ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΟΠΤΙΚΗΣ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

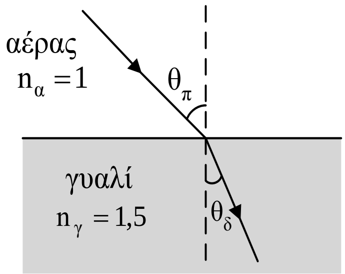
ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 1

Μια λεπτή δέσμη φωτός στον αέρα προσπίπτει στην επιφάνεια ενός γυάλινου πλακιδίου δείκτη διάθλασης 1,50. Πόση είναι η γωνία πρόσπτωσης θ_π στο πλακίδιο, για την οποία η γωνία διάθλασης έχει τιμή $\theta_\pi/2$;

(Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Κατά τη διάθλαση της ακτίνας φωτός στη διαχωριστική επιφάνεια του αέρα και του γυάλινου πλακιδίου ισχύει ο νόμος του Snell, ο οποίος δίνει:

$$n_\alpha \sin\theta_\pi = n_\gamma \sin\theta_\delta \Rightarrow 1\sin\theta_\pi = 1{,}5\sin\frac{\theta_\pi}{2}$$

Με τη βοήθεια της τριγωνομετρικής ταυτότητας :

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$ η παραπάνω δίνει :

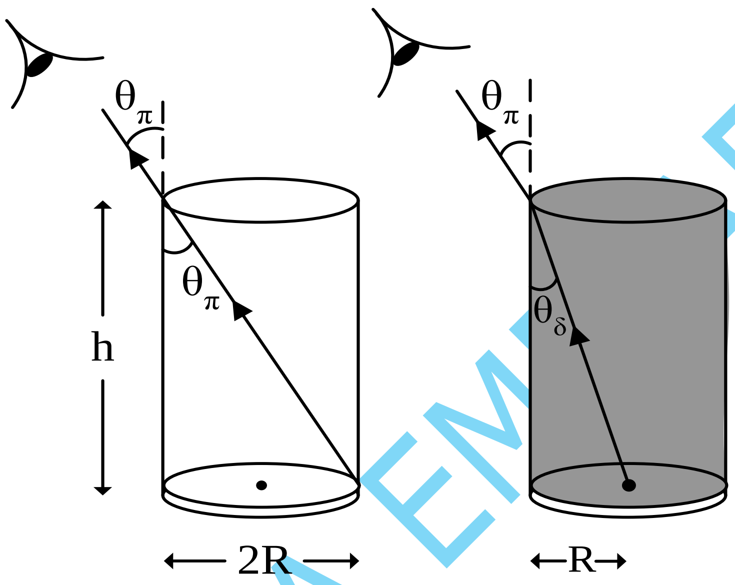
$$2\sin\frac{\theta_\pi}{2}\cos\frac{\theta_\pi}{2} = 1{,}5\sin\frac{\theta_\pi}{2} \Rightarrow 2\cos\frac{\theta_\pi}{2} = 1{,}5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\theta_\pi}{2} = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75 \Rightarrow \frac{\theta_\pi}{2} = \cos^{-1} 0{,}75 = 41{,}4^o \Rightarrow \theta_\pi = 82{,}8^o$$

ΘΕΜΑ 2

Παρατηρητής βρίσκεται στην ευθεία γραμμή που ενώνει το χείλος ενός ποτηριού με το κάτω μέρος της απέναντι πλευράς. Το ποτήρι έχει ύψος h και ακτίνα βάσης R. Εάν γεμίσουμε το ποτήρι με ένα υγρό με δείκτη διάθλασης n τότε ο παρατηρητής βλέπει το κέντρο της βάσης του ποτηριού. Να βρεθεί ο δείκτης διάθλασης του υγρού.
(Τμήμα Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π. ,
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Σύμφωνα με το νόμο του Snell ισχύει:

$$n_{αέρα}\sin\theta_{\pi} = n\sin\theta_{\delta} \Rightarrow 1\sin\theta_{\pi} = n\sin\theta_{\delta} \Rightarrow n = \frac{\sin\theta_{\pi}}{\sin\theta_{\delta}} \quad \textbf{(1)}$$

Από τα σχήματα εύκολα βρίσκεται ότι:

$$\sin\theta_{\pi} = \frac{2R}{\sqrt{h^2+4R^2}} \quad \text{και} \quad \sin\theta_{\delta} = \frac{R}{\sqrt{h^2+R^2}}$$

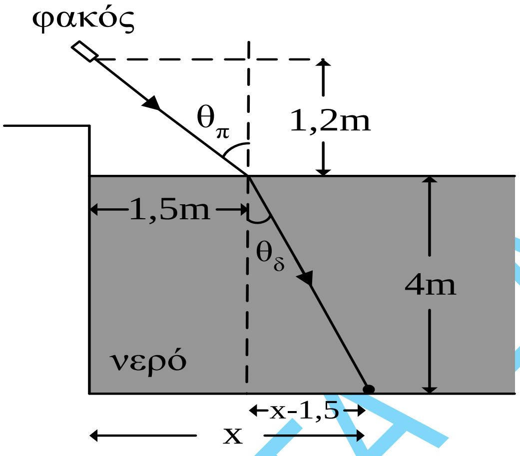
όπου οι υποτείνουσες των ορθογωνίων τριγώνων που σχηματίζει η διαθλώμενη ακτίνα προσδιορίζονται μέσω του πυθαγορείου θεωρήματος.

Άρα τελικά η **(1)** δίνει : $$n = \frac{\dfrac{2R}{\sqrt{h^2+4R^2}}}{\dfrac{R}{\sqrt{h^2+R^2}}} \Rightarrow n = \frac{2\sqrt{h^2+R^2}}{\sqrt{h^2+4R^2}}$$

ΘΕΜΑ 3

Μετά από ολοήμερη οδήγηση επιχειρείτε ένα νυχτερινό μπάνιο στην πισίνα ενός ξενοδοχείου. Όταν επιστρέφετε στο δωμάτιό σας, διαπιστώνετε ότι χάσατε στην πισίνα το κλειδί του δωματίου σας. Δανείζεστε έναν ισχυρό φακό και βαδίζετε γύρω από την πισίνα, ρίχνοντας το φως του φακού μέσα στο νερό. Το φως φωτίζει το κλειδί που βρίσκεται στον πυθμένα της πισίνας όταν ο φακός κρατείται 1,2 m από την επιφάνεια του νερού και κατευθύνεται σε σημείο της υδάτινης επιφάνειας που απέχει 1,5 m από το πλευρικό όριο της δεξαμενής (βλ. σχήμα). Αν το βάθος του νερού στο σημείο εκείνο είναι 4m , πόση είναι η απόσταση του κλειδιού από το τοίχωμα της πισίνας;
Δίνεται ο δείκτης διάθλασης του νερού $n_v = 1{,}33$.
(Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Από το νόμο του Snell προκύπτει :

$$n_{\alpha\acute{\varepsilon}\rho\alpha}\sin\theta_{\pi} = n_v \sin\theta_{\delta} \Rightarrow$$

$$1\sin\theta_{\pi} = 1{,}33\sin\theta_{\delta} \qquad \textbf{(1)}$$

Από τη γεωμετρία του σχήματος εύκολα βρίσκεται ότι:

$$\sin\theta_{\pi} = \frac{1{,}5}{\sqrt{1{,}2^2+1{,}5^2}} = \frac{1{,}5}{\sqrt{3{,}69}} = \frac{1{,}5}{1{,}92} = 0{,}78$$

$$\sin\theta_{\delta} = \frac{x-1{,}5}{\sqrt{4^2+(x-1{,}5)^2}} = \frac{x-1{,}5}{\sqrt{16+(x-1{,}5)^2}}$$

Επομένως η **(1)** δίνει:

$$0{,}78 = 1{,}33\frac{x-1{,}5}{\sqrt{16+(x-1{,}5)^2}} \Rightarrow \frac{x-1{,}5}{\sqrt{16+(x-1{,}5)^2}} = \frac{0{,}78}{1{,}33} = 0{,}586 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{16+(x-1{,}5)^2}}{x-1{,}5} = \frac{1}{0{,}586} = 1{,}7 \Rightarrow \sqrt{\frac{16+(x-1{,}5)^2}{(x-1{,}5)^2}} = 1{,}7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{16+(x-1{,}5)^2}{(x-1{,}5)^2} = 2{,}89 \Rightarrow \frac{16}{(x-1{,}5)^2} + 1 = 2{,}89 \Rightarrow \frac{16}{(x-1{,}5)^2} = 1{,}89 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1{,}5)^2 = \frac{16}{1{,}89} = 8{,}46 \Rightarrow x-1{,}5 = \sqrt{8{,}46} = 2{,}9 \Rightarrow x = 4{,}4\text{m}$$

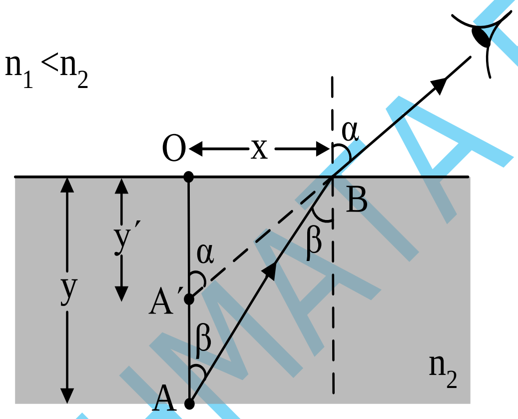
ΘΕΜΑ 4

Έστω δύο μέσα με δείκτες διάθλασης n_1 και n_2 που χωρίζονται από μία επίπεδη επιφάνεια. Ένα αντικείμενο μέσα στο οπτικά πυκνότερο μέσο n_2 ($n_2 > n_1$) βρίσκεται σε απόσταση y κάτω από τη διαχωριστική επιφάνεια. Ένας παρατηρητής που βρίσκεται πάνω από την επιφάνεια θα δει το αντικείμενο σα να βρισκόταν σε απόσταση y΄ κάτω από αυτή. Να εκφραστεί το y΄ συναρτήσει του y και των δεικτών διάθλασης n_1 και n_2 , όταν η παρατήρηση γίνεται σχεδόν κάθετα προς την διαχωριστική επιφάνεια.
Εφαρμόστε το παραπάνω αποτέλεσμα για να υπολογίσετε το πραγματικό βάθος στο οποίο βρίσκεται ένα ψάρι κάτω από την επιφάνεια μιας λίμνης, όταν για έναν ψαρά που το παρατηρεί σχεδόν κατακόρυφα από ψηλά φαίνεται ότι βρίσκεται 3m κάτω από την επιφάνεια.
Δίνεται : $n_{αέρα} = 1$, $n_{νερού} = 1,33$.

Λύση

Μια φωτεινή ακτίνα που ξεκινά από το αντικείμενο Α υφίσταται διάθλαση στη διαχωριστική επιφάνεια πριν καταλήξει στο μάτι του παρατηρητή.
Ο παρατηρητής όμως, αντιλαμβάνεται το αντικείμενο στη θέση Α΄ της προέκτασης της ακτίνας που καταλήγει στο μάτι του.
Ο νόμος του Snell για τη διάθλαση της ακτίνας στη διαχωριστική επιφάνεια δίνει:

$$n_2 \sin\beta = n_1 \sin\alpha \qquad \textbf{(1)}$$



Από το σχήμα και τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΟΒ και Α΄ΟΒ είναι:

$$\tan\beta = \frac{x}{y} \Rightarrow x = y\tan\beta \quad \text{και}$$

$$\tan\alpha = \frac{x}{y'} \Rightarrow x = y'\tan\alpha$$

Δηλαδή :

$$x = y\tan\beta = y'\tan\alpha \qquad \textbf{(2)}$$

Διαιρώντας τις εξισώσεις **(1)** και **(2)** κατά μέλη προκύπτει :

$$\frac{n_2 \sin\beta}{y\tan\beta} = \frac{n_1 \sin\alpha}{y'\tan\alpha} \Rightarrow \frac{n_2\cos\beta}{y} = \frac{n_1\cos\alpha}{y'} \qquad \textbf{(3)}$$

Για σχεδόν κάθετη παρατήρηση, οι γωνίες α και β είναι πολύ μικρές, οπότε ισχύει ο προσεγγιστικός τύπος $\cos\alpha = \cos\beta \cong 1$ και τελικά η **(3)** δίνει :

$$\frac{n_2}{y} = \frac{n_1}{y'} \Rightarrow y' = y\frac{n_1}{n_2} \qquad (4)$$

Επειδή είναι $n_1 < n_2$ ο λόγος n_1/n_2 είναι μικρότερος του 1 κι επομένως $y' < y$, δηλαδή το βάθος που φαίνεται το αντικείμενο είναι μικρότερο από το πραγματικό βάθος. Το φαινόμενο αυτό λέγεται **φαινομένη ανύψωση**.

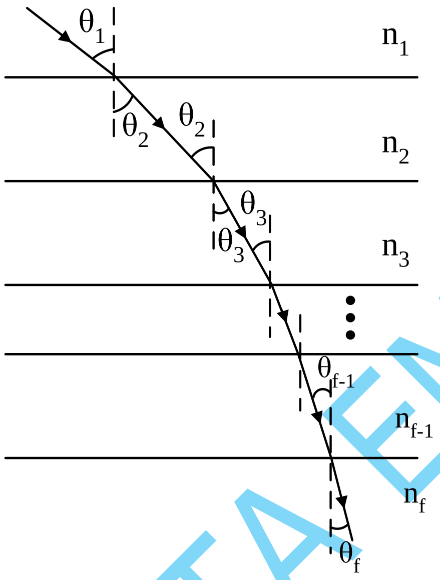
Σύμφωνα με το αποτέλεσμα της σχέσης **(4)** το πραγματικό βάθος y στο οποίο βρίσκεται ένα ψάρι, όταν ο παρατηρητής το βλέπει σε βάθος $y' = 3m$ είναι:

$$y = \frac{n_{νερού}}{n_{αέρα}} y' = \frac{1{,}33}{1} \cdot 3 \Rightarrow y = 3{,}99m$$

ΘΕΜΑ 5

Έστω ένα σύστημα που αποτελείται από επίπεδες στρώσεις πλακών διαφορετικού πάχους και αυξανόμενου δείκτη διάθλασης. Να αποδειχθεί ότι η διεύθυνση της διάδοσης της εξερχόμενης δέσμης καθορίζεται μόνο από τη διεύθυνση της προσπίπτουσας και τους δείκτες διάθλασης του αρχικού και του τελευταίου στρώματος n_1 και n_f.

Λύση



Έστω η πορεία μιας φωτεινής ακτίνας δια μέσω μιας σειράς επίπεδων παράλληλων στρώσεων με διαδοχικά αυξανόμενο δείκτη διάθλασης $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_f$.

Παρατηρείται ότι σε κάθε στρώση, η γωνία διάθλασης της ακτίνας στην πάνω επιφάνεια είναι ίση με τη γωνία πρόπτωσης της ακτίνας στην κάτω επιφάνεια.

Με εφαρμογή του νόμου του Snell σε κάθε διαχωριστική επιφάνεια δύο διαδοχικών στρώσεων προκύπτει:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$
$$n_2 \sin\theta_2 = n_3 \sin\theta_3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$n_{f-1} \sin\theta_{f-1} = n_f \sin\theta_f$$

Επομένως από τις παραπάνω προκύπτει τελικά ότι :

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 = n_3 \sin\theta_3 = \dots = n_{f-1} \sin\theta_{f-1} = n_f \sin\theta_f$$

Άρα σύμφωνα με την τελευταία ισχύει και :

$$n_1 \sin\theta_1 = n_f \sin\theta_f \Rightarrow \sin\theta_f = \frac{n_1}{n_f}\sin\theta_1$$

Συνεπώς η διεύθυνση της εξερχόμενης ακτίνας θ_f εξαρτάται μόνο από τη διεύθυνση της προσπίπτουσας θ_1 και τους δείκτες διάθλασης n_1 και n_f .
Γενικά παρατηρείται ότι η πορεία μιας φωτεινής ακτίνας, όταν διέρχεται από μέσο με μεταβλητό δείκτη διάθλασης καμπυλώνεται.

Επίσης σύμφωνα με το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει ότι αν $n_1 = n_f$, δηλαδή αν οι πλάκες περιβάλλονται από το ίδιο υλικό (π.χ. αέρα) τότε $\theta_1 = \theta_f$, που σημαίνει ότι οι εισερχόμενες και οι εξερχόμενες ακτίνες είναι παράλληλες.

ΘΕΜΑ 6

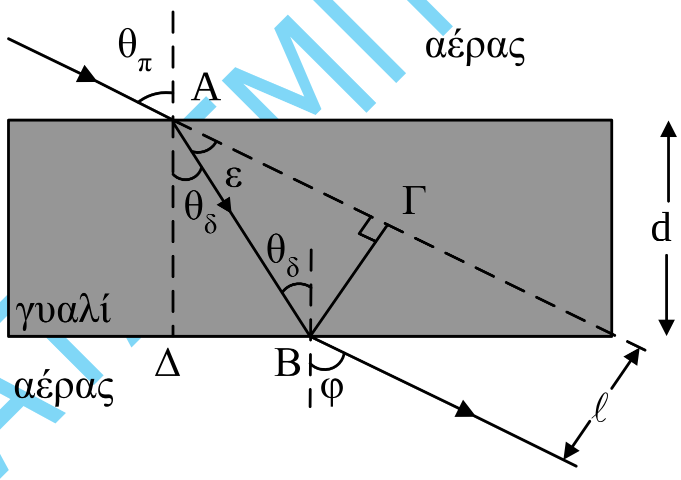
Ακτίνα φωτός διαδιδόμενη στον αέρα προσπίπτει υπό γωνία θ_π στην πάνω επιφάνεια μιας επίπεδης γυάλινης πλάκας πάχους d.

α) Δείξτε ότι η ακτίνα θα εξέλθει από την πλάκα με την ίδια γωνία με την οποία εισήλθε.

β) Δείξτε ότι η παράλληλη (ή εγκάρσια) μετατόπιση ℓ της εξερχόμενης δέσμης δίνεται από τη σχέση $\ell = d\dfrac{\sin(\theta_\pi - \theta_\delta)}{\cos\theta_\delta}$

γ) Μια φωτεινή ακτίνα προσπίπτει υπό γωνία 60^o στη μια επιφάνεια γυάλινης πλάκας πάχους 2cm και δείκτη διάθλασης 1,50. Το μέσο διάδοσης και στις δύο πλευρές της πλάκας είναι ο αέρας. Να υπολογιστεί η παράλληλη μετατόπιση, ως προς τη προσπίπτουσα ακτίνα, της αναδυόμενης ακτίνας.

Λύση



α) Όταν η ακτίνα εισέρχεται από τον αέρα στη γυάλινη πλάκα , σύμφωνα με το νόμο του Snell ισχύει:

$$n_{\alpha\acute{\epsilon}\rho\alpha}\sin\theta_\pi = n_{\gamma\upsilon\alpha\lambda\iota o\acute{\upsilon}}\sin\theta_\delta \Rightarrow \sin\theta_\pi = n_{\gamma\upsilon\alpha\lambda\iota o\acute{\upsilon}}\sin\theta_\delta \quad (\text{αφού } n_{\alpha\acute{\epsilon}\rho\alpha}=1) \qquad \textbf{(1)}$$

Ενώ αντίστοιχα όταν η διαθλώμενη ακτίνα εξέρχεται από την πλάκα στον αέρα ισχύει:

$$n_{\gamma\upsilon\alpha\lambda\iota o\acute{\upsilon}}\sin\theta_\delta = n_{\alpha\acute{\epsilon}\rho\alpha}\sin\varphi \Rightarrow n_{\gamma\upsilon\alpha\lambda\iota o\acute{\upsilon}}\sin\theta_\delta = \sin\varphi \qquad \textbf{(2)}$$

όπου όπως εύκολα φαίνεται από το σχήμα η γωνία με την οποία προσπίπτει η ακτίνα στην κάτω επιφάνεια της πλάκας είναι ίση (ως εντός εναλλάξ) με τη γωνία διάθλασης τις ακτίνας στην πάνω επιφάνεια.
Συνεπώς λόγω των **(1)** και **(2)** πολύ απλά προκύπτει ότι:

$$\sin\theta_\pi = \sin\varphi \quad ή \quad \varphi = \theta_\pi$$

Δηλαδή η εξερχόμενη ακτίνα από την πλάκα είναι παράλληλη στην αρχική προσπίπτουσα ακτίνα.

β) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ , η πλευρά ΒΓ είναι η παράλληλη μετατόπιση ℓ της ακτίνας και είναι:

$$\ell = (AB)\sin\varepsilon \qquad \textbf{(3)}$$

Όπου η γωνία ε αντιστοιχεί στη γωνία εκτροπής της ακτίνας και ισχύει:

$$\varepsilon + \theta_\delta = \theta_\pi \Rightarrow \varepsilon = \theta_\pi - \theta_\delta$$

Άρα η **(3)** δίνει : $\ell = (AB)\sin(\theta_\pi - \theta_\delta)$ **(4)**

Επίσης από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ προκύπτει:

$$\cos\theta_\delta = \frac{(A\Delta)}{(AB)} = \frac{d}{(AB)} \Rightarrow (AB) = \frac{d}{\cos\theta_\delta}$$

Και τελικά η **(4)** γίνεται:

$$\ell = d\frac{\sin(\theta_\pi - \theta_\delta)}{\cos\theta_\delta}$$

Δηλαδή η παράλληλη μετατόπιση της εξερχόμενης ακτίνας εξαρτάται από το πάχος της πλάκας, τη γωνία πρόσπτωσης και το δείκτη διάθλασης του υλικού της πλάκας (γιατί αυξανομένου του δείκτη διάθλασης ελαττώνεται η γωνία διάθλασης θ_δ όταν παραμένει σταθερή η γωνία πρόσπτωσης θ_π).
Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται για την εύρεση του πάχους d πλακιδίων από τη μέτρηση της παράλληλης μετατόπισης ℓ.

γ) Για $\theta_\pi = 60^o$ και $n_{γυαλιού} = 1{,}50$ ο νόμος του Snell δίνει τη γωνία διάθλασης ως :

$$n_{αέρα}\sin\theta_\pi = n_{γυαλιού}\sin\theta_\delta \Rightarrow 1\sin 60^o = 1{,}5\sin\theta_\delta \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 1{,}5\sin\theta_\delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\theta_\delta = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577 \Rightarrow \theta_\delta = \sin^{-1}0{,}577 \Rightarrow \theta_\delta = 35{,}2^o$$

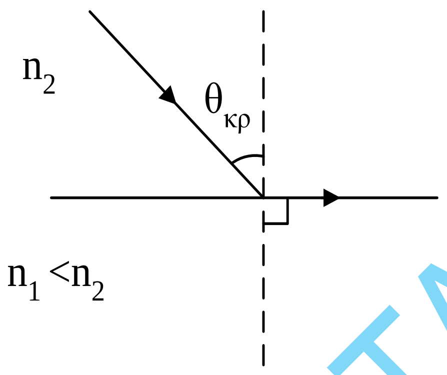
Άρα η παράλληλη μετατόπιση της εξερχόμενης ακτίνας , σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα είναι:

$$\ell = d\frac{\sin(\theta_\pi - \theta_\delta)}{\cos\theta_\delta} = 2\frac{\sin(60^o - 35{,}2^o)}{\cos 35{,}2^o} = 2\frac{\sin 24{,}8^o}{\cos 35{,}2^o} = 2\frac{0{,}42}{0{,}817} \Rightarrow \ell = 1{,}03\text{cm}$$

ΘΕΜΑ 7

Μια πολύ λεπτή δέσμη φωτός διαδίδεται μέσα σε ένα μέσο του οποίου ο δείκτης διάθλασης είναι $n_2 = 2$. Η δέσμη προσπίπτει στην επίπεδη διαχωριστική επιφάνεια ανάμεσα στο μέσο αυτό και σε ένα άλλο, του οποίου ο δείκτης διάθλασης είναι $n_1 = \sqrt{2}$. Εξηγείστε πότε θα παρατηρηθεί το φαινόμενο της ολικής εσωτερικής ανάκλασης και βρείτε τη σχετική κρίσιμη γωνία.
(Τμήμα Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Επειδή η ακτίνα αυτή φωτός διαδίδεται από οπτικώς πυκνότερο σε οπτικώς αραιότερο μέσο η διαθλώμενη ακτίνα αποκλίνει από την κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια κι επομένως υπάρχει μια κρίσιμη γωνία πρόσπτωσης $\theta_{\kappa\rho}$ για την οποία η διαθλώμενη ακτίνα θα είναι παράλληλη στη διαχωριστική επιφάνεια, δηλαδή είναι $\theta_\delta = 90^o$.

Με εφαρμογή του νόμου του Snell υπολογίζεται η $\theta_{\kappa\rho}$ ως εξής :

$$n_2 \sin\theta_{\kappa\rho} = n_1 \sin\theta_\delta \Rightarrow 2\sin\theta_{\kappa\rho} = \sqrt{2}\sin 90^o \Rightarrow \sin\theta_{\kappa\rho} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta_{\kappa\rho} = 45^o$$

Άρα για κάθε γωνία πρόσπτωσης $\theta_\pi > 45^o$ η ακτίνα δεν θα διαθλάται στο άλλο μέσο αλλά θα ανακλάται στη διαχωριστική επιφάνεια και θα παρατηρείται το φαινόμενο της ολικής εσωτερικής ανάκλασης.

ΘΕΜΑ 8

Λεπτή μονοχρωματική δέσμη φωτός διαδίδεται μέσα σε υλικό του οποίου ο δείκτης διάθλασης είναι n_2 και προσπίπτει στην επίπεδη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ του υλικού και ενός άλλου μέσου, του οποίου ο δείκτης διάθλασης είναι $n_1 = \sqrt{2}$. Αν η δέσμη του φωτός ανακλάται ολικά για γωνίες πρόσπτωσης μεγαλύτερες των 45^o, να βρεθεί η τιμή του n_2 .
(Τμήμα Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση

Εφόσον η δέσμη φωτός ανακλάται ολικά για γωνίες πρόσπτωσης μεγαλύτερες των 45^o προκύπτει ότι η κρίσιμη γωνία είναι $\theta_{\kappa\rho} = 45^o$, για την οποία η γωνία διάθλασης είναι $\theta_\delta = 90^o$.

Επομένως ο νόμος του Snell δίνει:

$$n_2 \sin\theta_{\kappa\rho} = n_1 \sin\theta_\delta \Rightarrow n_2 \sin 45^o = \sqrt{2}\sin 90^o \Rightarrow n_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow n_2 = 2$$

ΘΕΜΑ 9

Όταν μια μονοχρωματική ακτίνα φωτός προσπτίπτει από ένα υγρό στον αέρα , η κρίσιμη γωνία είναι $\theta_1 = 45^o$, ενώ όταν η ίδια ακτίνα προσπίπτει από το γυαλί στον αέρα, η κρίσιμη γωνία είναι $\theta_2 = 60^o$. Να υπολογίσετε την κρίσιμη γωνία όταν η ακτίνα αυτή προσπίπτει από το υγρό στο γυαλί.

Λύση

Έστω n_υ και n_γ ο δείκτης διάθλασης του υγρού και του γυαλιού αντίστοιχα για τη μονοχρωματική ακτίνα.
Ο νόμος του Snell για πρόσπτωση της ακτίνας από το υγρό στον αέρα με την κρίσιμη γωνία θ_1 (όπου $\theta_\delta = 90^o$) δίνει :

$$n_\upsilon \sin\theta_1 = n_{\alpha\acute{\epsilon}\rho\alpha}\sin\theta_\delta \Rightarrow n_\upsilon \sin 45^o = 1\sin 90^o \Rightarrow n_\upsilon \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \Rightarrow n_\upsilon = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Ενώ για πρόσπτωση από το γυαλί στον αέρα με την κρίσιμη γωνία θ_2 προκύπτει :

$$n_\gamma \sin\theta_2 = n_{\alpha\acute{\epsilon}\rho\alpha}\sin\theta_\delta \Rightarrow n_\gamma \sin 60^o = 1\sin 90^o \Rightarrow n_\gamma \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \Rightarrow n_\gamma = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Αν θ_3 είναι η ζητούμενη κρίσιμη γωνία για πρόσπτωση από το υγρό στο γυαλί, ο νόμος του Snell δίνει :

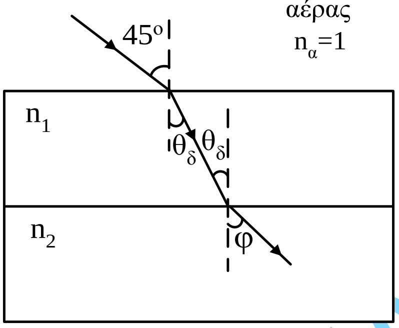
$$n_\upsilon \sin\theta_3 = n_\gamma \sin\theta_\delta \Rightarrow \sqrt{2}\sin\theta_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin 90^o \Rightarrow \sin\theta_3 = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{2}{2{,}45} \Rightarrow \sin\theta_3 = 0{,}816 \Rightarrow \theta_3 = \sin^{-1} 0{,}816 \Rightarrow \theta_3 = 54{,}7^o$$

ΘΕΜΑ 10

Μια γυάλινη πλάκα με δείκτη διάθλασης $n_1 = \sqrt{2}$ τοποθετείται πάνω σε μία άλλη πλάκα από κάποιο άλλο διαφανές υλικό με δείκτη διάθλασης $n_2 = 1{,}2$. Το σύστημα των δύο πλακών βρίσκεται στον αέρα. Μια μονοχρωματική ακτίνα φωτός προσπίπτει στη γυάλινη πλάκα με γωνία $\theta_\pi = 45^o$. Να εξεταστεί αν η ακτίνα θα διέλθει στη δεύτερη πλάκα ή θα υποστεί ολική ανάκλαση.

Λύση



Σύμφωνα με το νόμο του Snell, η γωνία με την οποία θα διέλθει η ακτίνα από τον αέρα στη γυάλινη πλάκα θδ είναι:

$$n_\alpha \sin\theta_\pi = n_1 \sin\theta_\delta \Rightarrow 1\sin 45^o =$$

$$= \sqrt{2}\sin\theta_\delta \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\sin\theta_\delta \Rightarrow$$

$$\sin\theta_\delta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_\delta = 30^o$$

Όπως φαίνεται στο σχήμα με την ίδια γωνία $\theta_\delta = 30^o$ θα προσπέσει η ακτίνα στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο πλακών. Η οριακή γωνία του γυαλιού με το υλικό της δεύτερης πλάκας για ολική ανάκλαση $(\varphi = 90^o)$ είναι σύμφωνα με το νόμο του Snell :

$$n_1 \sin\theta_{o\rho} = n_2 \sin 90^o \Rightarrow \sqrt{2}\sin\theta_{o\rho} = 1{,}2 \Rightarrow \sin\theta_{o\rho} = \frac{1{,}2}{\sqrt{2}} = 0{,}85 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_{o\rho} = \sin^{-1} 0{,}85 \Rightarrow \theta_{o\rho} = 58{,}2^o$$

Άρα επειδή η γωνία πρόσπτωσης στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο πλακών είναι μικρότερη από την οριακή γωνία $(\theta_\delta = 30^o < \theta_{o\rho})$ η ακτίνα δεν θα υποστεί ολική εσωτερική ανάκλαση, αλλά θα διέλθει στη δεύτερη πλάκα με γωνία φ τέτοια ώστε:

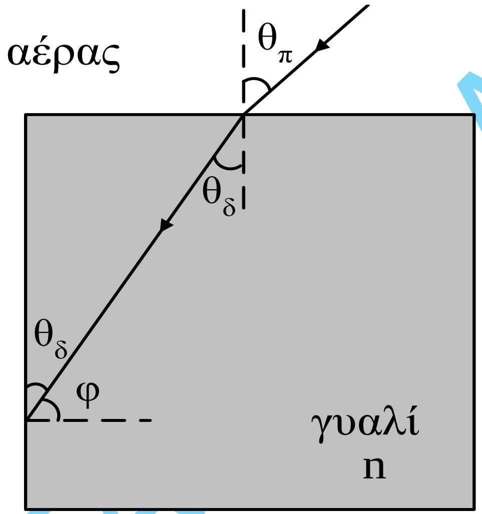
$$n_1 \sin\theta_\delta = n_2 \sin\varphi \Rightarrow \sqrt{2}\sin 30^o = 1{,}2\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 1{,}2} = \frac{\sqrt{2}}{2{,}4} = 0{,}587 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \sin^{-1}0{,}587 \Rightarrow \varphi = 35{,}9^{o}$$

ΘΕΜΑ 11

Φωτεινή ακτίνα προσπίπτει πάνω σε τετράγωνη γυάλινη πλάκα, στο μέσο της πάνω πλευράς της με γωνία 45°. Ποιος πρέπει να είναι ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού για να συμβαίνει ολική ανάκλαση πάνω στην κατακόρυφη πλευρά ;

Λύση



Κατά την πρόσπτωση της ακτίνας στην πάνω πλευρά της γυάλινης πλάκας ισχύει ο νόμος του Snell:

$$n_{\alpha έ\rho\alpha}\sin\theta_{\pi} = n\sin\theta_{\delta} \Rightarrow 1\sin45^{o} = n\sin\theta_{\delta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = n\sin\theta_{\delta} \Rightarrow \sin\theta_{\delta} = \frac{\sqrt{2}}{2n} \qquad \textbf{(1)}$$

Η ακτίνα στη συνέχεια προσπίπτει στην κατακόρυφη πλευρά με γωνία $\varphi=90^{o}-\theta_{\delta}$ και για να συμβεί ολική εσωτερική ανάκλαση στο σημείο αυτό θα πρέπει :

$$n\sin\varphi = n_{\alpha έ\rho\alpha}\sin90^{o} \Rightarrow n\sin\varphi = 1 \Rightarrow \sin\varphi = \frac{1}{n} \Rightarrow \sin(90^{o}-\theta_{\delta}) = \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\theta_{\delta} = \frac{1}{n} \qquad \textbf{(2)}$$

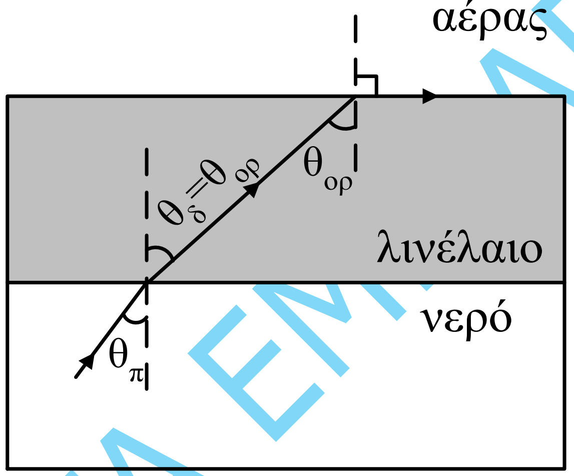
Συνεπώς αν υψωθούν οι **(1)** και **(2)** στο τετράγωνο και προστεθούν κατά μέλη προκύπτει:

$$\sin^2\theta_\delta + \cos^2\theta_\delta = \frac{2}{4n^2} + \frac{1}{n^2} \Rightarrow 1 = \frac{3}{2n^2} \Rightarrow n^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow n = \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow n = 1{,}22$$

ΘΕΜΑ 12

Μια επιφάνεια νερού ($n_\nu = 1{,}33$) σκεπάζεται με ένα στρώμα λινέλαιου ($n_\lambda = 1{,}48$), ενώ πάνω από αυτό βρίσκεται αέρας ($n_\alpha = 1$). Ποια θα πρέπει να είναι η γωνία προσπτώσεως μιας δέσμης ακτίνων φωτός, που διευθύνεται από το νερό προς το λινέλαιο, ώστε η δέσμη να υποστεί ολική ανάκλαση στην ελεύθερη επιφάνεια του λινέλαιου;

Λύση



Ολική εσωτερική ανάκλαση μπορεί να συμβεί μόνο στη διαχωριστική επιφάνεια λινέλαιου-αέρα , αφού $n_\nu < n_\lambda$. Επομένως η οριακή γωνία για να συμβεί αυτό είναι:

$$n_\lambda \sin\theta_{o\rho} = n_\alpha \sin 90^o \Rightarrow 1{,}48 \sin\theta_{o\rho} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\theta_{o\rho} = \frac{1}{1{,}48} = 0{,}676 \Rightarrow \theta_{o\rho} = \sin^{-1} 0{,}676 \Rightarrow \theta_{o\rho} = 42{,}5^o$$

Για την οριακή αυτή γωνία από τη γεωμετρία του σχήματος εύκολα φαίνεται ότι η γωνία της διάθλασης της ακτίνας από το νερό στο λινέλαιο είναι $\theta_\delta = \theta_{o\rho} = 42{,}5^o$. Άρα ο νόμος του Snell στη διαχωριστική επιφάνεια νερού-λινελαίου δίνει:

$$n_\nu \sin\theta_\pi = n_\lambda \sin\theta_\delta \Rightarrow 1{,}33 \sin\theta_\pi = 1{,}48 \sin 42{,}5^o \Rightarrow \sin\theta_\pi = \frac{1}{1{,}33} = 0{,}752 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_\pi = \sin^{-1} 0{,}752 \Rightarrow \theta_\pi = 48{,}8^o$$

Δηλαδή για γωνίες πρόσπτωσης που είναι ίσες ή μεγαλύτερες από 48,8^o η δέσμη ακτίνων θα ανακλαστεί πίσω στο νερό.

☞ **Αποδείξτε** ότι η ίδια γωνία θα προέκυπτε και χωρίς το στρώμα του λινελαίου.

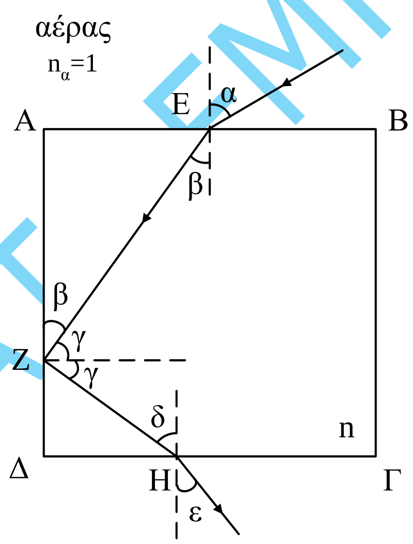
ΘΕΜΑ 13

Στο μέσο της πάνω επιφάνειας του κύβου του σχήματος , ο οποίος έχει κατασκευαστεί από υλικό με δείκτη διάθλασης $n = \sqrt{2}$, προσπίπτει φωτεινή ακτίνα με γωνία πρόσπτωσης α = 45^o. Να καθοριστεί επακριβώς η πορεία της ακτίνας μέσα από τον κύβο.

Λύση

Στο σημείο Ε, στο μέσο της πλευράς ΑΒ, στο οποίο προσπίπτει η ακτίνα, θα διαθλαστεί, δηλαδή θα εισέλθει μέσα στο κύβο, αφού διαδίδεται από οπτικώς αραιότερο (αέρα) σε οπτικώς πυκνότερο μέσο.
Ο νόμος του Snell δίνει:

$$n_\alpha \sin\alpha = n\sin\beta \Rightarrow 1\sin45^o = \sqrt{2}\sin\beta \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\sin\beta \Rightarrow \sin\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 30^o$$



Από τη γεωμετρία του σχήματος και από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΖ προκύπτει ότι:

$$\tan\beta = \frac{(AE)}{(AZ)} \Rightarrow (AZ) = \frac{(AE)}{\tan30^o} = \frac{(AB)/2}{\sqrt{3}/3} = \frac{3}{2\sqrt{3}}(AB) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AZ) = 0{,}866(AB) = 0{,}866(A\Delta) \quad \text{αφού} \quad (AB)=(A\Delta).$$

Άρα αφού (ΑΖ)<(ΑΔ) αποδείχθηκε ότι η ακτίνα θα προσπέσει στην κατακόρυφη πλευρά ΑΔ και στο σημείο Ζ με γωνία πρόσπτωσης $\gamma=90^o-\beta \Rightarrow \gamma=60^o$.
Στο σημείο Ζ επειδή η ακτίνα διαδίδεται από οπτικώς πυκνότερο σε οπτικώς αραιότερο μέσο θα πρέπει να διερευνηθεί αν εμφανίζεται ολική εσωτερική ανάκλαση. Η οριακή γωνία για την οποία θα γίνεται ολική ανάκλαση βρίσκεται ως εξής :

$$n\sin\theta_{o\rho} = n_\alpha \sin 90^o \Rightarrow \sqrt{2}\sin\theta_{o\rho} = 1 \Rightarrow \sin\theta_{o\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta_{o\rho} = 45^o$$

Επομένως επειδή $\gamma=60^o > \theta_{o\rho}=45^o$ στο σημείο Ζ η ακτίνα θα υποστεί ολική εσωτερική ανάκλαση, δηλαδή θα ανακλαστεί με την ίδια γωνία $\gamma=60^o$ και θα προσπέσει στην πλευρά ΔΓ στο σημείο Η με γωνία πρόσπτωσης $\delta = 90^o - \gamma \Rightarrow \delta = 30^o$.

Αλλά στο σημείο Η επειδή η γωνία πρόσπτωσης είναι $\delta = 30^o < \theta_{o\rho} = 45^o$ η ακτίνα θα διαθλαστεί και θα εξέλθει από τον κύβο με γωνία ε, η οποία προσδιορίζεται από το νόμο του Snell ως εξής :

$$n\sin\delta = n_\alpha \sin\varepsilon \Rightarrow \sqrt{2}\sin 30^o = 1\sin\varepsilon \Rightarrow \sin\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varepsilon = 45^o$$

Δηλαδή τελικά η ακτίνα εξέρχεται από τον κύβο κάθετα ως προς την αρχική προσπίπτουσα ακτίνα ή αλλιώς η προσπίπτουσα και η εξερχόμενη ακτίνα είναι κάθετες. Σημειώνεται ότι στο σημείο Η ένα μέρος της ακτίνας θα ανακλαστεί, σύμφωνα με το νόμο της ανάκλασης, η πορεία της οποίας δεν μελετάται.

ΘΕΜΑ 14

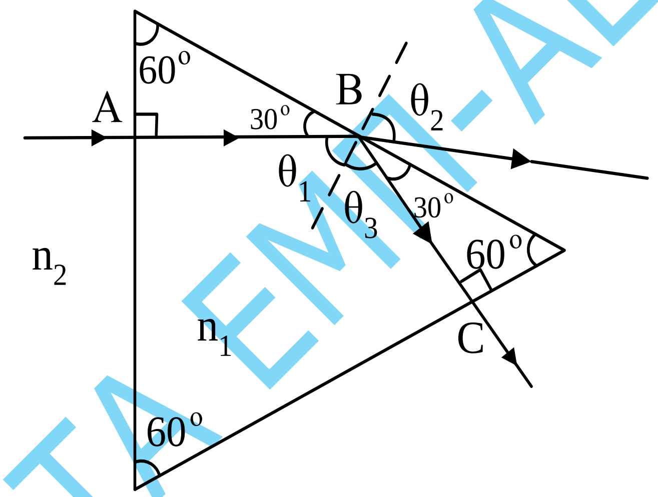
Ένα πρίσμα $60^o - 60^o - 60^o$ με δείκτη διάθλασης n_1=1,48 είναι βυθισμένο στο νερό που έχει δείκτη διάθλασης n_2=1,33. Μια φωτεινή ακτίνα προσπίπτει κάθετα σε μία από τις έδρες του.

α) Να βρείτε την κατεύθυνση της διαθλώμενης ακτίνας όταν αυτή εξέρχεται από το πρίσμα, καθώς και της ανακλώμενης ακτίνας, όταν τελικά εξέρχεται και εκείνη από το πρίσμα.

β) Αν το πρίσμα ήταν στον αέρα (αντί για το νερό) να απαντήσετε στις ερωτήσεις του **(α)**.

(Τμήμα Μηχανολόγων Ε.Μ.Π.)

Λύση



α) Στο σημείο Α η ακτίνα προσπίπτει κάθετα στο πρίσμα, δηλαδή είναι θ_π=0 και ο νόμος του Snell δίνει :

$$n_2 \sin\theta_\pi = n_1 \sin\theta_\delta \Rightarrow 1{,}33\sin 0 = 1{,}48 \sin\theta_\delta \Rightarrow \sin\theta_\delta = 0 \Rightarrow \theta_\delta = 0$$

Δηλαδή η ακτίνα διαθλάται στο πρίσμα χωρίς να αλλάξει διεύθυνση και προσπίπτει στο σημείο Β της απέναντι έδρας του πρίσματος.

Στο σημείο Β η γωνία πρόσπτωσης της ακτίνας είναι $\theta_1 = 90^o - 30^o \Rightarrow \theta_1 = 60^o$ και επειδή η ακτίνα διαδίδεται από πυκνότερο σε αραιότερο μέσο υπολογίζεται η οριακή γωνία για να ελεγχθεί αν υφίσταται ολική εσωτερική ανάκλαση.

Έτσι για $\theta_1 = \theta_{o\rho}$ είναι $\theta_\delta = 90^o$ και ο νόμος του Snell δίνει:

$$n_1 \sin\theta_{op} = n_2 \sin 90^o \Rightarrow \sin\theta_{op} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1,33}{1,48} = 0898 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_{op} = \sin^{-1} 0,898 \Rightarrow \theta_{op} = 64^o$$

Άρα επειδή $\theta_1 = 60^o < \theta_{op} = 64^o$ η ακτίνα στο σημείο Β θα διαθλαστεί, δηλαδή θα εξέλθει από το πρίσμα με γωνία θ_2, η οποία σύμφωνα με το νόμο του Snell είναι :

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \Rightarrow 1,48 \sin 60^o = 1,33 \sin\theta_2 \Rightarrow \sin\theta_2 = \frac{1,48}{1,33}\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 1,112 \cdot 0,866 = 0,963 \Rightarrow \theta_2 = \sin^{-1} 0,963 \Rightarrow \theta_2 = 74^o$$

Επίσης σύμφωνα με το νόμο της ανάκλασης στο σημείο Β ένα μέρος της ακτίνας θα ανακλαστεί με γωνία $\theta_3 = \theta_1 = 60^o$ και θα προσπέσει στο σημείο C της τρίτης έδρας του πρίσματος. Από τη γεωμετρία του σχήματος εύκολα φαίνεται ότι η ανακλώμενη ακτίνα προσπίπτει κάθετα στο σημείο C , δηλαδή η γωνία πρόσπτωσης είναι $\theta_\pi = 0$.
Συνεπώς στο σημείο C η ανακλώμενη ακτίνα διαθλάται, αφού $\theta_\pi = 0^o < \theta_{op} = 64^o$ και από το νόμο του Snell προκύπτει:

$$n_1 \sin 0^o = n_2 \sin\theta_\delta \Rightarrow \sin\theta_\delta = 0 \Rightarrow \theta_\delta = 0$$

Δηλαδή τελικά η ανακλώμενη ακτίνα εξέρχεται από το πρίσμα καθώς έχει εκτραπεί κατά 120^o από την διεύθυνση της αρχικής προσπίπτουσας ακτίνας.

β) Αν το πρίσμα ήταν στον αέρα, αντί για το νερό θα είναι ο δείκτης διάθλασης $n_2 = 1$. Η ακτίνα θα διαδίδεται κατά τον ίδιο τρόπο όπως στο ερώτημα **(α)** και θα προσπίπτει στο σημείο Β με την ίδια γωνία $\theta_1 = 60^o$.
Στην περίπτωση αυτή όμως η οριακή γωνία για την οποία η ακτίνα υφίσταται ολική εσωτερική ανάκλαση αλλάζει και είναι:

$$n_1 \sin\theta_{op} = n_2 \sin 90^o \Rightarrow \sin\theta_{op} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{1,48} = 0,675 \Rightarrow$$

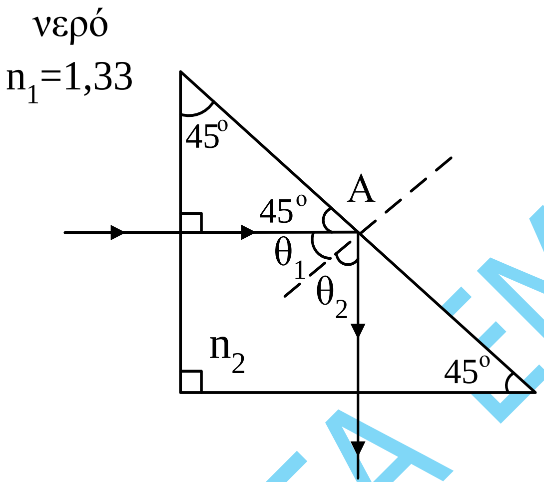
$$\Rightarrow \theta_{op} = \sin^{-1} 0,675 \Rightarrow \theta_{op} = 42,5^o$$

Άρα επειδή $\theta_1 = 60^o > \theta_{op} = 42,5^o$ η ακτίνα στο σημείο Β θα υποστεί ολική εσωτερική ανάκλαση με γωνία $\theta_3 = \theta_1 = 60^o$ και τελικά στο σημείο C θα διαθλαστεί με γωνία $\theta_\delta = 0$, ακριβώς όπως αναλύθηκε στο ερώτημα **(α)**.
Συνεπώς η διαφορά που παρατηρείται αν το πρίσμα είναι στον αέρα, είναι ότι στο σημείο Β η ακτίνα δεν εξέρχεται του πρίσματος.

ΘΕΜΑ 15

Ένα πρίσμα $45^o - 45^o - 90^o$ βυθίζεται στο νερό , που έχει δείκτη διάθλασης $n_1 = 1{,}33$. Μία φωτεινή ακτίνα προσπίπτει κάθετα σε μία από τις μικρές του έδρες. Ποιος είναι ο ελάχιστος δείκτης διάθλασης που πρέπει να έχει το πρίσμα , ώστε να επιτευχθεί ολική ανάκλαση της ακτίνας αυτής στη μεγάλη έδρα του;

Λύση



Η ακτίνα προσπίπτει κάθετα στη μικρή έδρα του πρίσματος, δηλαδή η γωνία πρόσπτωσης είναι $\theta_\pi = 0$ και από το νόμο του Snell εύκολα προκύπτει ότι $\theta_\delta = 0$ δηλαδή η ακτίνα δεν θα εκτραπεί καθώς εισέρχεται στο πρίσμα.
Στη συνέχεια η ακτίνα αυτή θα προσπέσει στο σημείο Α της μεγάλης έδρας με γωνία πρόσπτωσης $\theta_1 = 45^o$ (βρίσκεται εύκολα από τη γεωμετρία του σχήματος).

Η οριακή γωνία για την οποία επιτυγχάνεται ολική εσωτερική ανάκλαση στο σημείο Α είναι σύμφωνα με το νόμο του Snell:

$$n_2 \sin\theta_{o\rho} = n_1 \sin 90^o \Rightarrow \sin\theta_{o\rho} = \frac{n_1}{n_2} \qquad \textbf{(1)}$$

Επομένως για να επιτευχθεί ολική ανάκλαση στο σημείο Α, όταν η ακτίνα προσπίπτει με γωνία $\theta_1 = 45^o$ θα πρέπει:

$$\sin\theta_1 \geq \sin\theta_{o\rho} \Rightarrow \sin 45^o \geq \sin\theta_{o\rho} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \geq \sin\theta_{o\rho} \qquad \textbf{(2)}$$

Άρα η **(2)** λόγω της **(1)** δίνει:

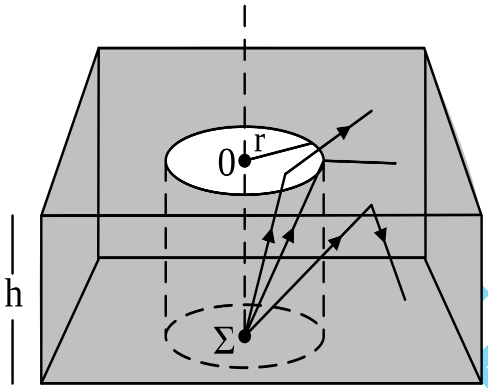
$$\frac{\sqrt{2}}{2} \geq \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \geq \frac{1{,}33}{n_2} \Rightarrow n_2 \geq \frac{2\cdot 1{,}33}{\sqrt{2}} \Rightarrow n_2 \geq 1{,}88$$

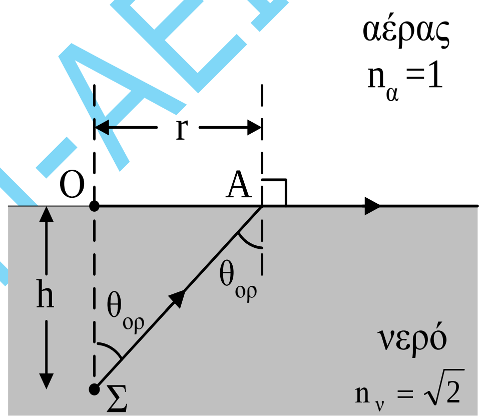
Δηλαδή ο ελάχιστος δείκτης διάθλασης που πρέπει να έχει το πρίσμα για να επιτευχθεί ολική ανάκλαση της ακτίνας στο σημείο Α είναι n_{min} = 1,88.
Παρατηρείται ότι η ακτίνα ανακλάται στο σημείο Α με γωνία $\theta_2 = \theta_1 = 45^o$ και στη συνέχεια προσπίπτει κάθετα στην τρίτη έδρα και εξέρχεται χωρίς να εκτραπεί. Το πρίσμα αυτό λέγεται **πρίσμα ορθής γωνίας** γιατί τελικά η ακτίνα εκτρέπεται κατά 90^o.

ΘΕΜΑ 16

Σημειακή φωτεινή πηγή βρίσκεται σε βάθος h = 2m κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια νερού, που έχει δείκτη διάθλασης $n_v = \sqrt{2}$. Να υπολογιστεί η ακτίνα του κύκλου που σχηματίζεται στην επιφάνεια του νερού, ο οποίος περιορίζει τη διαθλώμενη κωνική δέσμη ακτίνων (φωτεινός κύκλος).

Λύση





Επειδή οι ακτίνες που εκπέμπει η φωτεινή πηγή διαδίδονται από οπτικώς πυκνότερο σε οπτικώς αραιότερο μέσο (από το νερό $n_v = \sqrt{2}$ στον αέρα $n_\alpha = 1$) για μια οριακή γωνία πρόσπτωσης $\theta_{o\rho}$ η γωνία διάθλασης είναι 90^o, ενώ για κάθε γωνία πρόσπτωσης μεγαλύτερη από την $\theta_{o\rho}$ δεν παρατηρείται καθόλου διάθλαση, αλλά ολική εσωτερική ανάκλαση από την επιφάνεια του νερού. Έτσι μόνο ένας κύκλος στην επιφάνεια του νερού θα είναι φωτιζόμενος, αφού από αυτόν θα διαθλώνται οι ακτίνες στον αέρα . Για τον υπολογισμό της ακτίνας του κύκλου αυτού προσδιορίζεται η οριακή γωνία, από το νόμο του Snell ως εξής :

$$n_v \sin\theta_{o\rho} = n_\alpha \sin 90^o \Rightarrow \sqrt{2}\sin\theta_{o\rho} = 1 \Rightarrow \sin\theta_{o\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta_{o\rho} = 45^o$$

Επομένως από το ορθογώνιο τρίγωνο ΣΟΑ η μία του γωνία ως εντός εναλλάξ είναι ίση με την $\theta_{o\rho}$ και τριγωνομετρικά προκύπτει:

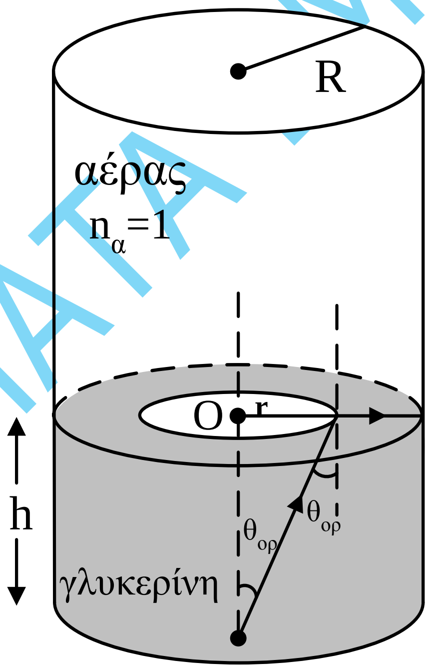
$$\tan\theta_{o\rho} = \frac{r}{h} \Rightarrow r = h\tan 45^o \Rightarrow r = 2m$$

ΘΕΜΑ 17

Ένα κυλινδρικό δοχείο με ακτίνα R=0,2m περιέχει γλυκερίνη , που έχει δείκτη διάθλασης n_{γ}= 1,4. Το ύψος της γλυκερίνης στο δοχείο είναι h=0,1m.Στο κέντρο του πυθμένα του δοχείου υπάρχει μια σημειακή φωτεινή πηγή.
α) Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας της γλυκερίνης από την οποία περνά το φως.
β) Πόσο πρέπει να είναι το ελάχιστο ύψος της γλυκερίνης στο κυλινδρικό δοχείο ώστε να φωτιστεί όλη η επιφάνεια;
(Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση

α) Το εμβαδόν της επιφάνειας της γλυκερίνης που φωτίζεται αντιστοιχεί σε ένα κύκλο ακτίνας r από τον οποίο διέρχονται οι διαθλώμενες ακτίνες. Στην περιφέρεια του κύκλου αυτού η γωνία διάθλασης είναι 90^o (δηλαδή αντιστοιχεί στην οριακή γωνία θ_{op}), ενώ πέρα από το κύκλο αυτό οι ακτίνες υφίστανται ολική εσωτερική ανάκλαση. Αυτό οφείλεται στο ότι οι ακτίνες διαδίδονται από οπτικώς πυκνότερο (γλυκερίνη) σε οπτικώς αραιότερο (αέρα) μέσο.



Με την ίδια διαδικασία όπως στο **Θέμα 16** υπολογίζεται η ακτίνα του κύκλου μέσω της οριακής γωνίας ως εξής :

$$n_\gamma \sin\theta_{o\rho} = n_\alpha \sin 90^o \Rightarrow 1{,}4\sin\theta_{o\rho} = 1 \Rightarrow \sin\theta_{o\rho} = \frac{1}{1{,}4} = 0{,}714 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_{o\rho} = \sin^{-1}0{,}714 \Rightarrow \theta_{o\rho} = 45{,}6^o$$

Άρα από το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται προκύπτει :

$$\tau\alpha n\theta_{o\rho} = \frac{r}{h} \Rightarrow r = h\tau\alpha n\theta_{o\rho} = 0{,}1\cdot \tau\alpha n45{,}6^o \Rightarrow r = 0{,}1m$$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$S = \pi r^2 = 3{,}14\cdot 0{,}1^2 \Rightarrow S = 0{,}0314m^2$$

β) Για να φωτιστεί όλη η επιφάνεια της γλυκερίνης θα πρέπει να είναι $r = R = 0{,}2m$ οπότε το ελάχιστο ύψος της γλυκερίνης στο δοχείο, σύμφωνα με τα παραπάνω, θα πρέπει να είναι:

$$\tau\alpha n\theta_{o\rho} = \frac{R}{h_{min}} \Rightarrow h_{min} = \frac{R}{\tau\alpha n\theta_{o\rho}} = \frac{0{,}2m}{\tau\alpha n45{,}6^o} \Rightarrow h_{min} = 0{,}2m$$

ΘΕΜΑ 18

Μία φωτεινή ακτίνα προσπίπτει στη μια έδρα ενός πρίσματος , που έχει δείκτη διάθλασης n και θλαστική γωνία κορυφής A και τελικά εξέρχεται από την απέναντι έδρα.

α) Δείξτε ότι η γωνία εκτροπής δ, δηλαδή η γωνία μεταξύ της αρχικής και της τελικής κατεύθυνσης της ακτίνας δίνεται από τη σχέση :

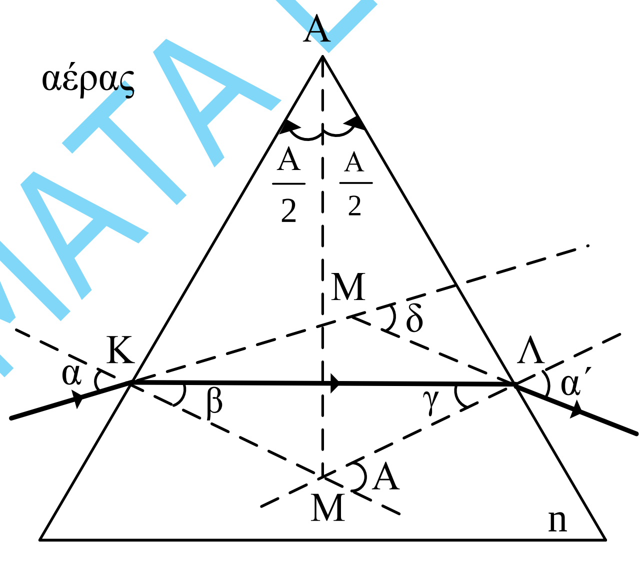
$$\sin\frac{A+\delta}{2} = n\sin\frac{A}{2}$$

όταν η φωτεινή ακτίνα διέρχεται μέσα από το πρίσμα ακολουθώντας συμμετρική πορεία, δηλαδή η ακτίνα εντός του πρίσματος είναι κάθετη στο επίπεδο που διχοτομεί τη γωνία A.

β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) υπολογίστε τη γωνία εκτροπής για μια φωτεινή ακτίνα, που διαδίδεται ακολουθώντας συμμετρική πορεία, σε πρίσμα με τρεις ίσες γωνίες ($A=60^o$) και δείκτη διάθλασης n=1,60.

γ) Αν η θλαστική γωνία A είναι μικρή και η πρόσπτωση της ακτίνας γίνεται σχεδόν κάθετα στη πρώτη έδρα, δείξτε ότι η γωνία εκτροπής δίνεται από τη σχέση : $\delta=(n-1)A$

Λύση



Γενικά δύο επίπεδες τεμνόμενες διαφανείς πλάκες που χωρίζουν διαφανές μέσο από το περιβάλλον (συνήθως του αέρα), αποτελούν το **οπτικό πρίσμα**.

Ένα επίπεδο κάθετο στην ακμή της δίεδρης γωνίας του πρίσματος ονομάζεται **κύρια τομή** και η επίπεδη γωνία A που σχηματίζουν τα ίχνη των εδρών του πρίσματος στην κύρια τομή ονομάζονται **διαθλαστική γωνία.**.

α) Από τα γεωμετρικά στοιχεία του πρίσματος προκύπτει ότι στο τρίγωνο ΚΛΜ η γωνία δ είναι η εξωτερική γωνία, οπότε θα είναι ίση με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών γωνιών, δηλαδή:

$$\delta = (\alpha - \beta) + (\alpha' - \gamma) \qquad \textbf{(1)}$$

Επίσης το τετράπλευρο ΑΚΜΛ έχει άθροισμα γωνιών 360^o οπότε προκύπτει:

$$\hat{A} + \hat{K} + \hat{M} + \hat{\Lambda} = 360^o \Rightarrow A + 90^o + \hat{M} + 90^o = 360^o \Rightarrow A + \hat{M} = 180^o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{M} = 180^o - A \qquad \textbf{(2)}$$

Και επομένως από το τρίγωνο ΚΜΛ προκύπτει:

$$\beta + \hat{M} + \gamma = 180^o \overset{(2)}{\Rightarrow} \beta + 180^o - A + \gamma = 180^o \Rightarrow A = \beta + \gamma \qquad \textbf{(3)}$$

Οπότε η **(1)** λόγω της **(3)** δίνει:

$$\delta = \alpha + \alpha' - (\beta + \gamma) \overset{(3)}{\Rightarrow} \delta = \alpha + \alpha' - A \qquad \textbf{(4)}$$

όπου α είναι η γωνία πρόσπτωσης και α΄ η γωνία ανάδυσης , δηλαδή η γωνία της ακτίνας που βγαίνει από το πρίσμα και της κάθετης στην έδρα.

Εφόσον θεωρείται συμμετρική πορεία της ακτίνας μέσα στο πρίσμα, δηλαδή η ακτίνα εντός του πρίσματος είναι κάθετη στο επίπεδο που διχοτομεί τη γωνία Α, θα είναι η γωνία πρόσπτωσης α ίση με τη γωνία ανάδυσης α΄ (δηλαδή α=α΄) και αυτό αντιστοιχεί στη μικρότερη τιμή της γωνίας εκτροπής δ και λέγεται **γωνία ελάχιστης εκτροπής**.

Επομένως αφού α=α΄ η **(4)** δίνει:

$$\delta = 2\alpha - A \Rightarrow \alpha = \frac{A + \delta}{2} \qquad \textbf{(5)}$$

Εφαρμόζοντας στη συνέχεια το νόμο του Snell στο σημείο εισόδου Κ της ακτίνας μέσα στο πρίσμα προκύπτει:

$$n_{\alpha\acute{\epsilon}\rho\alpha}\sin\alpha = n\sin\beta \Rightarrow \sin\alpha = n\sin\beta \qquad \textbf{(6)}$$

Αλλά λόγω συμμετρίας επειδή α=α΄ θα είναι και β=γ και η **(3)** δίνει :

$$A = 2\beta \Rightarrow \beta = \frac{A}{2} \qquad \textbf{(7)}$$

Άρα η **(6)** λόγω των **(5)** και **(7)** γίνεται:

$$\sin\frac{A + \delta}{2} = n\sin\frac{A}{2}$$

Η τελευταία σχέση είναι πολύ χρήσιμη για τον προσδιορισμό του δείκτη διάθλασης ενός υλικού με μεγάλη ακρίβεια , με μετρήσεις της ελάχιστης εκτροπής και της διαθλαστικής γωνίας.

β) Η γωνία ελάχιστης εκτροπής μιας ακτίνας σε πρίσμα με διαθλαστική γωνία Α=60° και δείκτη διάθλασης n=1,60 είναι σύμφωνα με το παραπάνω αποτέλεσμα:

$$\sin\frac{A+\delta}{2} = n\sin\frac{A}{2} \Rightarrow \sin\frac{60+\delta}{2} = 1{,}6\sin 30^{o} \Rightarrow \sin\frac{60+\delta}{2} = 0{,}8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{60+\delta}{2} = \sin^{-1}0{,}8 = 53^{o} \Rightarrow 60+\delta = 2\cdot 53 \Rightarrow \delta = 106-60 \Rightarrow \delta = 46^{o}$$

γ) Αν η πρόσπτωση γίνεται σχεδόν κάθετα στην πρώτη έδρα είναι φανερό ότι η γωνία διάθλασης β θα είναι πολύ μικρή. Επίσης επειδή Α=β+γ , σύμφωνα με τη σχέση **(3)** και οι γωνίες Α και β είναι μικρές οπότε και η γωνία γ θα είναι μικρή. Εφαρμόζοντας το νόμο του Snell στο σημείο εισόδου Κ και στο σημείο εξόδου Λ της ακτίνας στο πρίσμα προκύπτει:

$$\begin{aligned} &K: \; n_{\alpha\acute{\varepsilon}\rho\alpha}\sin\alpha = n\sin\beta \Rightarrow \sin\alpha = n\sin\beta \\ &\Lambda: \; n\sin\gamma = n_{\alpha\acute{\varepsilon}\rho\alpha}\sin\alpha' \Rightarrow n\sin\gamma = \sin\alpha' \end{aligned} \qquad \textbf{(8)}$$

Επειδή όμως οι γωνίες α,β,γ,α΄ είναι πολύ μικρές σύμφωνα με την προσέγγιση από το ανάπτυγμα Mclaurin θα είναι $\sin\alpha \cong \alpha$, $\sin\beta \cong \beta$, $\sin\gamma \cong \gamma$, $\sin\alpha' \cong \alpha'$ και επομένως οι σχέσεις **(8)** δίνουν :

$$n\beta = \alpha \quad \text{και} \quad n\gamma = \alpha' \qquad \textbf{(9)}$$

Άρα η σχέση **(4)** λόγω των **(9)** και με τη βοήθεια της **(3)** δίνει:

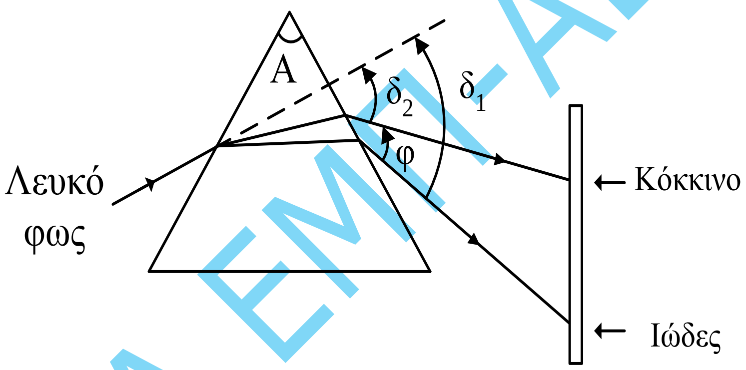
$$\delta = n\beta + n\gamma - A \Rightarrow \delta = n(\beta+\gamma) - A \overset{(3)}{\Rightarrow} \delta = nA - A \Rightarrow \delta = (n-1)A$$

Η τελευταία σχέση λέγεται **τύπος των λεπτών πρισμάτων** και παρατηρείται ότι η γωνία εκτροπής εξαρτάται από τη διαθλαστική γωνία, το υλικό του πρίσματος και από τη γωνία πρόσπτωσης. Έτσι για ένα πρίσμα με δοσμένη διαθλαστική γωνία και δείκτη διάθλασης, η εκτροπή εξαρτάται μόνο από τη γωνία πρόσπτωσης.

ΘΕΜΑ 19

Πρίσμα έχει γωνία κορυφής Α ίση με 10^o. Το πρίσμα είναι κατασκευασμένο από γυαλί το οποίο έχει δείκτη διάθλασης $n_1 = 1{,}70$ για το άκρο του ορατού φάσματος του φωτός στο ιώδες (400nm) και $n_2 = 1{,}60$ για το άλλο άκρο του ορατού φάσματος του φωτός στο ερυθρό (750nm). Αν μία ακτίνα λευκού φωτός διαθλαστεί από το πρίσμα , βρείτε τις γωνίες εκτροπής για τα δυο αυτά μήκη κύματος και το γωνιακό εύρος του ορατού φάσματος όπως αυτό εξέρχεται από το πρίσμα.
Δίνεται: $\delta = (n-1)A$
(Τμήμα Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Η γωνία εκτροπής για το ιώδες είναι :

$$\delta_1 = (n_1 - 1)A = (1{,}7 - 1)\cdot 10^o = 0{,}7 \cdot 10^o \Rightarrow \delta_1 = 7^o$$

Ενώ για το ερυθρό είναι :

$$\delta_2 = (n_2 - 1)A = (1{,}6 - 1)\cdot 10^o = 0{,}6 \cdot 10^o \Rightarrow \delta_2 = 6^o$$

Επομένως το γωνιακό εύρος του ορατού φάσματος, όπως αυτό εξέρχεται από το πρίσμα θα είναι η διαφορά μεταξύ των γωνιών εκτροπής για τα δύο αυτά χρώματα που είναι στα άκρα του ορατού φάσματος. Δηλαδή :

$$\varphi = \delta_1 - \delta_2 \Rightarrow \varphi = 1^o$$

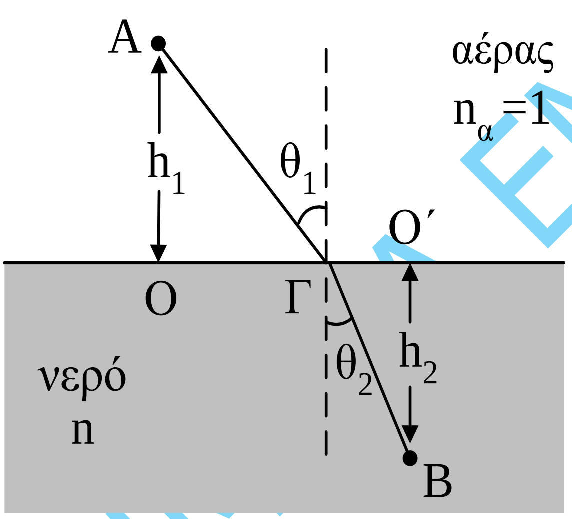
ΘΕΜΑ 20

Να αποδειχθεί ότι ο χρόνος που απαιτείται ώστε το φως να διανύσει την απόσταση, από μία σημειακή πηγή A στον αέρα που είναι σε απόσταση h_1 πάνω από την επιφάνεια του νερού, σε ένα σημείο B που βρίσκεται κατά h_2 κάτω από την επιφάνεια του νερού, δίνεται από τη σχέση :

$$t = \frac{h_1 \cos^{-1}\theta_1}{c} + \frac{h_2 n \cos^{-1}\theta_2}{c}$$

όπου n ο δείκτης διάθλασης του νερού, θ_1 η γωνία πρόσπτωσης , θ_2 η γωνία διάθλασης και c η ταχύτητα του φωτός στο κενό.

Λύση



Η χρονική διάρκεια της διαδρομής ΑΓ της ακτίνας στον αέρα είναι:

$$t_1 = \frac{A\Gamma}{\upsilon_1}$$

όπου η ταχύτητα του φωτός στον αέρα βρίσκεται ως εξής :

$$n_\alpha = \frac{c}{\upsilon_1} \Rightarrow 1 = \frac{c}{\upsilon_1} \Rightarrow \upsilon_1 = c$$

και από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΓ είναι:

$$\cos\theta_1 = \frac{h_1}{A\Gamma} \Rightarrow A\Gamma = \frac{h_1}{\cos\theta_1} \Rightarrow A\Gamma = h_1\cos^{-1}\theta_1$$

Άρα : $$t_1 = \frac{h_1 \cos^{-1}\theta_1}{c}$$

Ενώ η χρονική διάρκεια της διαδρομής ΓΒ της ακτίνας στο νερό είναι:

$$t_2 = \frac{\Gamma B}{\upsilon_2}$$

όπου η ταχύτητα του φωτός στο νερό βρίσκεται από το δείκτη διάθλασης του νερού ως :

$$n = \frac{c}{\upsilon_2} \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{c}{n}$$

και από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΟ΄Β είναι:

$$\cos\theta_2 = \frac{h_2}{\Gamma B} \Rightarrow \Gamma B = \frac{h_2}{\cos\theta_2} \Rightarrow \Gamma B = h_2 \cos^{-1}\theta_2$$

Άρα : $$t_2 = \frac{h_2 \cos^{-1}\theta_2}{c/n} \Rightarrow t_2 = \frac{h_2 n \cos^{-1}\theta_2}{c} \qquad \textbf{(2)}$$

Επομένως ο ολικός χρόνος της διαδρομής ΑΒ της ακτίνας του φωτός είναι:

$$t_2 = t_1 + t_2 \overset{(1),(2)}{\Rightarrow} t = \frac{h_1 \cos^{-1}\theta_1}{c} + \frac{h_2 n \cos^{-1}\theta_2}{c}$$