☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ
ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Θέμα 1

α) Προσδιορίστε τον όγκο V ιδανικού αερίου, στον οποίο η σχετική διακύμανση είναι $\alpha = 10^{-6}$ και η συγκέντρωση των σωματιδίων είναι $n = 2{,}7\cdot 10^{19}\ cm^{-3}$.
β) Προσδιορίστε επίσης το μέσο αριθμό των σωματιδίων σε αυτόν τον όγκο.

Η πιθανότητα ένα σωματίδιο να βρίσκεται στον V είναι: $p = \frac{V}{V_{TOT}}$

Ο μέσος αριθμός σωματιδίων στον όγκο αυτό αν το πλήθος των σωματιδίων είναι N_{TOT} θα είναι:

$$\langle m \rangle = N_{TOT} p = N_{TOT} \frac{V}{V_{TOT}} = nV$$

Η σχετική διακύμανση των σωματιδίων στον όγκο V θα είναι: $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\langle m \rangle}} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{nV}}$

Άρα $V = \frac{1}{n\alpha^2} = 3.7\cdot 10^{-8}\,cm^3$

Ενώ ο Μέσος αριθμός των σωματιδίων θα είναι $\langle m \rangle = nV = \frac{1}{\alpha^2} = 10^{12}$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Θέμα 2

Ξέρουμε την κατανομή Maxwell ως προς το μέτρο της ταχύτητας:

$$f(\upsilon)d\upsilon = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} 4\pi\upsilon^2 d\upsilon$$

i) Βρείτε σε πρώτη προσέγγιση το ποσοστό των σωματιδίων οι ενέργειες των οποίων δεν διαφέρουν περισσότερο από ΔΕ από την πιθανότερη ενέργεια E_Π ($\Delta E/E_\Pi$=0,01).

ii) Βρείτε σε πρώτη προσέγγιση το ποσοστό των μορίων, η ενέργεια των οποίων είναι μικρότερη από 0,01kT.

Η Ενέργεια ενός μορίου ιδανικού αέριου είναι ίση με την κινητική του ενέργεια, δηλαδή:

$E = \frac{m\upsilon^2}{2}$ Άρα: $\upsilon = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ και $\frac{d\upsilon}{dE} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2E}{m}}}\frac{2}{m} \Rightarrow d\upsilon = \frac{dE}{\sqrt{2Em}}$

Αντικαθιστώντας στην κατανομή Maxwell, έχουμε:

$$f(\upsilon)d\upsilon = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} 4\pi\upsilon^2 d\upsilon = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{E}{kT}} 4\pi \frac{2E}{m}\frac{dE}{\sqrt{2Em}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{E}{kT}} dE = f(E)dE$$

Άρα $f(E)dE = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{E}{kT}} dE$

Η πιθανότερη ενέργεια είναι αυτή που αντιστοιχεί στο μέγιστο της κατανομής, άρα: $\left.\frac{df(E)}{dE}\right|_{E=E_{\pi\iota\theta}} = 0 \Rightarrow E_{\pi\iota\theta} = \frac{kT}{2}$

i) Το ποσοστό των σωματιδίων οι ενέργειες των οποίων δεν διαφέρουν περισσότερο από ΔΕ από την πιθανότερη ενέργεια E_{Π} ($\Delta E/E_{\Pi}$=0,01).

$$\frac{\Delta N}{N}(0.99E_{\pi},1.01E_{\pi}) = \int_{0.99E_{\pi}}^{1.01E_{\pi}} f(E)dE \approx$$

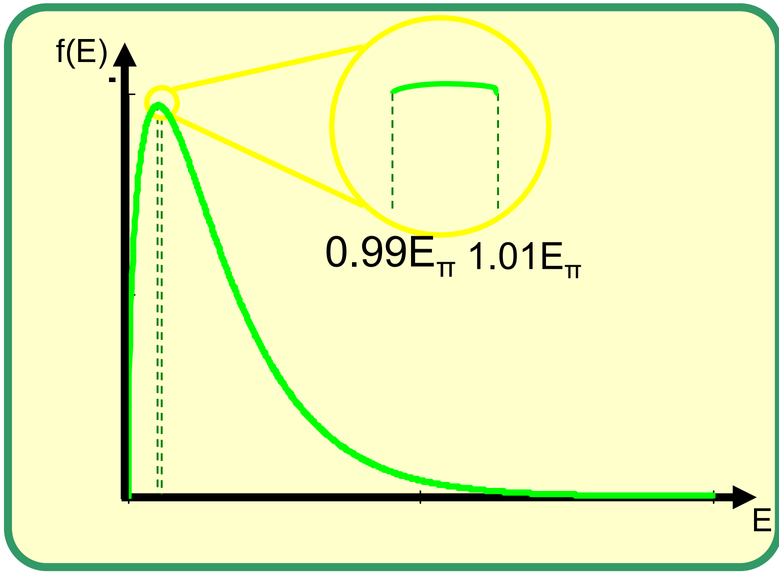
(προσέγγιση ορθογωνίου)

$$\approx f(E_{\pi})\Delta E_{\pi} = f(E_{\pi})\cdot 0.02E_{\pi} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}} E_{\pi}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{E_{\pi}}{kT}} 0.02E_{\pi} =$$

$$= 0.02\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}} E_{\pi}^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_{\pi}}{kT}} = 0.02\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{kT}{2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{kT}{2kT}} =$$

$$= \frac{0.02}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}} = 4.84\cdot 10^{-3}$$

$$\boxed{E_{\pi\iota\theta} = \frac{kT}{2}}$$



☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ii) το ποσοστό των μορίων, η ενέργεια των οποίων είναι μικρότερη από E_{max} = 0,01kT.

$$\frac{\Delta N}{N}\left(E \le 0.01kT\right) = \int_0^{E_{max}} f\left(E\right)dE \approx$$

(προσέγγιση σε ανάπτυγμα Taylor)

$$= \int_0^{E_{max}} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{E}{kT}} dE \approx$$

$$\frac{E_{max}}{kT} = \frac{0.01kT}{kT} = 0.01 \ll 1 \Rightarrow e^{-\frac{E}{kT}} \approx 1$$

$$\approx \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{E_{max}} E^{\frac{1}{2}} dE = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}} \left.\frac{E^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_0^{E_{max}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{E_{max}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}} \left(0.01kT\right)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\left(10^{-2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} 10^{-3} = 7.52 \cdot 10^{-4}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Θέμα 3

Στο ίδιο διάγραμμα σχεδιάστε ποιοτικά την κατανομή Maxwell για τα ιδανικά αέρια H_2 και He. Σχολιάστε και δικαιολογήστε το λόγο των μεγίστων και τη θέση τους. Εξετάστε 2 περιπτώσεις (δηλαδή 2 διαγράμματα):

i) Και τα 2 αέρια βρίσκονται στην ίδια θερμοκρασία,

ii) Το H_2 βρίσκεται σε θερμοκρασία T, ενώ το He σε θερμοκρασία 2T.

Η σχετική Μοριακή Μάζα του H_2 είναι: $M_{H_2} = 2$

Η σχετική Μοριακή Μάζα του He είναι: $M_{He} = 4$

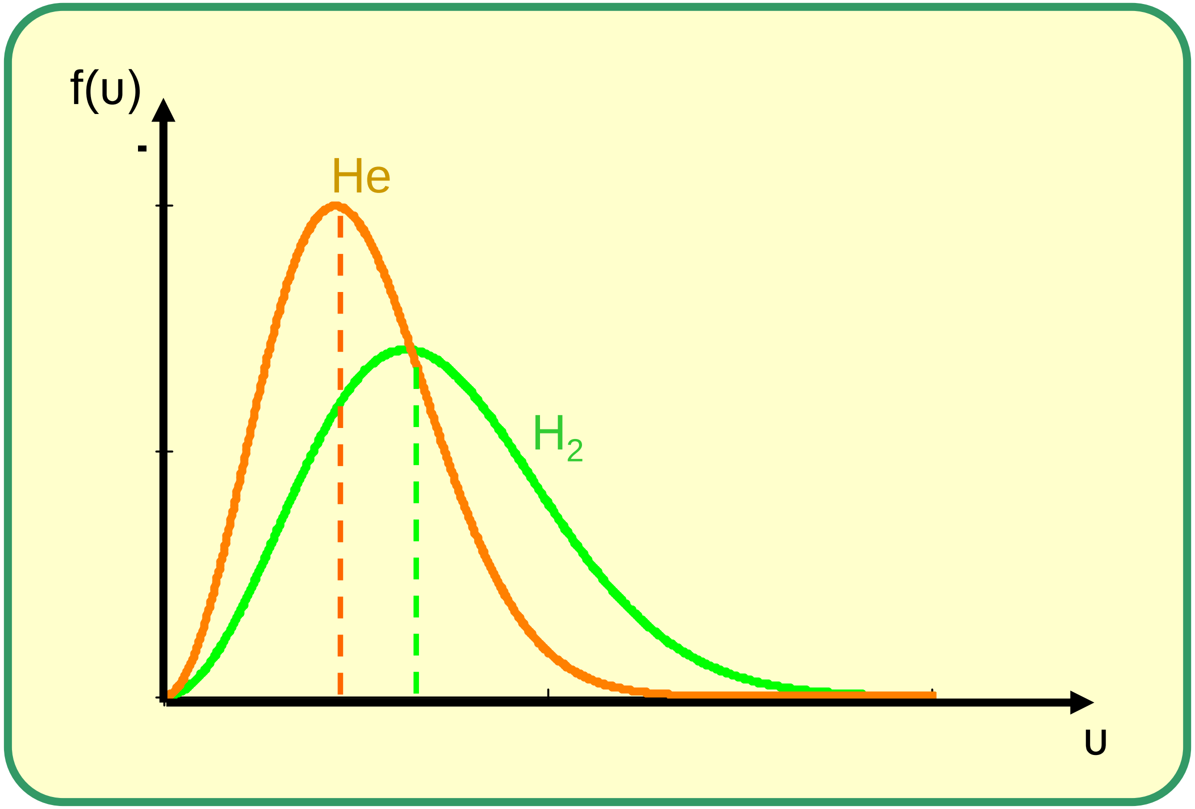
$$\left.\begin{matrix} M_{H_2} = 2 \\ M_{He} = 4 \end{matrix}\right\} \quad m_{H_2} = \frac{m_{He}}{2}$$

Η πιθανότερη ταχύτητα για την κατανομή Maxwell δίνεται από τη σχέση: $\upsilon_\pi = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$

Και όπως βλέπομε εξαρτάται από την θερμοκρασία και την μάζα του μορίου του αερίου

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

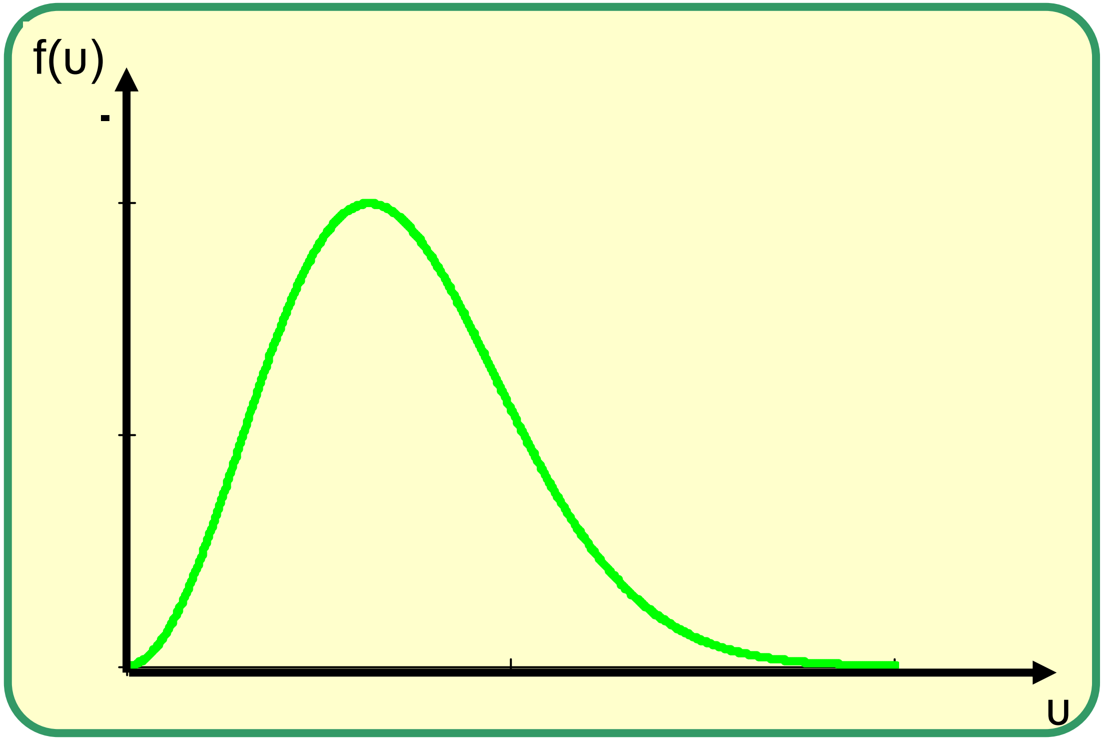
i) τα δύο αέρια βρίσκονται στην ίδια θερμοκρασία



$$\frac{\upsilon_\pi^{(H_2)}}{\upsilon_\pi^{(He)}} = \frac{\sqrt{\frac{2kT}{m_{H_2}}}}{\sqrt{\frac{2kT}{m_{He}}}} = \sqrt{\frac{m_{He}}{m_{H_2}}} = \sqrt{2}$$

Η πυκνότητα πιθανότητας της κατανομής Maxwell δείχνει πως τα μόρια του αερίου με το μικρότερο μοριακό βάρος που (στην άσκηση είναι το H_2) έχουν μεγαλύτερες ταχύτητες επομένως η καμπύλη μετατοπίζεται προς τα δεξιά και γίνεται πιο αμβλεία.

ii) Το H_2 βρίσκεται σε θερμοκρασία Τ, ενώ το He σε θερμοκρασία 2Τ.



$$\frac{\upsilon_{\pi}^{(H_2)}}{\upsilon_{\pi}^{(He)}}=\frac{\sqrt{\frac{2kT}{m_{H_2}}}}{\sqrt{\frac{2k2T}{m_{He}}}}=\sqrt{\frac{m_{He}}{2m_{H_2}}}=1$$

Σε αυτήν την περίπτωση, εφόσον οι πιθανότερες ταχύτητες που προκύπτουν είναι ίδιες, οι κατανομές θα ταυτίζονται.

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Θέμα 4

β) Ένα ιδανικό αέριο, κάθε μόριο του οποίου έχει μάζα m, βρίσκεται σε θερμοκρασία T. Υπολογίστε τα αθροίσματα $\sum_{i=1}^{N_A} \upsilon_{yi}$ και $\sum_{i=1}^{N_A} |\upsilon_{yi}|$ όπου υ_{yi} η y συνιστώσα της ταχύτητας ενός μορίου και N_A ο αριθμός Avogadro.

$$\sum_{i=1}^{N_A} \upsilon_{yi} = N_A \frac{\sum_{i=1}^{N_A} \upsilon_{yi}}{N_A} = N_A \langle \upsilon_y \rangle \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{N_A} |\upsilon_{yi}| = N_A \frac{\sum_{i=1}^{N_A} |\upsilon_{yi}|}{N_A} = N_A \langle |\upsilon_y| \rangle \quad (2)$$

Η κατανομή Maxwell είναι: $f(\upsilon)d\upsilon = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} 4\pi\upsilon^2 d\upsilon$

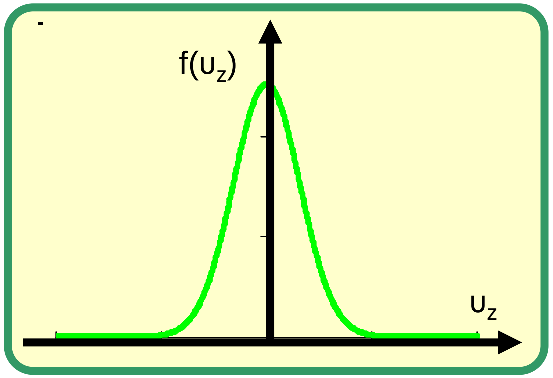
Αυτή είναι γραμμένη σε σφαιρικές συντεταγμένες.
Αν θέλουμε όμως να την γράψουμε σε καρτεσιανές συντεταγμένες θα έχουμε:

$$4\pi\upsilon^2 d\upsilon = d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z \qquad \upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_z^2 + \upsilon_y^2$$

Συνεπώς σε καρτεσιανές συντεταγμένες μπορεί να γραφεί:

$$f(\upsilon)d\upsilon = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\left(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2\right)}{2kT}} d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}} d\upsilon_x}_{f(\upsilon_x)d\upsilon_x} \underbrace{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\upsilon_y^2}{2kT}} d\upsilon_y}_{f(\upsilon_y)d\upsilon_y} \underbrace{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\upsilon_z^2}{2kT}} d\upsilon_z}_{f(\upsilon_z)d\upsilon_z}$$



Άρα η κατανομή Maxwell για την συνιστώσα της ταχύτητας υ_y είναι:

$$f(\upsilon_y)d\upsilon_y = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\upsilon_y^2}{2kT}} d\upsilon_y$$

Από την μορφή και μόνο της κατανομής ταχυτήτων, παρατηρούμε ότι η μέση ταχύτητα στον άξονα y είναι μηδέν.

Διαφορετικά:
$$\langle \upsilon_y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \upsilon_y f(\upsilon_y) d\upsilon_y = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\underbrace{\upsilon_y}_{\Pi} \underbrace{e^{-\frac{m\upsilon_y^2}{2kT}}}_{A}}_{\Pi} d\upsilon_y = 0$$

Άρα
$$\sum_{i=1}^{N_A} \upsilon_{yi} = N_A \langle \upsilon_y \rangle = 0$$

Ενώ
$$\langle |\upsilon_y| \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |\upsilon_y| f(\upsilon_y) d\upsilon_y = -\int_{-\infty}^{0} \upsilon_y f(\upsilon_y) d\upsilon_y + \int_{0}^{+\infty} \upsilon_y f(\upsilon_y) d\upsilon_y = 2\int_{0}^{+\infty} \upsilon_y f(\upsilon_y) d\upsilon_y =$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \int_{0}^{+\infty} \upsilon_y e^{-\frac{m\upsilon_y^2}{2kT}} d\upsilon_y = 2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \frac{1}{2\left(\sqrt{\frac{m}{2kT}}\right)^2} \Gamma(1) =$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \frac{1}{\left(\frac{m}{2kT}\right)} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{-1} = \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-(rx)^m} dx = \frac{1}{mr^{n+1}} \Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right)$$

$$n = 1, m = 2, r = \sqrt{\frac{m}{2kT}}$$

Άρα
$$\sum_{i=1}^{N_A} |\upsilon_{yi}| = N_A \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Θέμα 5

Έχουμε σύστημα σωματιδίων, το καθένα από τα οποία έχει μάζα m. Για το σύστημα αυτό σε μια συγκεκριμένη κατάσταση η συνάρτηση κατανομής ως προς τα μέτρα των ταχυτήτων δίνεται από το σχήμα. Γι' αυτό το σύστημα σωματιδίων βρείτε:

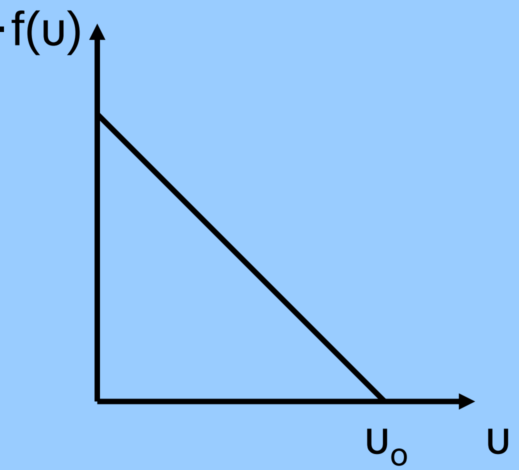
α) την αναλυτική μορφή της συνάρτησης κατανομής ως προς τα μέτρα των ταχυτήτων,

β) τη μέση ταχύτητα,

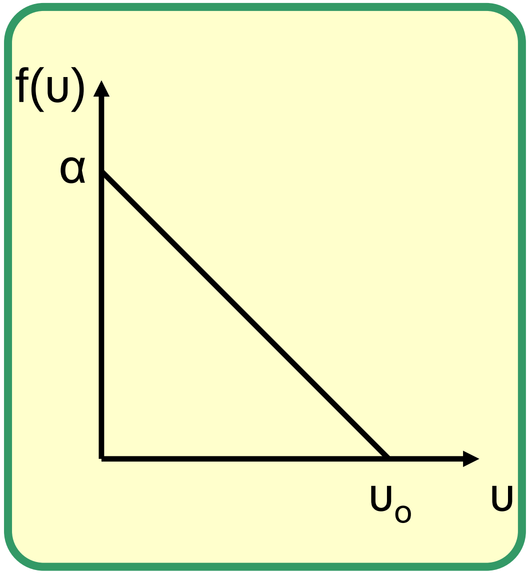
γ) την πιθανότερη ταχύτητα,

δ) το ποσοστό των σωματιδίων οι ταχύτητες των οποίων βρίσκονται στην περιοχή $υ_o/2 \le υ \le 3υ_o/4$,

ε) τη μέση ενέργεια των σωματιδίων οι ταχύτητες των οποίων βρίσκονται στην περιοχή $υ_o/2 \le υ \le 3υ_o/4$.



α)



Η κατανομή θα είναι της μορφής f(υ) = α + bυ, για υ∈[0,υ$_o$], ενώ η μηδενική για όλες τις άλλες ταχύτητες.

Όμως, $f(\upsilon_o)=0 \Rightarrow b=-\dfrac{\alpha}{\upsilon_o}$ άρα

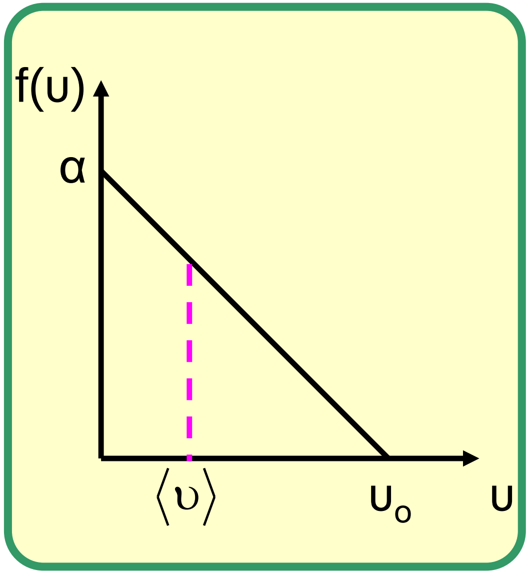
$$f(\upsilon)=\alpha\left(1-\frac{\upsilon}{\upsilon_o}\right)$$

Το ολοκλήρωμα της πιθανότητας σε όλες τις ταχύτητες θα πρέπει να ισούται με την μονάδα (κανονικοποίηση), η με άλλα λόγια θα πρέπει το εμβαδόν του τριγώνου να είναι μοναδιαίο.

$\dfrac{\alpha\upsilon_o}{2}=1 \Rightarrow \alpha=\dfrac{2}{\upsilon_o}$ και τελικά η κατανομή θα γράφεται: $f(\upsilon)=\dfrac{2}{\upsilon_o}-\dfrac{2}{\upsilon_o^2}\upsilon$

Συγκεκριμένα $f(\upsilon)=\begin{cases}\dfrac{2}{\upsilon_o}-\dfrac{2}{\upsilon_o^2}\upsilon & 0\le\upsilon\le\upsilon_o\\ 0 & \upsilon>\upsilon_o\end{cases}$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com



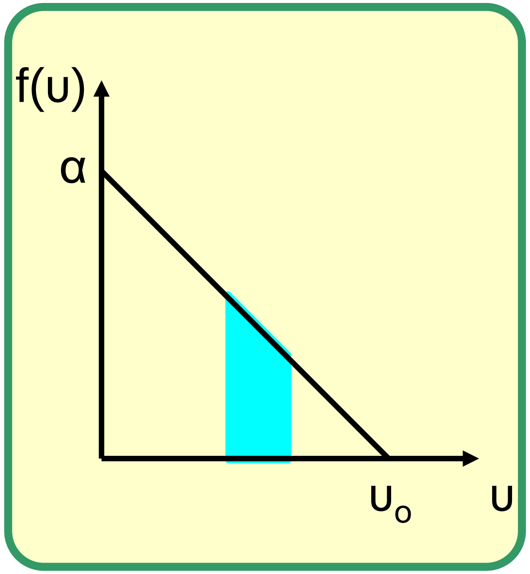
β) Η μέση τιμή της ταχύτητας θα είναι:

$$\langle \upsilon \rangle = \int_0^{+\infty} \upsilon f(\upsilon) d\upsilon = \int_0^{\upsilon_o} \upsilon \left(\frac{2}{\upsilon_o} - \frac{2}{\upsilon_o^2}\upsilon \right) d\upsilon =$$

$$= \frac{2}{\upsilon_o}\int_0^{\upsilon_o} \upsilon d\upsilon - \frac{2}{\upsilon_o^2}\int_0^{\upsilon_o} \upsilon^2 d\upsilon = \frac{2}{\upsilon_o}\frac{\upsilon_o^2}{2} - \frac{2}{\upsilon_o^2}\frac{\upsilon_o^3}{3} = \frac{\upsilon_o}{3}$$

γ) Η πιθανότερη ταχύτητα είναι αυτή όπου η κατανομή έχει μέγιστο και συνεπώς για την συγκεκριμένη κατανομή η πιθανότερη ταχύτητα είναι μηδενική

$$\upsilon_\pi = 0$$



δ) Το ποσοστό των σωματιδίων οι ταχύτητες των οποίων βρίσκονται στην περιοχή υο/2 ≤ υ ≤ 3υο/4 είναι

$$\frac{\Delta N}{N}\left(\frac{\upsilon_o}{2}, \frac{3\upsilon_o}{4}\right) = \int_{\upsilon_o/2}^{3\upsilon_o/4} f(\upsilon) d\upsilon = \int_{\upsilon_o/2}^{3\upsilon_o/4} \left(\frac{2}{\upsilon_o} - \frac{2}{\upsilon_o^2}\upsilon \right) d\upsilon =$$

$$\left. \frac{2}{\upsilon_o}\upsilon - \frac{2}{\upsilon_o^2}\upsilon^2 \right|_{\upsilon_o/2}^{3\upsilon_o/4} = \frac{3}{16}$$

ε) Την μέση ενέργεια μπορούμε να την υπολογίσουμε με δύο τρόπους.

Ο πρώτος τρόπος είναι να βρούμε την κατανομή της ενέργειας και από εκεί να βρούμε την μέση ενέργεια.

Ο δεύτερος τρόπος είναι ο εξής: $\left\langle E \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} m\upsilon^2 \right\rangle = \frac{1}{2} m \left\langle \upsilon^2 \right\rangle$

Άρα υπολογίζουμε την μέση τιμή του τετραγώνου της ταχύτητας:

$$\left\langle \upsilon^2 \right\rangle = \int_0^{+\infty} \upsilon^2 f(\upsilon) d\upsilon = \int_{\upsilon_o/2}^{3\upsilon_o/4} \upsilon^2 \left(\frac{2}{\upsilon_o} - \frac{2}{\upsilon_o^2}\upsilon \right) d\upsilon = \frac{2}{\upsilon_o} \int_{\upsilon_o/2}^{3\upsilon_o/4} \upsilon^2 d\upsilon - \frac{2}{\upsilon_o^2} \int_{\upsilon_o/2}^{3\upsilon_o/4} \upsilon^3 d\upsilon$$

$$= \frac{2}{\upsilon_o} \frac{\upsilon^3}{3} \Bigg|_{\upsilon_o/2}^{3\upsilon_o/4} - \frac{2}{\upsilon_o^2} \frac{\upsilon^4}{4} \Bigg|_{\upsilon_o/2}^{3\upsilon_o/4} = \frac{13}{1536} \upsilon_o^2$$

Άρα η μέση ενέργεια των σωματιδίων οι ταχύτητες των οποίων βρίσκονται στην περιοχή $\upsilon_o/2 \le \upsilon \le 3\upsilon_o/4$ είναι

$$\left\langle E \right\rangle = \frac{13}{1536} \frac{1}{2} m\upsilon_o^2$$

Θέμα 6

Για κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις να σχεδιάσετε ποιοτικά στο ίδιο διάγραμμα τις κατανομές Maxwell για δυο ιδανικά αέρια αιτιολογώντας τες (v_1 και v_2 ο αριθμός των γραμμομορίων των αερίων, m_1 και m_2 η μάζα κάθε μορίου τους και T_1 και T_2 οι θερμοκρασίες τους):

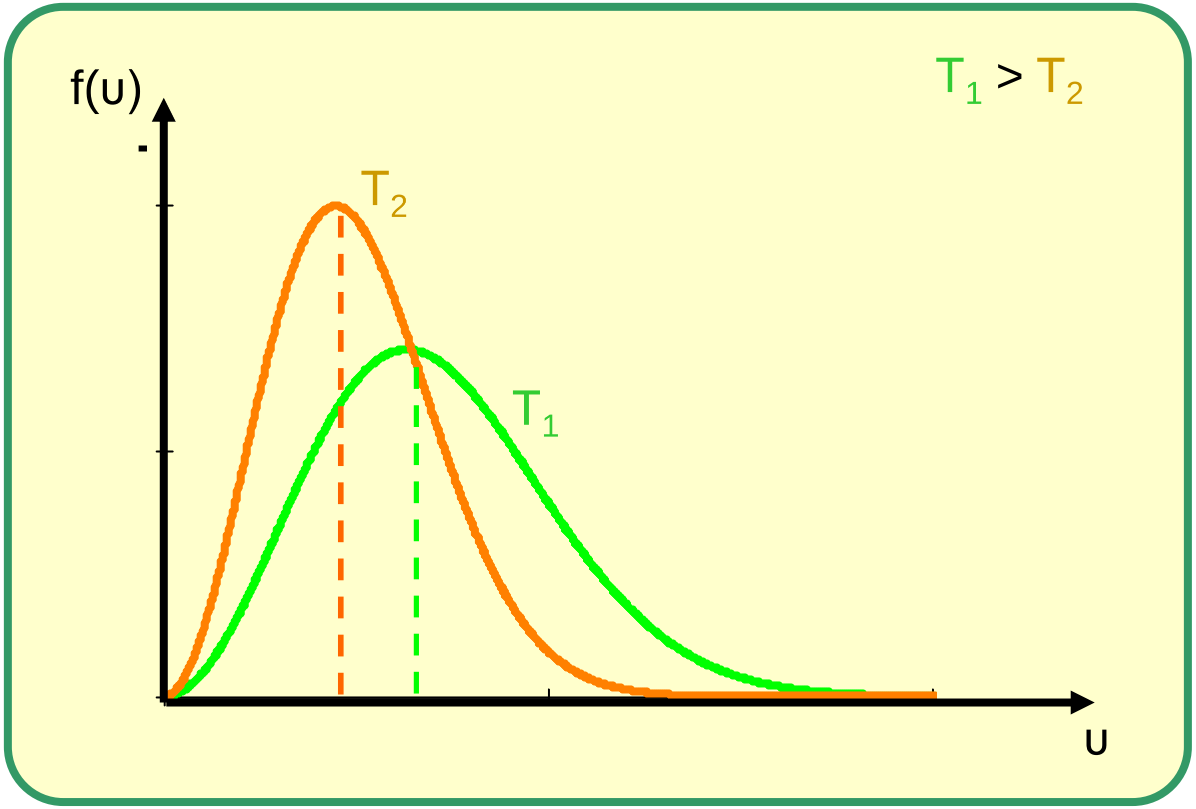
i) Ισχύει $v_1 = v_2$, $m_1 = m_2$, $T_1 > T_2$.

ii) Ισχύει $v_1 = v_2$, $m_1 > m_2$, $T_1 = T_2$.

iii) Ισχύει $v_1 > v_2$, $m_1 = m_2$, $T_1 = T_2$.

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

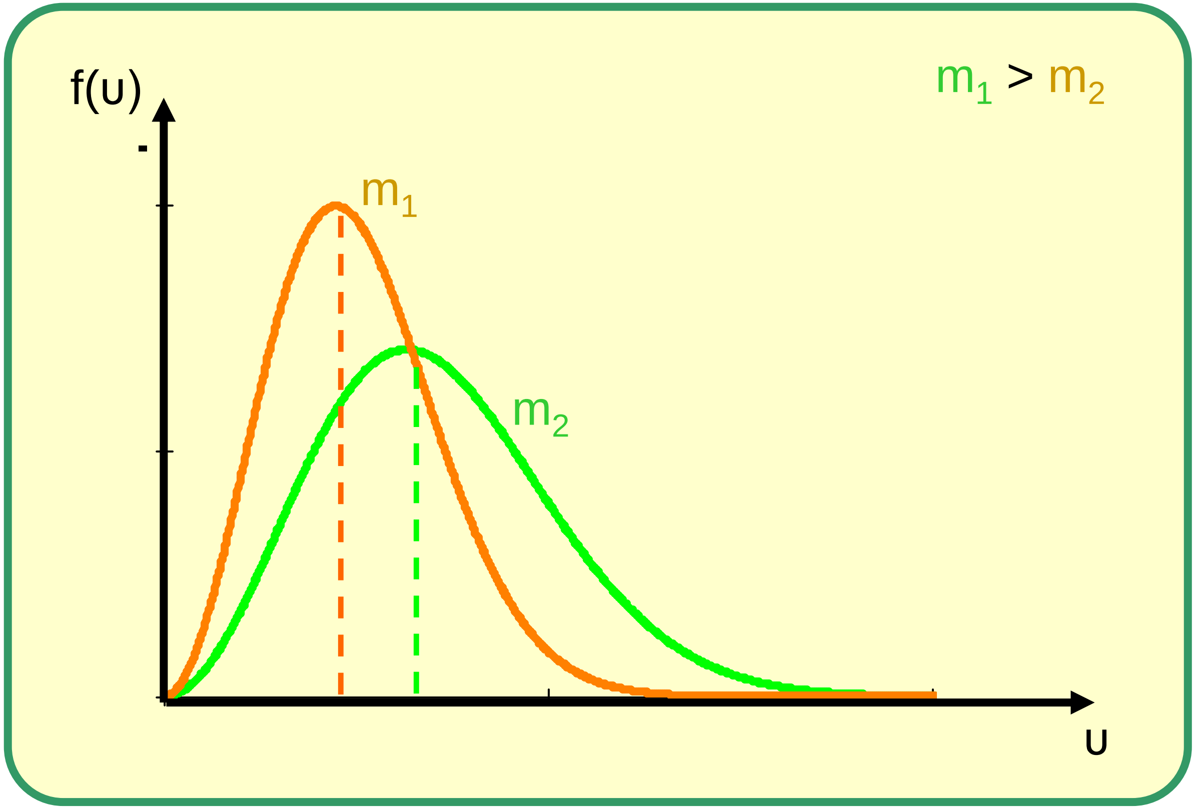
i) $v_1 = v_2$, $m_1 = m_2$, $T_1 > T_2$.



Όταν η θερμοκρασία του αερίου αυξάνεται, η καμπύλη μετατοπίζεται προς τα δεξιά και η κορυφή της χαμηλώνει.
Αυτό συμβαίνει γιατί όσο αυξάνει η θερμοκρασία η ενεργός ταχύτητα αυξάνεται, ενώ η πυκνότητα πιθανότητας ελαττώνεται.
Τέλος ο αριθμός των μορίων στη νέα πιθανότερη ταχύτητα είναι μικρότερος στην υψηλότερη θερμοκρασία.

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ii) $v_1 = v_2$, $m_1 > m_2$, $T_1 = T_2$.



Η πυκνότητα πιθανότητας της κατανομής Maxwell δείχνει πως τα μόρια του αερίου με το μικρότερο μοριακό βάρος έχουν μεγαλύτερες ταχύτητες επομένως η καμπύλη μετατοπίζεται προς τα δεξιά και γίνεται πιο αμβλεία.

iii) $v_1 > v_2$, $m_1 = m_2$, $T_1 = T_2$.

Σε αυτήν την περίπτωση οι κατανομές είναι οι ίδιες διότι δεν εξαρτάται από των αριθμό των γραμμομορίων.

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Θέμα 7

Σε πολύ ψηλό κατακόρυφο κυλινδρικό δοχείο διατομής S περιέχεται ένα γραμμομόριο ιδανικού αερίου, κάθε μόριο του οποίου έχει μάζα m. Θεωρούμε το g και τη θερμοκρασία σταθερά σ' όλο το ύψος του δοχείου. Ξέρουμε ότι για δυο θερμοκρασίες T και T΄ = 4T η συγκέντρωση των μορίων σε ύψος z_o είναι ίδια.

α) Σχεδιάστε ποιοτικά τις καμπύλες n(z) και p(z) για τις δυο θερμοκρασίες δείχνοντας το z_o,

β) υπολογίστε το T,

γ) βρείτε τη συγκέντρωση στη βάση του δοχείου για θερμοκρασία 2T.

δ) υπολογίστε το λόγο P_{4T}/P_T σε τυχαίο ύψος z.

Από την σχέση του Boltzmann έχουμε: $n(z) = n_o e^{-\frac{mgz}{kT}}$

επειδή $n = \dfrac{dN}{dV} \overset{dV=Sdz}{=} \dfrac{dN}{Sdz} \Rightarrow dN = nSdz$

Η πυκνότητα πιθανότητας είναι: $dP = \dfrac{dN}{N} = \dfrac{nsdz}{N} = \dfrac{n_o s}{N} e^{-\frac{mgz}{kT}} dz$

Από την συνθήκη κανονικοποιήσης έχουμε: $\int dP = 1 \Rightarrow \dfrac{n_o S}{N} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{mgz}{kT}} dz = 1 \Rightarrow$

$$-\frac{n_o S}{N}\frac{kT}{mg}\left[e^{-\frac{mgz}{kT}}\right]_0^{+\infty}=1 \Rightarrow \frac{n_o SkT}{Nmg}=1 \Rightarrow \boxed{n_o=\frac{Nmg}{SkT}}$$

Επειδή έχουμε ένα γραμμομόριο ν = 1 mole ο αριθμός σωματιδίων θα είναι $N = N_A$

α) Για θερμοκρασία T έχουμε:

$$n(z)=n_o e^{-\frac{mgz}{kT}} \quad (1)$$

Για θερμοκρασία T έχουμε:

$$n'(z)=n'_o e^{-\frac{mgz}{4kT}} \quad (2)$$

Επειδή για τις δυο θερμοκρασίες T και T΄ = 4T η συγκέντρωση των μορίων σε ύψος z_o είναι ίδια θα έχουμε:

$$n(z_o)=n'(z_o) \Rightarrow n_o e^{-\frac{mgz_o}{kT}}=n'_o e^{-\frac{mgz_o}{4kT}} \Rightarrow n'_o=n_o e^{-\frac{mgz_o}{4kT}} e^{\frac{mgz_o}{kT}} \Rightarrow$$

$$n'_o=n_o e^{-\frac{3mgz_o}{4kT}} \quad (3)$$

Άρα από την (3) η (1) και (2) γίνονται

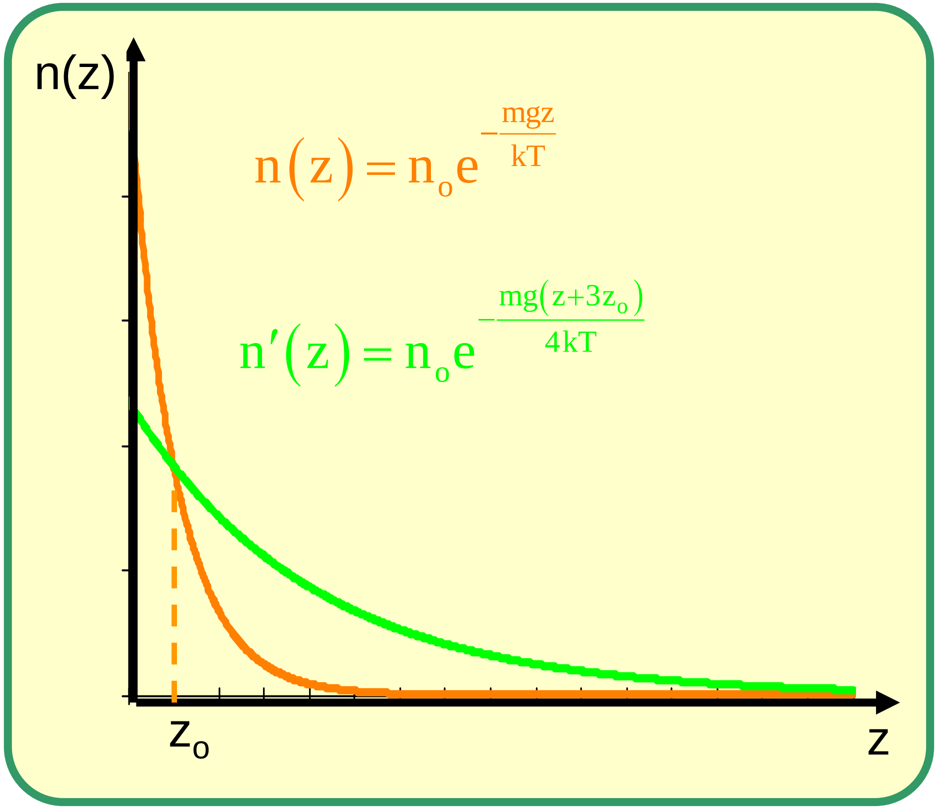
$$n(z)=n_o e^{-\frac{mgz}{kT}} \quad (1^*)$$

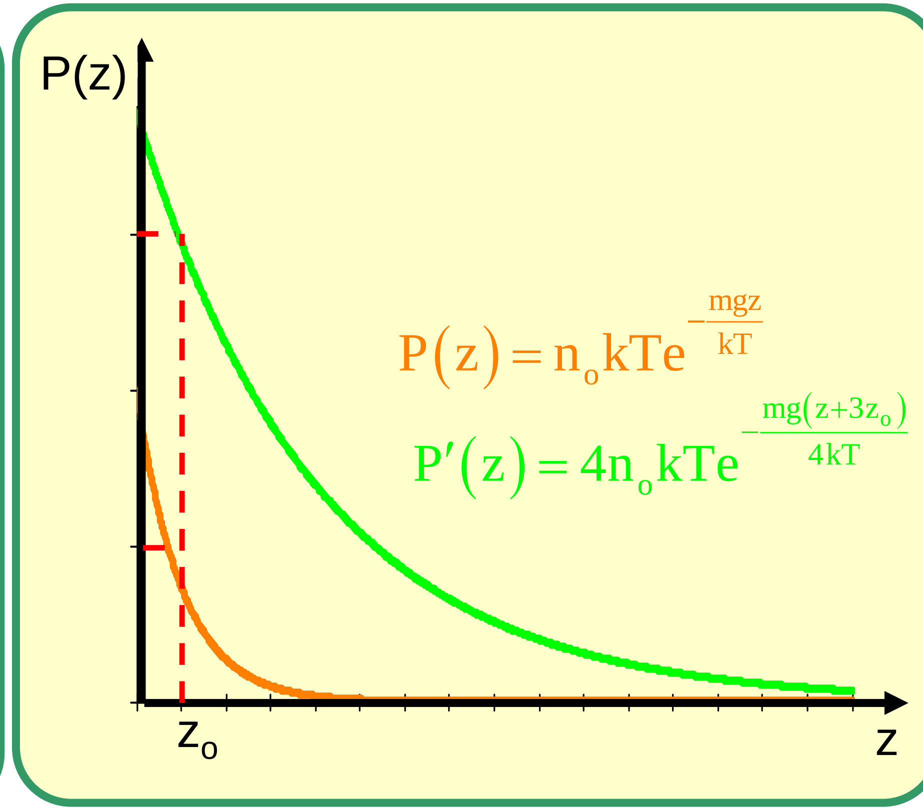
$$n'(z)=n_o e^{-\frac{mg(z+3z_o)}{4kT}} \quad (2^*)$$

Από την καταστατική εξίσωση του ιδανικού αερίου έχουμε: $PV=NkT \Rightarrow P=nkT$

$$P(z)=n_o kTe^{-\frac{mgz}{kT}} \quad (3)$$

$$P'(z)=4n_o kTe^{-\frac{mg(z+3z_o)}{4kT}} \quad (4)$$





β) Επειδή: $n_o = \dfrac{N_A mg}{SkT}$ και $n'_o = \dfrac{N_A mg}{4SkT} = \dfrac{n_o}{4}$, $n'_o = n_o e^{-\frac{3mgz_o}{4kT}}$

$$\Rightarrow n_o e^{-\frac{3mgz_o}{4kT}} = \frac{n_o}{4} \Rightarrow -\frac{3mgz_o}{4kT} = \ln\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$T = \frac{3mgz_o}{4k\ln 4}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

γ) στην βάση του δοχείου n(z = 0) = n_o όπου για θερμοκρασία 2T θα έχουμε:

$$n_o = \frac{N_A mg}{2SkT}$$

δ) Εφόσον δείξαμε ότι $n_o' = \frac{n_o}{4}$ και ισχύει $P = nkT$ μπορούμε να γράψουμε

$$P(z) = n_o kTe^{-\frac{mgz}{kT}}$$

$$P'(z) = \frac{n_o}{4} 4kTe^{-\frac{mgz}{4kT}}$$

$$P'(z) = n_o kTe^{-\frac{mgz}{4kT}}$$

Έτσι $\frac{P_{4T}}{P_T} = \frac{P'}{P} = \frac{n_o kTe^{-\frac{mgz}{4kT}}}{n_o kTe^{-\frac{mgz}{kT}}} = e^{\frac{3}{4}\frac{mgz}{kT}}$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Θέμα 8

Δίνεται η γενική μορφή της κατανομής Boltzmann: $n = n_o exp(-\Delta U/kT)$
α) να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(z) (z είναι το ύψος) για σωματίδια με μάζα m στο πεδίο βαρύτητας της γης, όπου θεωρούμε ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας g και η θερμοκρασία T είναι σταθερές (δηλ. ανεξάρτητες του ύψους)
β) να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(U) όπου U είναι η δυναμική ενέργεια.

α) Αν θεωρήσουμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας την επιφάνεια της θάλασσας z = 0 τότε η σχέση Boltzmann μπορεί να γραφεί:

$$n(z) = n_o e^{-\frac{mgz}{kT}}$$

Θεωρώντας κύλινδρο πολύ μεγάλου ύψους και εμβαδού διατομής S και επειδή:

$$n = \frac{dN}{dV} \overset{dV=Sdz}{=} \frac{dN}{Sdz} \Rightarrow dN = nSdz$$

Η πυκνότητα πιθανότητας είναι: $dP = \frac{dN}{N} = \frac{nsdz}{N} = \frac{n_o s}{N} e^{-\frac{mgz}{kT}} dz$

Από την συνθήκη κανονικοποιήσης έχουμε: $\int dP = 1 \Rightarrow \frac{n_o S}{N} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{mgz}{kT}} dz = 1 \Rightarrow$

$$-\frac{n_o S}{N}\left[e^{-\frac{mgz}{kT}}\right]_0^{+\infty} = 1 \Rightarrow \frac{n_o S}{Nmg} = 1 \Rightarrow n_o = \frac{Nmg}{SkT}$$

Άρα, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(z) θα δίνεται από την κατανομή:

$$f(z)dz = \frac{n_o s}{N} e^{-\frac{mgz}{kT}} dz = \frac{mg}{kT} e^{-\frac{mgz}{kT}} dz$$

Δηλαδή:

$$f(z) = \frac{mg}{kT} e^{-\frac{mgz}{kT}}$$

β) Επειδή U = mgz $\Rightarrow \frac{dU}{dz} = mg \Rightarrow dz = \frac{dU}{mg}$ άρα,

$$f(z)dz = \frac{mg}{kT} e^{-\frac{mgz}{kT}} dz = \frac{mg}{kT} e^{-\frac{U}{kT}} \frac{dU}{mg} = \frac{1}{kT} e^{-\frac{U}{kT}} dU$$

Επομένως, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(U) είναι:

$$f(U) = \frac{1}{kT} e^{-\frac{U}{kT}}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Θέμα 9

Σε σφαιρικό δοχείο ακτίνας R σε θερμοκρασία T περιέχονται ν γραμμομόρια ιδανικού αερίου που αποτελείται από «σκληρά» διατομικά μόρια, το καθένα από τα οποία έχει μάζα m.

α) Υπολογίστε τη σχετική διακύμανση του αριθμού των μορίων που συγκρούονται με τη μονάδα της επιφάνειας των τοιχωμάτων στη μονάδα του χρόνου.

β) Υπολογίστε τη σχετική διακύμανση του αριθμού των μορίων που συγκρούονται σε χρόνο Δt με ολόκληρη την επιφάνεια του δοχείου.

γ) Υπολογίστε τη συχνότητα κρούσεων κάθε μορίου με τα τοιχώματα του δοχείου.

δ) Αν ο όγκος του δοχείου μειωθεί αδιαβατικά, έτσι, ώστε η ακτίνα του να γίνει R/2, πόσες φορές θα μεταβληθεί η συχνότητα κρούσεων κάθε μορίου;

Η **συχνότητα κρούσεων** με τα τοιχώματα του δοχείο είναι ο αριθμός των μορίων που συγκρούονται στη μονάδα του χρόνου και στη μονάδα της επιφάνειας δηλαδή:

$$\frac{dN}{Sdt}=\frac{1}{4}n\underset{\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}}{\langle\upsilon\rangle}=\left\langle\frac{dN}{Sdt}\right\rangle$$

α) Η σχετική διακύμανση του αριθμού των μορίων που συγκρούονται με τη μονάδα της επιφάνειας των τοιχωμάτων στη μονάδα του χρόνου.

$$\sigma=\frac{1}{\sqrt{\left\langle\frac{dN}{Sdt}\right\rangle}}=\left(\left\langle\frac{dN}{Sdt}\right\rangle\right)^{-1/2}=\left(\frac{1}{4}n\langle\upsilon\rangle\right)^{-1/2}\overset{\langle\upsilon\rangle=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}}{=}\left(\frac{1}{4}n\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}\right)^{-1/2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\nu=\dfrac{N}{N_A}\Rightarrow N=\nu N_A\\[2ex] V=\dfrac{4}{3}\pi R^3\end{array}\right\}\quad n=\frac{N}{V}=\frac{\nu N_A}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3\nu N_A}{4\pi R^3}$$

άρα $\sigma=\left(\dfrac{3\nu N_A}{8\pi R^3}\sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m}}\right)^{-1/2}$

β) $$\frac{dN}{Sdt}=\frac{1}{4}n\left\langle\upsilon\right\rangle \Rightarrow dN=\frac{1}{4}n\left\langle\upsilon\right\rangle Sdt \Rightarrow \Delta N=\frac{1}{4}n\left\langle\upsilon\right\rangle S\Delta t$$

Όπου μπορούμε να γράψουμε: $\left\langle\Delta N\right\rangle=\frac{1}{4}n\left\langle\upsilon\right\rangle S\Delta t$

Η σχετική διακύμανση του αριθμού των μορίων που συγκρούονται σε χρόνο Δt με ολόκληρη την επιφάνεια του δοχείου είναι:

$$\sigma=\frac{1}{\sqrt{\left\langle\Delta N\right\rangle}}=\left\langle\Delta N\right\rangle^{-1/2}=\left(\frac{1}{4}nS\left\langle\upsilon\right\rangle\Delta t\right)^{-1/2}\underset{\substack{S=4\pi R^2\\ n=\frac{3\nu N_A}{4\pi R^3}}}{\overset{\left\langle\upsilon\right\rangle=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}}{=}}\left(\frac{3\nu N_A}{4R}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}\right)^{-1/2}$$

γ) Η συχνότητα κρούσεων κάθε μορίου με τα τοιχώματα του δοχείου.

$$f_1=\frac{\frac{dN}{Sdt}}{N}=\frac{1}{4}\frac{n}{N}\left\langle\upsilon\right\rangle=\frac{1}{4}\frac{1}{V}\left\langle\upsilon\right\rangle=\frac{3}{8\pi R^3}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

δ) Αν η ακτίνα του δοχείου γίνει R/2 η συχνότητα κρούσεων κάθε μορίου θα είναι:

$$f_1'=\frac{3}{8\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}=8\frac{3}{8\pi R^3}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}=8f_1$$