητας $|\psi(x)|^2$ πάνω σε όλο τον άξονα x να ισούται με τη μονάδα. Δηλαδή:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1 \Rightarrow |b|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|x-x_o|/\alpha} dx =$$

$$= |b|^2 \left[\int_{-\infty}^{x_o} e^{-2(x-x_o)/\alpha} dx + \int_{x_o}^{+\infty} e^{-2(x-x_o)/\alpha} dx \right] = |b|^2 \alpha = 1 \Rightarrow |b| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

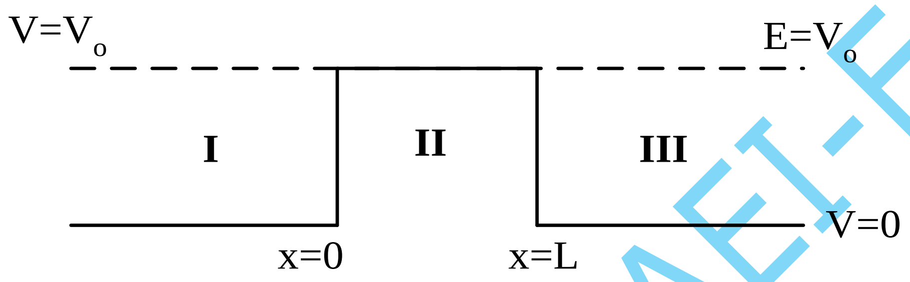
β) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι το ολοκλήρωμα της $|\psi(x)|^2$ από x_o-α μέχρι x_o+α. Δηλαδή:

$$P = \int_{x_o-\alpha}^{x_o+\alpha} |\psi(x)|^2 dx = |b|^2 \int_{x_o-\alpha}^{x_o+\alpha} e^{-2|x-x_o|/\alpha} dx = 2|b|^2 \int_{0}^{\alpha} e^{-2x'/\alpha} dx' = 1 - \frac{1}{e^2} = 0,63$$

ΘΕΜΑ 14

Μονοενεργειακή δέσμη σωματιδίων ενέργειας E και μάζας m προσπίπτει από τα αριστερά πάνω σε ορθογώνιο φράγμα δυναμικού μήκους L και ύψους V_o. Αν $E = V_o$ να υπολογίσετε τις κυματοσυναρτήσεις στις διάφορες περιοχές.

Λύση



Η χρονικά ανεξάρτητη εξίσωση Schrodinger για κάθε μια από τις τρεις περιοχές δίνει:

- Για την περιοχή I (x<0) όπου V=0:

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi_1=0\Rightarrow\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+k^2\psi_1=0\ ,\ \text{όπου}\ k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}>0\quad \text{αφού } E>0$$

Η γενική λύση της προηγούμενης είναι:

$$\psi_1(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx} \qquad \textbf{(1)}$$

Παρατηρείται ότι ο πρώτος όρος εκφράζει την προσπίπτουσα και ο δεύτερος την ανακλώμενη δέσμη.

- Για την περιοχή II ($0\le x\le \ell$) όπου V_o=E:
-

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_o)=0\Rightarrow\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}=0 \qquad (\text{αφού } E=V_o)$$

και η γενική λύση είναι:

$$\psi_2(x)=Cx+D \qquad \textbf{(2)}$$

- Για την περιοχή III (x>L) όπου V=0:
-

$$\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi_3=0\Rightarrow\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2}+k^2\psi_3=0 \quad \text{, όπου} \quad k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}>0$$

και η γενική της λύση είναι:

$$\psi_3(x)=Fe^{ikx}+Ge^{-ikx} \qquad \textbf{(3)}$$

Επειδή ο δεύτερος όρος της σχέσης **(3)** εκφράζει την ανακλώμενη δέσμη και δεν έχει φυσικό περιεχόμενο, αφού δεν υπάρχει αίτιο που να αναγκάσει τη δέσμη να κινηθεί προς τα αριστερά, προφανώς είναι G=0 οπότε:

$$\psi_3(x)=Fe^{ikx} \qquad \textbf{(4)}$$

Οι οριακές συνθήκες συνέχειας, δηλαδή ότι οι $\psi(x)$ και $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ πρέπει να είναι συνεχείς, στα σημεία x=0 και x=L δίνουν:

Στο x=0: $\psi_1(x=0)=\psi_2(x=0)\Rightarrow A+B=D$

$$\left.\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right|_{x=0}\Rightarrow ik(A-B)=C$$

Στο x=L: $\psi_2(x=L)=\psi_3(x=L)\Rightarrow CL+D=Fe^{ikL}$

$$\left.\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right|_{x=L}=\left.\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\right|_{x=L}\Rightarrow C=ikFe^{ikL}$$

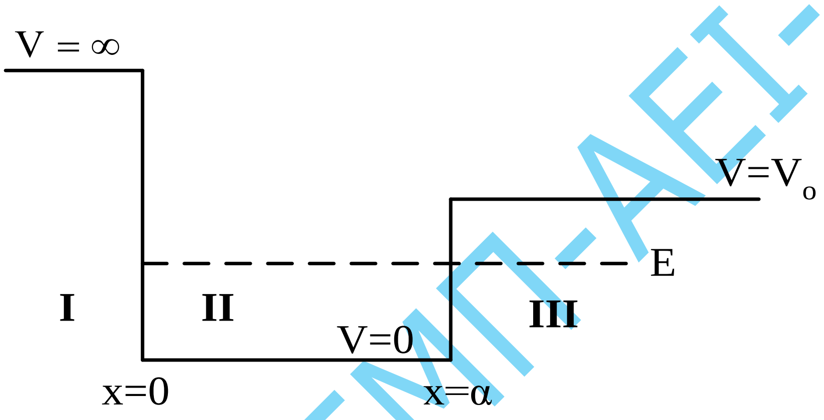
Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα προσδιορίζονται οι σταθερές που εμφανίζονται στις κυματοσυναρτήσεις.

ΘΕΜΑ 15

Ηλεκτρόνιο μάζας m είναι εγκλωβισμένο στο πηγάδι του σχήματος.
α) Γράψτε τις φυσικά παραδεκτές λύσεις της εξίσωσης Schrodinger.
β) Αποδείξτε ότι η ενέργεια ικανοποιεί τη σχέση:

$$\sqrt{2mE}\cot\frac{\alpha\sqrt{2mE}}{\hbar}=-\sqrt{2m(V_o-E)}$$

Λύση



α) Η χρονικά ανεξάρτητη εξίσωση του Schrodinger για κάθε μια από τις τρεις περιοχές δίνει:

- Για την περιοχή I (x<0) όπου V=∞:

Προφανώς επειδή υπάρχει άπειρο φράγμα δυναμικού αποτελεί απαγορευμένη περιοχή και είναι: $\psi_1(x)=0$ **(1)**

- Για την περιοχή II (0<x<α) όπου V=0:

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi_2=0\Rightarrow\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+k_2^2\psi_2=0\ ,\quad \text{όπου } k_2^2=\frac{2mE}{\hbar^2}>0$$

και η γενική της λύση είναι: $\psi_2(x)=Ae^{ik_2x}+Be^{-ik_2x}$ **(2)**

- Για την περιοχή ΙΙΙ (x>α) όπου $V=V_o$:

$$\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_o)\psi_3=0 \Rightarrow \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2}-k_3^2\psi_3=0$$

$$\text{όπου}\quad -k_3^2=\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_o)>0$$

επειδή $E<V_o$ δηλαδή $E-V_o<0$ και η γενική της λύση είναι:

$$\psi_3(x)=Ce^{-k_3x}+De^{k_3x}$$

Επειδή όμως η λύση $\psi_3(x)$ πρέπει να μην απειρίζεται όταν $x\to+\infty$ ($e^{+\infty}\to+\infty$) προκύπτει ότι D=0. Άρα:

$$\psi_3(x)=Ce^{-k_3x} \qquad \textbf{(3)}$$

β) Οι οριακές συνθήκες που ικανοποιούν οι κυματοσυναρτήσεις στα σημεία x=0 και x=α είναι οι εξής:

$$\psi_1(x=0)=\psi_2(x=0)\Rightarrow 0=A+B\Rightarrow A=-B \qquad \textbf{(4)}$$

$$\psi_2(x=\alpha)=\psi_3(x=\alpha)\Rightarrow Ae^{ik_2\alpha}+Be^{-ik_2\alpha}=Ce^{-k_3\alpha}\overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow A(e^{ik_2\alpha}-e^{-ik_2\alpha})=Ce^{-k_3\alpha} \qquad \textbf{(5)}$$

$$\left.\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right|_{x=\alpha}=\left.\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\right|_{x=\alpha}\Rightarrow ik_2Ae^{ik_2\alpha}-ik_2Be^{-ik_2\alpha}=-k_3Ce^{-k_3\alpha}\overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow ik_2A(e^{ik_2\alpha}+e^{-ik_2\alpha})=-k_3Ce^{-k_3\alpha} \qquad \textbf{(6)}$$

Διαιρώντας τις σχέσεις **(6)** και **(5)** κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{ik_2(e^{ik_2\alpha}+e^{-ik_2\alpha})}{e^{ik_2\alpha}-e^{-ik_2\alpha}}=-k_3\Rightarrow\frac{ik_2 2\cos k_2\alpha}{2i\sin k_2\alpha}=-k_3\Rightarrow\frac{k_2\cos k_2\alpha}{\sin k_2\alpha}=-k_3\Rightarrow$$

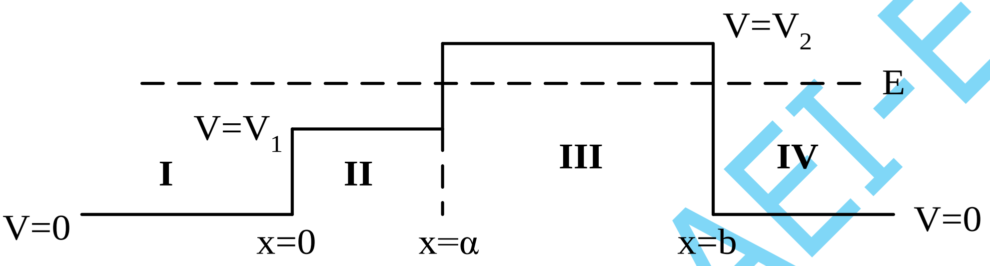
$$\Rightarrow k_2\cot k_2\alpha=-k_3\Rightarrow\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\cot\frac{\alpha\sqrt{2mE}}{\hbar}=-\frac{\sqrt{2m(V_o-E)}}{\hbar}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{2mE}\cot\frac{\alpha\sqrt{2mE}}{\hbar}=-\sqrt{2m(V_o-E)}$$

ΘΕΜΑ 16

Σωμάτιο μάζας m και ενέργειας E προσπίπτει από τα αριστερά στο φράγμα δυναμικού του σχήματος.
α) Γράψτε τις φυσικά αποδεκτές λύσεις της εξίσωσης Schrodinger.
β) Ποιες είναι οι συνθήκες που ικανοποιούν οι συντελεστές των λύσεων αυτών;

Λύση



α) Η επίλυση της εξίσωσης Schrodinger κατά περιοχές δίνει:

- Για την περιοχή I (x<0) όπου V=0:

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi_1=0\Rightarrow\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+k_1^2\psi_1=0,\quad \text{όπου}\ \ k_1^2=\frac{2mE}{\hbar^2}>0$$

και η γενική της λύση είναι: $\psi_1(x)=Ae^{ik_1x}+Be^{-ik_1x}$ **(1)**

όπου ο πρώτος όρος εκφράζει το προσπίπτον και ο δεύτερος το ανακλώμενο κυματοπακέτο στο σημείο x=0.

- Για την περιοχή II (0<x<α) όπου $V=V_1$:

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_1)\psi_2=0\Rightarrow\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+k_2^2\psi_2=0$$

$$\text{όπου}\quad k_2^2=\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_1)>0$$

επειδή $E>V_1$ δηλαδή $E-V_1>0$ και η γενική της λύση είναι:

$$\psi_2(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x} \qquad \textbf{(2)}$$

- Για την περιοχή III (α<x<b) όπου $V=V_2$:

$$\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_2)\psi_3 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2} - k_3^2\psi_3 = 0$$

$$\text{όπου} \quad -k_3^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_2) > 0$$

λόγω του ότι $E< V_2$ δηλαδή $E- V_2<0$ και η γενική της λύση είναι:

$$\psi_3(x) = Fe^{k_3x} + Ge^{-k_3x} \qquad \textbf{(3)}$$

- Για την περιοχή IV (x>b) όπου V=0 :

$$\frac{\partial^2\psi_4}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi_4 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\psi_4}{\partial x^2} + k_1^2\psi_4 = 0 \;, \text{ όπου } \quad k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} > 0$$

και η γενική της λύση είναι: $\psi_4(x) = He^{ik_1x} + Ke^{-ik_1x}$

Αλλά είναι K=0 επειδή δεν έχει φυσικό νόημα στην περιοχή IV κύμα διαδιδόμενο προς τα αριστερά. Άρα:

$$\psi_4(x) = He^{ik_1x} \qquad \textbf{(4)}$$

β) Οι οριακές συνθήκες που ικανοποιούν οι κυματοσυναρτήσεις στα σημεία x=0, x=α και x=b είναι οι εξής:

$$\psi_1(x=0) = \psi_2(x=0) \Rightarrow A + B = C + D$$

$$\left.\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right|_{x=0} \Rightarrow ik_1(A - B) = ik_2(C - D)$$

$$\psi_2(x=\alpha) = \psi_3(x=\alpha) \Rightarrow Ce^{ik_2\alpha} + De^{-ik_2\alpha} = Fe^{k_3\alpha} + Ge^{-k_3\alpha}$$

$$\left.\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right|_{x=\alpha} = \left.\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\right|_{x=\alpha} \Rightarrow ik_2(Ce^{ik_2\alpha} - De^{-ik_2\alpha}) = k_3(Fe^{k_3\alpha} - Ge^{-k_3\alpha})$$

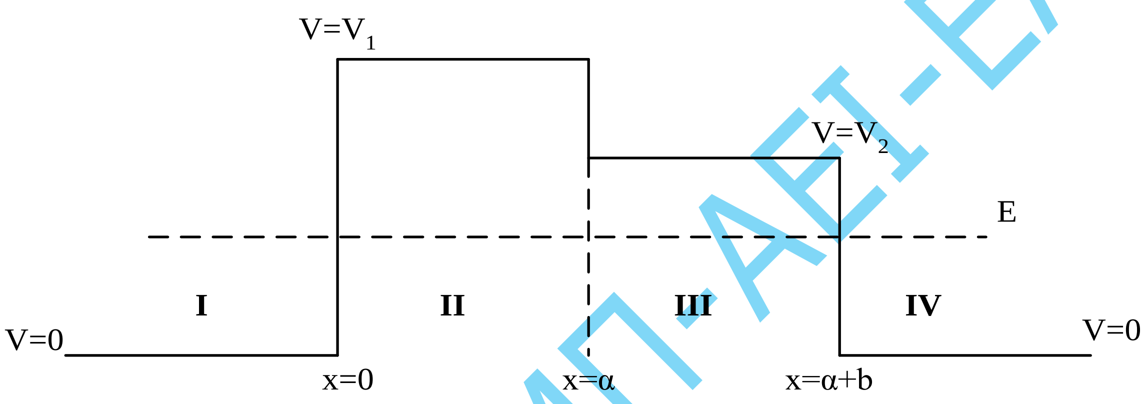
$$\psi_3(x=b) = \psi_4(x=b) \Rightarrow Fe^{k_3b} + Ge^{-k_3b} = He^{ik_1b}$$

$$\left.\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\right|_{x=b} = \left.\frac{\partial\psi_4}{\partial x}\right|_{x=b} \Rightarrow k_3(Fe^{k_3b} - Ge^{-k_3b}) = ik_1He^{ik_1b}$$

ΘΕΜΑ 17

Δέσμη ηλεκτρονίων με ολική ενέργεια Ε, κινείται προς τα δεξιά και πέφτει σε ένα μονοδιάστατο φράγμα δυναμικού όπου $V(x)=V_1$ και $V(x)=V_2$ στα διαστήματα (0,α) και (α,α+b) αντίστοιχα. Βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης Schrodinger που είναι φυσικά παραδεκτές για τις διάφορες περιοχές και γράψτε τις συνθήκες που ικανοποιούν τα πλάτη των κυμάτων.

Λύση



Επιλύοντας την εξίσωση Schrodinger κατά περιοχές προκύπτει:

- Για την περιοχή I (x<0) όπου V=0:

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi_1=0\Rightarrow\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+k_1^2\psi_1=0\ ,\ \text{όπου}\quad k_1^2=\frac{2mE}{\hbar^2}>0$$

και η γενική της λύση είναι:

$$\psi_1(x)=Ae^{ik_1x}+Be^{-ik_1x} \qquad \textbf{(1)}$$

- Για την περιοχή II (0<x<α) όπου $V=V_1$:

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_1)\psi_2=0\Rightarrow\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}-k_2^2\psi_2=0$$

$$\text{όπου}\quad -k_2^2=\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_1)>0$$

αφού $E< V_1 \Rightarrow E- V_1<0$ και η γενική της λύση είναι:

$$\psi_2(x) = Ce^{k_2 x} + De^{-k_2 x} \qquad \textbf{(2)}$$

- Για την περιοχή ΙΙΙ ($\alpha<x<\alpha+b$), όπου $V=V_2$:

$$\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V_2)\psi_3 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2} - k_3^2\psi_3 = 0$$

$$\text{όπου} \quad -k_3^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E-V_2) > 0$$

λόγω του ότι $E< V_2 \Rightarrow E- V_2<0$ και η γενική της λύση είναι:

$$\psi_3(x) = Fe^{k_3 x} + Ge^{-k_3 x} \qquad \textbf{(3)}$$

- Για την περιοχή IV ($x>\alpha+b$) όπου $V=0$:
-

$$\frac{\partial^2\psi_4}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi_4 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\psi_4}{\partial x^2} + k_1^2\psi_4 = 0 \;, \text{όπου } k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} > 0$$

και η γενική της λύση είναι: $\psi_4(x) = He^{ik_1 x} + Ke^{-ik_1 x}$

Επειδή όμως στην περιοχή αυτή δεν έχει φυσικό νόημα το διαδιδόμενο κύμα προς τα αριστερά είναι $K=0$, οπότε τελικά είναι:

$$\psi_4(x) = He^{ik_1 x} \qquad \textbf{(4)}$$

Οι συνθήκες που ικανοποιούν τα πλάτη των κυμάτων είναι οι εξής:

$$\psi_1(x=0) = \psi_2(x=0) \Rightarrow A+B = C+D$$

$$\left.\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right|_{x=0} \Rightarrow ik_1(A+B) = k_2(C-D)$$

$$\psi_2(x=\alpha)=\psi_3(x=\alpha)\Rightarrow Ce^{k_2\alpha}+De^{-k_2\alpha}=Fe^{k_3\alpha}+Ge^{-k_3\alpha}$$

$$\left.\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right|_{x=\alpha}=\left.\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\right|_{x=\alpha}\Rightarrow k_2(Ce^{k_2\alpha}-De^{-k_2\alpha})=k_3(Fe^{k_3\alpha}-Ge^{-k_3\alpha})$$

$$\psi_3(x=\alpha+b)=\psi_4(x=\alpha+b)\Rightarrow Fe^{k_3(\alpha+b)}+Ge^{-k_3(\alpha+b)}=He^{ik_1(\alpha+b)}$$

$$\left.\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\right|_{x=\alpha+b}=\left.\frac{\partial\psi_4}{\partial x}\right|_{x=\alpha+b}\Rightarrow k_3(Fe^{k_3(\alpha+b)}-Ge^{-k_3(\alpha+b)})=ik_1He^{ik_1(\alpha+b)}$$

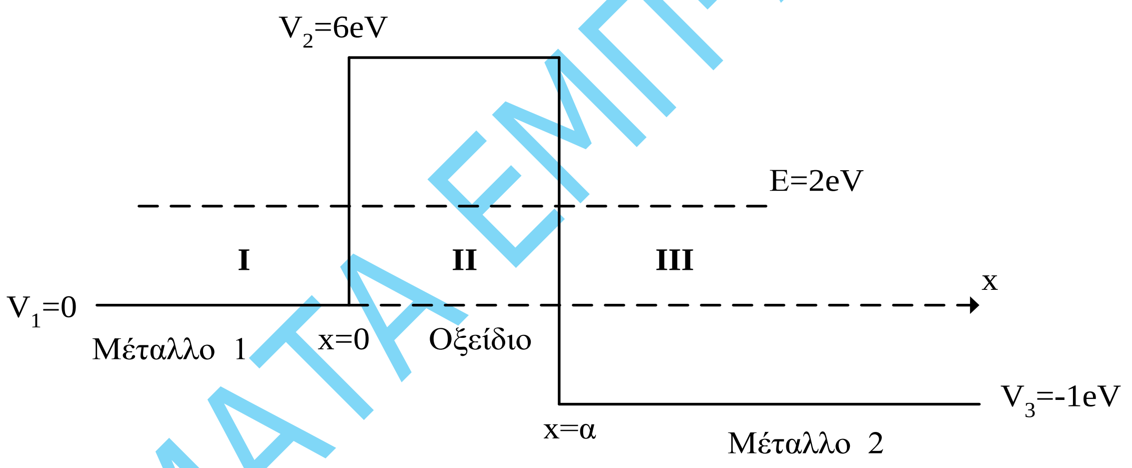
ΘΕΜΑ 18

Το ακόλουθο σχήμα παριστάνει με αρκετά καλή προσέγγιση τη μορφή της δυναμικής ενέργειας ηλεκτρονίου σε σύστημα δυο μετάλλων που έχουν μονωθεί με στρώμα οξειδίου. Ένα ηλεκτρόνιο με ενέργεια E=2eV κινείται από τα αριστερά προς τα δεξιά μέσα στο μέταλλο 1.

α) Γράψτε τις φυσικά παραδεκτές λύσεις της χρονικά ανεξάρτητης εξίσωσης του Schrodinger σε κάθε περιοχή και εξηγείστε σύντομα τι παριστάνει, από φυσική άποψη, κάθε όρος των λύσεων. Στις περιοχές όπου η λύση έχει ταλαντούμενη μορφή υπολογίστε τα αντίστοιχα μήκη κύματος.

β) Υπολογίστε το πάχος α του στρώματος οξειδίου στην επαφή των δύο μετάλλων ώστε η πιθανότητα μετάδοσης στο μέταλλο 2 να είναι της τάξης του 10^{-10}. Δεχτείτε ότι ο συντελεστής διέλευσης είναι κατά προσέγγιση ίσος με $T \cong e^{-2k_2\alpha}$.

Λύση



α) Η επίλυση της εξίσωσης Schrodinger στις τρεις περιοχές δίνει:

- Για την περιοχή I (x<0) όπου $V=V_1=0$:
-

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi_1=0\overset{E=2}{\Rightarrow}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\frac{4m}{\hbar^2}\psi_1=0$$

και η γενική της λύση είναι:

$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}, \quad \text{όπου} \quad k_1^2 = \frac{4m}{\hbar^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Ο πρώτος όρος της $\psi_1(x)$ εκφράζει το προσπίπτον και ο δεύτερος όρος το ανακλώμενο κύμα στο x=0.

- Για την περιοχή ΙΙ (0<x<α) όπου $V=V_2=6eV$:

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V_2)\psi_2 = 0 \overset{E=2}{\Rightarrow} \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(2-6)\psi_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} - \frac{8m}{\hbar^2}\psi_2 = 0$$

και η γενική της λύση είναι:

$$\psi_2(x) = Ce^{k_2x} + De^{-k_2x}, \quad \text{όπου} \quad k_2^2 = \frac{8m}{\hbar^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Η σχέση **(2)** παρέχει την κυματοσυνάρτηση εντός του οξειδίου.

- Για την περιοχή ΙΙΙ (x>α), όπου $V=V_3=-1eV$:

$$\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V_3)\psi_3 = 0 \overset{E=2}{\Rightarrow} \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[2-(-1)]\psi_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2} + \frac{6m}{\hbar^2}\psi_3 = 0$$

και η γενική της λύση είναι:

$$\psi_3(x) = Fe^{ik_3x} + Ge^{-ik_3x}, \quad \text{όπου} \quad k_3^2 = \frac{6m}{\hbar^2}$$

Ο πρώτος όρος της $\psi_3(x)$ εκφράζει το διερχόμενο κύμα στο μέταλλο 2, ενώ ο δεύτερος όρος περιγράφει ένα κύμα διαδιδόμενο προς τα αριστερά στην περιοχή ΙΙΙ, ο οποίος δεν έχει φυσικό περιεχόμενο και επομένως G=0.

Άρα: $$\psi_3(x) = Fe^{ik_3x} \qquad \textbf{(3)}$$

Οι συντελεστές των πλατών των κυματοσυναρτήσεων ως γνωστό προσδιορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες στα σημεία x=0 και x=α.
Στις περιοχές I (x<0) και III (x>α) η λύση έχει ταλαντούμενη μορφή και τα αντίστοιχα μήκη κύματος υπολογίζονται από τους κυματάριθμους ως εξής:

$$x < 0: \qquad k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{2\sqrt{m}/\hbar} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\pi\hbar}{\sqrt{m}}$$

$$x > \alpha: \qquad k_3 = \frac{2\pi}{\lambda_3} \Rightarrow \lambda_3 = \frac{2\pi}{k_3} = \frac{2\pi}{\sqrt{6m}/\hbar} \Rightarrow \lambda_3 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{6m}}$$

β) Θα πρέπει ο συντελεστής διέλευσης να ισούται με 10^{-10} οπότε είναι:

$$T = 10^{-10} \Rightarrow e^{-2k_2\alpha} = 10^{-10} \Rightarrow e^{-2\frac{\sqrt{8m}}{\hbar}\alpha} = 10^{-10} \Rightarrow -2\frac{\sqrt{8m}}{\hbar}\alpha = \ln 10^{-10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\frac{\sqrt{8m}}{\hbar}\alpha = -10\ell n10 \Rightarrow \alpha = \frac{5\ln 10\hbar}{\sqrt{8m}}$$

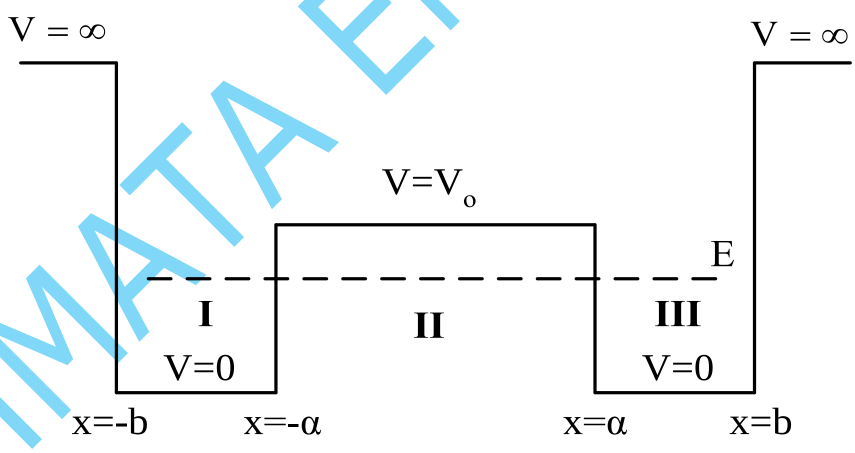
ΘΕΜΑ 19

Μικροσκοπικό σωματίδιο μάζας m βρίσκεται σε μονοδιάστατο δυναμικό:

$$V(x)=\begin{cases}\infty\ , & \text{για} \quad x<-b \quad \text{και} \quad x>b \\ 0\ , & \text{για} \quad -b<x<-\alpha \quad \text{και} \quad \alpha<x<b \\ V_o\ , & \text{για} \quad -\alpha<x<\alpha\end{cases}$$

Λύστε την εξίσωση του Schrodinger για την κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου, στις περιοχές όπου αυτή είναι μη μηδενική, για την περίπτωση $0<E<V_o$.
Εφαρμόστε τις οριακές συνθήκες στα σημεία:
α) $x=-b$ και $x=b$, όπου το δυναμικό απειρίζεται,
β) $x=-\alpha$ και $x=\alpha$, όπου το δυναμικό παρουσιάζει πεπερασμένες ασυνέχειες.
γ) Δώστε τη σχέση από την οποία προσδιορίζονται οι ιδιοενέργειες του συστήματος.
δ) Στην τελευταία σχέση θεωρείστε την οριακή περίπτωση $\alpha<<1/2\ k_2$ (δηλαδή $e^{2k_2\alpha}\cong 1$), όπου k_2 το κυματάνυσμα στο χώρο $-\alpha<x<\alpha$ και υπολογίστε τις ιδιοενέργειες του συστήματος.

Λύση



Η εξίσωση Schrodinger στις περιοχές I, II και III όπου η κυματοσυνάρτηση είναι μη μηδενική δίνει:

- Για την περιοχή I ($-b<x<-\alpha$) όπου $V=0$:

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi_1=0\Rightarrow\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+k_1^2\psi_1=0 \quad \text{, όπου}$$

$$k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

και η γενική της λύση είναι:

$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \qquad \textbf{(1)}$$

- Για την περιοχή ΙΙ (-α<x<α) όπου $V=V_o$:

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_o)\psi_2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} - k_2^2\psi_2 = 0$$

$$\text{όπου} \quad -k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_o) > 0$$

επειδή $E< V_o \Rightarrow E- V_o<0$ και η γενική της λύση είναι:

$$\psi_2(x) = Ce^{k_2x} + De^{-k_2x} \qquad \textbf{(2)}$$

- Για την περιοχή ΙΙΙ (α<x<b), όπου V=0:

$$\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi_3 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2} + k_1^2\psi_3 = 0 \ , \text{όπου} \quad k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

και η γενική της λύση είναι:

$$\psi_3(x) = Fe^{ik_1x} + Ge^{-ik_1x} \qquad \textbf{(3)}$$

α) Οι συνοριακές συνθήκες στα σημεία x=-b και x=b όταν το δυναμικό απειρίζεται κι επομένως η κυματοσυνάρτηση μηδενίζεται δίνουν:

$$\psi_1(x = -b) = 0 \Rightarrow Ae^{-ik_1b} + Be^{ik_1b} = 0 \Rightarrow Be^{ik_1b} = -Ae^{-ik_1b} \Rightarrow B = -Ae^{-2ik_1b}$$

$$\psi_3(x = b) = 0 \Rightarrow Fe^{ik_1b} + Ge^{-ik_1b} = 0 \Rightarrow F = -Ge^{-2ik_1b}$$

Άρα οι **(1)** και **(3)** γράφονται:

$$\psi_1(x) = A(e^{ik_1x} - e^{-2ik_1b} \cdot e^{-ik_1x}) \Rightarrow \psi_1(x) = A(e^{ik_1x} - e^{-ik_1(x+2b)})$$

$$\psi_3(x) = F(e^{ik_1x} - e^{2ik_1b} \cdot e^{-ik_1x}) \Rightarrow \psi_3(x) = G(e^{-ik_1x} - e^{ik_1(x-2b)})$$

β) Ενώ στα σημεία x=-α και x=α δίνουν:

$$\psi_1(x=-\alpha) = \psi_2(x=-\alpha) \Rightarrow A(e^{-ik_1\alpha} - e^{ik_1(\alpha-2b)}) = Ce^{-k_2\alpha} + De^{k_2\alpha} \quad \textbf{(4)}$$

$$\left.\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right|_{x=-\alpha} = \left.\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right|_{x=-\alpha} \Rightarrow ik_1 A(e^{-ik_1\alpha} + e^{ik_1(\alpha-2b)}) = k_2(Ce^{-k_2\alpha} - De^{k_2\alpha}) \quad \textbf{(5)}$$

$$\psi_2(x=\alpha) = \psi_3(x=\alpha) \Rightarrow Ce^{k_2\alpha} + De^{-k_2\alpha} = G(e^{-ik_1\alpha} - e^{ik_1(\alpha-2b)}) \quad \textbf{(6)}$$

$$\left.\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right|_{x=\alpha} = \left.\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\right|_{x=\alpha} \Rightarrow k_2(Ce^{k_2\alpha} - De^{-k_2\alpha}) =$$

$$= -ik_1 G(e^{-ik_1\alpha} + e^{ik_1(\alpha-2b)}) \quad \textbf{(7)}$$

γ) Διαιρώντας τις σχέσεις **(4)**, **(5)** και **(6)**, **(7)** κατά μέλη προκύπτουν:

$$\frac{ik_1(e^{-ik_1\alpha} + e^{ik_1(\alpha-2b)})}{e^{-ik_1\alpha} - e^{ik_1(\alpha-2b)}} = \frac{k_2(Ce^{-k_2\alpha} - De^{k_2\alpha})}{Ce^{-k_2\alpha} + De^{k_2\alpha}} \quad \textbf{(8)}$$

και

$$\frac{-ik_1(e^{-ik_1\alpha} - e^{ik_1(\alpha-2b)})}{e^{-ik_1\alpha} - e^{ik_1(\alpha-2b)}} = \frac{k_2(Ce^{k_2\alpha} - De^{-k_2\alpha})}{Ce^{k_2\alpha} + De^{-k_2\alpha}} \quad \textbf{(9)}$$

Από τις **(8)**, **(9)** επειδή τα πρώτα τους μέλη είναι ίσα και αντίθετα θα ισχύει:

$$\frac{Ce^{-k_2\alpha} - De^{k_2\alpha}}{Ce^{-k_2\alpha} + De^{k_2\alpha}} = \frac{De^{-k_2\alpha} - Ce^{k_2\alpha}}{Ce^{k_2\alpha} + De^{-k_2\alpha}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (Ce^{-k_2\alpha} - De^{k_2\alpha})(Ce^{k_2\alpha} + De^{-k_2\alpha}) =$$

$$= (Ce^{-k_2\alpha} + De^{k_2\alpha})(De^{-k_2\alpha} - Ce^{k_2\alpha}) \Rightarrow \ldots \Rightarrow C = D$$

Άρα για C=D η **(8)** δίνει:

$$\frac{ik_1 e^{-ik_1 b}(e^{-ik_1(\alpha-b)} + e^{ik_1(\alpha-b)})}{e^{-ik_1 b}(e^{-ik_1(\alpha-b)} - e^{ik_1(\alpha-b)})} = k_2 \frac{e^{k_2\alpha} - e^{-k_2\alpha}}{e^{k_2\alpha} + e^{-k_2\alpha}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2ik_1 \cos k_1(\alpha-b)}{-2i\sin k_1(\alpha-b)} = \frac{-2k_2 \sinh(k_2\alpha)}{2\cosh(k_2\alpha)} \Rightarrow k_1 \cot k_1(\alpha-b) = k_2 \tanh(k_2\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\cot\left[\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}(\alpha-b)\right] = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\sqrt{V_o - E}\tanh\left(\frac{\sqrt{2m(V_o-E)}}{\hbar}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cot\left[\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}(\alpha-b)\right] = \sqrt{\frac{V_o-E}{E}}\tanh\left(\frac{\sqrt{2m(V_o-E)}}{\hbar}\right)$$

δ) Στην οριακή περίπτωση όπου α<<1/2k_2, δηλαδή για $e^{2k_2\alpha} \cong 1 \Rightarrow k_2 \cong 0$ σύμφωνα με τα προηγούμενα προκύπτει:

$$\cot k_1(\alpha-b) = 0 \Rightarrow \cot\left[\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}(\alpha-b)\right] = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}(\alpha-b) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{E} = \frac{\hbar\pi}{\sqrt{2m}(\alpha-b)}\left(n+\frac{1}{2}\right) \Rightarrow E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m(\alpha-b)^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \quad, n = 0,1,2,\ldots.$$

❒ **Σημείωση:** Χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις: $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$, $e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x$ και $e^{x} + e^{-x} = 2\cosh x$, $e^{x} - e^{-x} = 2\sinh x$.

ΘΕΜΑ 20

Ένα ηλεκτρόνιο που προσπίπτει από αριστερά στο βήμα δυναμικού του σχήματος με ολική ενέργεια $E<V_o$, περιγράφεται από τις κυματοσυναρτήσεις:

$$\psi_1(x)=[(1+i)e^{ikx}+(1-i)e^{-ikx}], \text{ για } x<0 \text{ και } \psi_2(x)=e^{-kx}, \text{ για } x>0$$

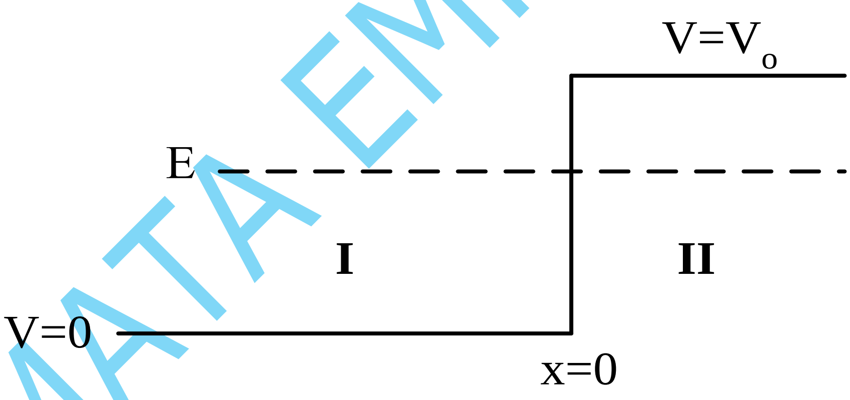
α) Δείξτε ότι ο συντελεστής ανάκλασης είναι μονάδα. Είναι συμβιβαστό αυτό με το γεγονός ότι η $\psi(x)$ δεν είναι μηδέν για x>0; Εξηγήστε σύντομα.

β) Ποια σχέση πρέπει να συνδέει το k με το E ώστε η $\psi(x)$ να είναι λύση της εξίσωσης Schrodinger στην περιοχή I και II; Τι συμπέρασμα προκύπτει για το λόγο E/V_o;

γ) Έστω το μήκος διείσδυσης 1/k στην κλασσικά απαγορευμένη περιοχή x>0 ως αβεβαιότητα θέσης Δx, για x>0. Για να μπορέσει να παρατηρηθεί το ηλεκτρόνιο στην περιοχή x>0, πρέπει να «φωτιστεί» με ένα φωτόνιο μήκους κύματος λ ίδιας τάξης μεγέθους όπως το Δx, οπότε και διαταράσσεται η κατάσταση του ηλεκτρονίου. Έστω ότι λ/2π=Δx.

Αν το ηλεκτρόνιο απορροφήσει όλη την ορμή του φωτονίου, υπολογίστε τη μεταβολή ΔE στην ενέργεια E του ηλεκτρονίου και δείξτε ότι η E γίνεται συγκρίσιμη με το V_o. Τι σημαίνει αυτό;

Λύση



α) Σύμφωνα με τη δοθείσα κυματοσυνάρτηση για x<0 είναι A=1+i και B=1-i. Οπότε ο συντελεστής ανάκλασης είναι:

$$R=\left|\frac{B}{A}\right|^2=\left|\frac{(1-i)^2}{(1+i)^2}\right|=\left|\frac{1+i^2-2i}{1+i^2+2i}\right|=\left|\frac{-2i}{2i}\right|\Rightarrow R=1$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι συμβιβαστό με το γεγονός ότι $\psi_2(x)\neq 0$ για x>0, που περιγράφει την πιθανότητα διείσδυσης στην περιοχή II και δεν σημαίνει την οριστική διαμονή του ηλεκτρονίου στην περιοχή αυτή. Αλλά επειδή R=1 το ηλεκτρόνιο πάντοτε ανακλάται και επιστρέφει στην περιοχή I.

β) Η δεύτερη παράγωγος της $\psi_1(x)$ είναι:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = (1+i)ike^{ikx} + (1-i)(-ik)e^{-ikx}$$

και

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = (1+i)(ik)^2 e^{ikx} + (1-i)(-ik)^2 e^{-ikx} = i^2 k^2 [(1+i)e^{ikx} + (1-i)e^{-ikx}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = -k^2 \psi_1(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Άρα η εξίσωση Schrodinger στην περιοχή I (x<0) όπου V=0 δίνει:

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi_1 = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} -k^2 \psi_1 + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi_1 = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E \qquad \textbf{(2)}$$

Ενώ στην περιοχή II (x>0) όπου $V=V_o$ είναι:

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} = (-k)^2 e^{-kx} = k^2 e^{-kx} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} = k^2 \psi_2(x) \qquad \textbf{(3)}$$

και η εξίσωση Schrodinger δίνει :

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_o)\psi_2 = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} k^2 \psi_2 + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_o)\psi_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2 + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_o) = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{2m}{\hbar^2} E + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_o) = 0 \Rightarrow E + E - V_o = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2E = V_o \Rightarrow \frac{E}{V_o} = \frac{1}{2}$$

γ) Στην περιοχή II σύμφωνα με τα προηγούμενα είναι:

$$k = \frac{\sqrt{2m(V_o - E)}}{\hbar} \qquad \textbf{(4)}$$

Θεωρώντας $\Delta x = 1/k$ η ορμή του φωτονίου είναι:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{hc}{c\lambda} = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi/k} = \frac{h}{2\pi}k \Rightarrow p = \frac{\hbar}{\Delta x}$$

Άρα η μεταβολή Δp στην ορμή του ηλεκτρονίου ισούται με την ορμή του φωτονίου που απορρόφησε. Δηλαδή: $\Delta p = \dfrac{\hbar}{\Delta x}$ **(5)**

Συνεπώς η μεταβολή ΔE στην ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι:

$$\Delta E = \frac{(\Delta p)^2}{2m} \overset{(5)}{=} \frac{\hbar^2}{2m(\Delta x)^2} \overset{\Delta x = 1/k}{\Rightarrow} \Delta E = \frac{\hbar^2}{2m}k^2 \overset{(4)}{=} \frac{\hbar^2}{2m}\frac{2m(V_o - E)}{\hbar^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta E = V_o - E$$

Δηλαδή η νέα ενέργεια του ηλεκτρονίου μετά την απορρόφηση του φωτονίου είναι:

$$E = E + \Delta E = E + V_o - E \Rightarrow E = V_o$$

Αυτό σημαίνει ότι η περιοχή ΙΙ παύει να είναι απαγορευμένη.

ΘΕΜΑ 21

Ιόν σε κρυσταλλικό πλέγμα έχει δυναμική ενέργεια $V(x) = m\omega^2 x^2/2$. Το ιόν περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση $\psi(x) = xe^{-x^2/2\alpha^2}$. Υπολογίστε την ολική ενέργεια Ε καθώς και τη σταθερά α.

Λύση

Η δοθείσα κυματοσυνάρτηση $\psi(x)$ επαληθεύει την εξίσωση Schrodinger:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar}(E - V)\psi = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

όπου ο υπολογισμός της δεύτερης παραγώγου έχει ως εξής:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = e^{-x^2/2\alpha^2} - \frac{x^2}{\alpha^2}e^{-x^2/2\alpha^2} \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial x} = \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right)e^{-x^2/2\alpha^2}$$

και
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\frac{x}{\alpha^2}\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right)e^{-x^2/2\alpha^2} - \frac{2x}{\alpha^2}e^{-x^2/2\alpha^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \left(-\frac{3x}{\alpha^2} + \frac{x^3}{\alpha^4}\right)e^{-x^2/2\alpha^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Αντικαθιστώντας την **(2)** στην **(1)** και απλοποιώντας το εμφανιζόμενο παντού $e^{-x^2/2\alpha^2}$ προκύπτει:

$$-\frac{3x}{\alpha^2} + \frac{x^3}{\alpha^4} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{3x}{\alpha^2} + \frac{x^3}{\alpha^4} + \frac{2mE}{\hbar^2}x - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{\alpha^4}-\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}\right)x^3+\left(\frac{2mE}{\hbar^2}-\frac{3}{\alpha^2}\right)x=0 \qquad \textbf{(3)}$$

Συνεπώς εξισώνοντας κάθε συντελεστή της **(3)** με το μηδέν λαμβάνεται:

$$\frac{1}{\alpha^4}-\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}=0\Rightarrow\frac{1}{\alpha^4}=\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}\Rightarrow\alpha^4=\frac{\hbar^2}{m^2\omega^2}\Rightarrow\alpha=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \qquad \textbf{(4)}$$

$$\text{και}\quad \frac{2mE}{\hbar^2}-\frac{3}{\alpha^2}=0\Rightarrow\frac{2mE}{\hbar^2}=\frac{3}{\alpha^2}\Rightarrow E=\frac{3\hbar^2}{2m\alpha^2}\overset{(4)}{\Rightarrow}E=\frac{3}{2}\hbar\omega$$