ΘΕΩΡΙΑ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

1. Βασικά Αξιώματα Ειδικής Θεωρίας Σχετικότητας - Μετασχηματισμοί Lorentz

Σύμφωνα με την Κλασσική Μηχανική του Newton μια σταθερή δύναμη δύναται να προκαλέσει μια χωρίς όριο αύξηση της ταχύτητας ενός σώματος. Έτσι σύμφωνα με την Κλασσική Μηχανική η ταχύτητα ενός σώματος μπορεί να είναι μεγαλύτερη της ταχύτητας του φωτός.
Για τον λόγο αυτόν το 1905 ο Einstein ανέπτυξε την ειδική θεωρία της σχετικότητας με σκοπό να περιγράψει την κίνηση των σωμάτων που κινούνται με ταχύτητα συγκρίσιμη με αυτή του φωτός και να καλύψει το κενό της Κλασσικής Μηχανικής.
Η ειδική θεωρία της σχετικότητας βασίζεται σε δυο θεμελιώδη αξιώματα:

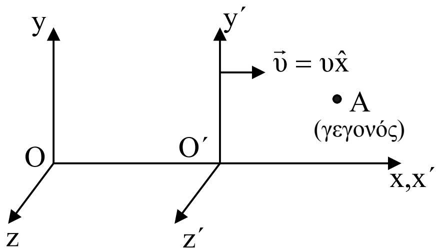
α) Όλοι οι νόμοι της Φυσικής είναι ίδιοι για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς **(αρχή της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας).**
β) Η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι η ανώτερη τιμή ταχύτητας στη φύση $(c = 3\cdot 10^8\,m/sec)$ και είναι ίδια για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς **(αναλλοίωτο της ταχύτητας του φωτός)** .

Συνεπώς σύμφωνα με την ειδική θεωρία της σχετικότητας όταν η ταχύτητα ενός σώματος προσεγγίζει την ταχύτητα του φωτός, υπό την επίδραση σταθερής δύναμης, τότε αυξάνεται η μάζα του και ενδίδει λιγότερο στην επιτάχυνση της δύναμης αυτής. Για το λόγο αυτό ορίζεται η **σχετικιστική μάζα m_r** ενός σωματίου ως:

$$\boxed{m_r = \frac{m_o}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \gamma m_o} \qquad \textbf{(11-1)}$$

όπου $\gamma = 1/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2} = 1/\sqrt{1-\beta^2} > 1$, $\beta = \upsilon/c < 1$, υ η ταχύτητα του σωματίου ως προς ακίνητο παρατηρητή και m_o η μάζα του σωματίου ως προς παρατηρητή για τον οποίο το σωμάτιο είναι ακίνητο **(μάζα ηρεμίας).**

Στην ειδική θεωρία της σχετικότητας εισάγεται η έννοια του **χωροχρόνου (x,y,z,t)** σύμφωνα με τον οποίο ένα γεγονός περιγράφεται συνολικά από τέσσερις συντεταγμένες, από τις τρεις χωρικές συντεταγμένες και από το χρόνο.



Σχήμα 11.1

Έστω ένα γεγονός που πραγματοποιείται σε ένα σημείο A του χωροχρόνου και δυο αδρανειακά συστήματα αναφοράς (παρατηρητές), το ακίνητο σύστημα Oxyz και το $O'x'y'z'$ κινούμενο ως προς το πρώτο με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon} = \upsilon\hat{x}$ συγκρίσιμη με την ταχύτητα του φωτός.

Αν το γεγονός έχει συντεταγμένες (x,y,z,t) ως προς το Oxyz και (x', y', z', t') ως προς το $O'x'y'z'$ και τη χρονική στιγμή $t = t' = 0$ τα δυο συστήματα συμπίπτουν τότε οι σχέσεις που συνδέουν τις συντεταγμένες των δυο συστημάτων είναι:

$$\boxed{x' = \gamma(x - \upsilon t), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\upsilon}{c^2}x\right)} \qquad \textbf{(11-2)}$$

Οι σχέσεις **(11-2)** λέγονται **μετασχηματισμοί Lorentz** και αποκαλύπτουν την άμεση εξάρτηση του χώρου και του χρόνου.
Επειδή το σύστημα Oxyz κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon} = -\upsilon\hat{x}$ ως προς το $O'x'y'z'$ μπορούν να υπολογιστούν οι **αντίστροφοι μετασχηματισμοί Lorentz,** δηλαδή οι συντεταγμένες (x,y,z,t) του γεγονότος A στο Oxyz σύστημα συναρτήσει των συντεταγμένων (x', y', z', t') στο $O'x'y'z'$ αντικαθιστώντας στην **(11-2)** το υ με –υ και εναλλάσσοντας τα τονούμενα και άτονα μεγέθη. Επομένως:

$$\boxed{x = \gamma(x' + \upsilon t'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma\left(t' + \frac{\upsilon}{c^2}x'\right)} \qquad \textbf{(11-3)}$$

☞ **Παρατηρήσεις:**

1) Αν το κινούμενο σύστημα $O'x'y'z'$ κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon} = \upsilon\hat{y}$ κατά τη διεύθυνση y τότε οι μετασχηματισμοί **(11-2)** παίρνουν την μορφή:

$$x' = x, \quad y' = \gamma(y - \upsilon t), \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\upsilon}{c^2}y\right)$$

Ανάλογα ισχύουν όταν $\vec{\upsilon} = \upsilon\hat{z}$.

2) Για διαφορές των χωροχρονικών συντεταγμένων (Δx, Δy,Δz,Δt) και για απειροστές διαφορές αυτών ισχύουν σχέσεις μετασχηματισμού ανάλογες των **(11-2)** και **(11-3)**. Δηλαδή:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \upsilon\Delta t), \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z, \quad \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x\right) \quad \text{και}$$

$$dx' = \gamma(dx - \upsilon dt), \quad dy' = dy, \quad dz' = dz, \quad dt' = \gamma\left(dt - \frac{\upsilon}{c^2}dx\right)$$

2. Συνέπειες Μετασχηματισμών Lorentz

α) Ταυτοχρονικότητα

Σύμφωνα με τη θεωρία της σχετικότητας η έννοια του ταυτόχρονου δεν είναι απόλυτη, αλλά εξαρτάται από την κίνηση του παρατηρητή.
Έτσι αν δυο γεγονότα γίνονται ταυτόχρονα σε ακίνητο σύστημα Oxyz, δηλαδή Δt=0 τότε στο κινούμενο σύστημα $O'x'y'z'$ σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς Lorentz είναι:

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x\right) \overset{\Delta t\,=\,0}{\Rightarrow} \quad \Delta t' = -\gamma\frac{\upsilon}{c^2}\Delta x$$

Αλλά: $$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \upsilon\Delta t) \overset{\Delta t\,=\,0}{\Rightarrow} \quad \Delta x' = \gamma\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}$$

οπότε η παραπάνω γίνεται:

$$\boxed{\Delta t' = -\frac{\upsilon}{c^2}\Delta x' \neq 0} \qquad \textbf{(11-4)}$$

Άρα τα δύο γεγονότα δεν είναι ταυτόχρονα ως προς το κινούμενο σύστημα $O'x'y'z'$ και μάλιστα η διαφορά χρόνου αυτών εξαρτάται από την απόστασή τους στο $O'x'y'z'$. Το αρνητικό πρόσημο της **(11-4)** υποδηλώνει ποιο γεγονός γίνεται πρώτο.
Αντίστοιχα δυο γεγονότα ταυτόχρονα στο $O'x'y'z'$ (δηλαδή Δt΄=0) δεν θα είναι ταυτόχρονα ως προς το ακίνητο σύστημα Oxyz (δηλαδή $\Delta t \neq 0$).

β) Διαστολή χρόνου

Έστω ένα φαινόμενο το οποίο πραγματοποιείται στην ίδια θέση (x,0,0) ενός ακίνητου συστήματος αναφοράς Oxyz, δηλαδή Δx=0. Αν Δt είναι η χρονική διάρκεια του γεγονότος ως προς το Oxyz, τότε η διάρκειά του ως προς το κινούμενο σύστημα $O'x'y'z'$ είναι σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς Lorentz **(11-2)**:

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x\right) \overset{\Delta x=0}{\Rightarrow} \boxed{\Delta t' = \gamma\Delta t} \qquad \textbf{(11-5)}$$

Άρα αφού γ>1 είναι $\Delta t' > \Delta t$.
Αντίθετα αν το γεγονός συμβαίνει στην ίδια θέση κινούμενου συστήματος $O'x'y'z'$ (δηλαδή $\Delta x' = 0$) με την ίδια διαδικασία προκύπτει ότι η χρονική του διάρκεια ως προς το Oxyz είναι: $\Delta t = \gamma\Delta t'$ **κι επειδή γ>1 είναι Δt>Δ**t'.
Άρα κάθε παρατηρητής που κινείται ως προς τη συσκευή μέτρησης (ρολόι) της χρονικής διάρκειας του γεγονότος μετρά μεγαλύτερη διάρκεια ως προς αυτόν που είναι ακίνητος ως προς το ρολόι.

✎ Εφαρμογή

Ένας αστροναύτης σε ένα διαστημόπλοιο ταξιδεύει με ταχύτητα 0,99c και αντιλαμβάνεται τη χρονική διάρκεια του ταξιδιού του ίση με 2y (y:year). Ποια είναι η διάρκεια του ταξιδιού σύμφωνα με έναν παρατηρητή στη γη;

Λύση

Λόγω διαστολής του χρόνου προκύπτει:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}} \Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1 - (0{,}99c)^2 / c^2}} (2y) \Rightarrow \Delta t = 14 \ \text{years}$$

Σύμφωνα με το αποτέλεσμα αυτό είναι δυνατόν κάποιος κινούμενος πολύ γρήγορα, να πραγματοποιήσει ένα πολύ μακρύ ταξίδι χωρίς να υποστεί τις συνέπειες του χρόνου (γήρανση).

γ) Συστολή μήκους

Έστω μια ράβδος μήκους L η οποία είναι ακίνητη κατά μήκος του άξονα x ενός ακίνητου συστήματος αναφοράς Oxyz. Αν τα άκρα της βρίσκονται στις θέσεις x_1 και x_2 είναι $L = \Delta x = x_2 - x_1$. Ένας παρατηρητής στο σύστημα $O'x'y'z'$ κινείται με ταχύτητα $\upsilon \hat{x}$ ως προς το Oxyz και μετρά το μήκος της ράβδου, μετρώντας τις θέσεις των άκρων x_1' και x_2' ταυτόχρονα (δηλαδή $\Delta t' = 0$). Το μήκος αυτό καθορίζεται ως $L' = \Delta x' = x_2' - x_1'$ και σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς Lorentz είναι:

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + \upsilon \Delta t') \overset{\Delta t' = 0}{\Rightarrow} \Delta x = \gamma \Delta x' \quad \text{ή} \quad L = \gamma L' \Rightarrow \boxed{L' = \frac{L}{\gamma}} \qquad \textbf{(11-6)}$$

Άρα αφού γ>1 είναι $L' < L$.
Στην περίπτωση που η ράβδος L' είναι ακίνητη στον άξονα x' του συστήματος $O'x'y'z'$ με την ίδια διαδικασία προκύπτει ότι $L = L'/\gamma$ δηλαδή $L < L'$.
Συνεπώς κάθε παρατηρητής που κινείται παράλληλα στη ράβδο μετρά μήκος μικρότερο κατά παράγοντα γ από το μήκος αυτής στο σύστημα ως προς το οποίο είναι ακίνητη (μήκος ηρεμίας).

☞ Παρατήρηση

Αν ο παρατηρητής κινείται κάθετα στη ράβδο τότε το μήκος αυτής δεν αλλάζει. Ενώ αν η ράβδος σχηματίζει γωνία με τον άξονα x, ως προς τον οποίο κινείται ο παρατηρητής τότε συστολή μήκους παρατηρείται μόνο στην οριζόντια συνιστώσα της ενώ η κάθετη παραμένει αναλλοίωτη.

Εφαρμογή

Διαστημόπλοιο μήκους 150 m πετάει ως προς ακίνητο παρατηρητή με ταχύτητα 0,5c. Ποιο είναι το μήκος του διαστημοπλοίου όπως το αντιλαμβάνεται ο ακίνητος παρατηρητής;

Λύση

Λόγω συστολής του μήκους προκύπτει:

$$L=\frac{L'}{\gamma}=\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}\;\;L'=\sqrt{1\text{-}(0,5)^2}\,(150\text{m})\Rightarrow L=130\text{m}$$

Δηλαδή ο ακίνητος παρατηρητής βλέπει το διαστημόπλοιο να έχει μικρότερο μήκος.

3. Μετασχηματισμός Ταχυτήτων και Επιταχύνσεων Lorentz

Έστω ότι ένα σωματίδιο κινείται με ταχύτητα που έχει συνιστώσες (u_x, u_y, u_z) ως προς ένα ακίνητο σύστημα αναφοράς Oxyz, ενώ ως προς κινούμενο σύστημα $O'x'y'z'$ που κινείται με ταχύτητα $\upsilon\hat{x}$ ως προς το Oxyz έχει συνιστώσες (u'_x, u'_y, u'_z) .Οι σχέσεις που συνδέουν τις συνιστώσες της ταχύτητας στα δυο συστήματα είναι σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς Lorentz:

$$u'_x=\frac{dx'}{dt'}=\frac{\gamma(dx-\upsilon dt)}{\gamma\left(dt-\frac{\upsilon}{c^2}dx\right)}=\frac{\frac{dx}{dt}-\upsilon}{1-\frac{\upsilon}{c^2}\frac{dx}{dt}}\Rightarrow\boxed{u'_x=\frac{u_x-\upsilon}{1-\frac{\upsilon}{c^2}u_x}}\qquad\textbf{(11-7)}$$

$$u'_y=\frac{dy'}{dt'}=\frac{dy}{\gamma\left(dt-\frac{\upsilon}{c^2}dx\right)}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma\left(1-\frac{\upsilon}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)}\Rightarrow\boxed{u'_y=\frac{u_y}{\gamma\left(1-\frac{\upsilon}{c^2}u_x\right)}}\qquad\textbf{(11-8)}$$

$$u'_z=\frac{dz'}{dt'}=\frac{dz}{\gamma\left(dt-\frac{\upsilon}{c^2}dx\right)}=\frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma\left(1-\frac{\upsilon}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)}\Rightarrow\boxed{u'_z=\frac{u_z}{\gamma\left(1-\frac{\upsilon}{c^2}u_x\right)}}\qquad\textbf{(11-9)}$$

Οι σχέσεις **(11-7)**, **(11-8)** και **(11-9)** αποτελούν τους **μετασχηματισμούς ταχυτήτων Lorentz.**
Για τον υπολογισμό των συνιστωσών της ταχύτητας του σωματιδίου στο Oxyz σύστημα συναρτήσει των αντίστοιχων συνιστωσών στο κινούμενο σύστημα $O'x'y'z'$ **(αντίστροφοι μετασχηματισμοί ταχυτήτων Lorentz)** στις παραπάνω αντικαθιστάται το υ με –υ και εναλλάσσονται τα τονούμενα και άτονα μεγέθη.
Επομένως:

$$\boxed{u_x = \frac{u'_x + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon}{c^2}u'_x}, \quad u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{\upsilon}{c^2}u'_x\right)} \quad \text{και} \quad u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left(1 + \frac{\upsilon}{c^2}u'_x\right)}} \qquad \textbf{(11-10)}$$

Αν τώρα (α_x, α_y ,α_z) είναι οι συνιστώσες της επιτάχυνσης του σωματιδίου στο σύστημα Oxyz και $(\alpha'_x, \alpha'_y, \alpha'_z)$ στο κινούμενο σύστημα $O'x'y'z'$ τότε οι σχέσεις που συνδέουν τις συνιστώσες της επιτάχυνσης στα δυο συστήματα είναι:

$$\alpha'_x = \frac{du'_x}{dt'} = \frac{du'_x}{dt}\frac{dt}{dt'} \overset{(11-7)}{=} \frac{d}{dt}\left(\frac{u_x - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x}\right)\frac{dt}{dt'} \qquad \textbf{(11-11)}$$

Αλλά:
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u_x - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x}\right) = \frac{\frac{du_x}{dt}\left(1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x\right) - (u_x - \upsilon)\left(-\frac{\upsilon}{c^2}\right)\frac{du_x}{dt}}{\left(1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x\right)^2} =$$

$$= \frac{\alpha_x\left(1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x + \frac{\upsilon}{c^2}u_x - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x\right)^2} = = \frac{\alpha_x\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x\right)^2} = \frac{\frac{\alpha_x}{\gamma^2}}{\left(1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x\right)^2}$$

και $\dfrac{dt'}{dt} = \dfrac{\gamma\left(dt - \frac{\upsilon}{c^2}dx\right)}{dt} = \gamma\left(1 - \dfrac{\upsilon}{c^2}u_x\right)$ δηλαδή $\dfrac{dt}{dt'} = \dfrac{1}{\gamma\left(1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x\right)}$

Άρα η **(11-11)** γράφεται:
$$\boxed{\alpha'_x = \frac{\alpha_x}{\gamma^3\left(1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x\right)^3}} \qquad \textbf{(11-12)}$$

$$\alpha'_y = \frac{du'_y}{dt'} = \frac{du'_y}{dt}\frac{dt}{dt'} \overset{(11-8)}{=} \frac{d}{dt}\left(\frac{u_y}{\gamma\left(1-\frac{\upsilon}{c^2}u_x\right)}\right)\frac{1}{\gamma\left(1-\frac{\upsilon}{c^2}u_x\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha'_y = \frac{1}{\gamma^2\left(1-\frac{\upsilon}{c^2}u_x\right)^2}\left(\alpha_y + \alpha_x\frac{\upsilon u_y/c^2}{1-\frac{\upsilon}{c^2}u_x}\right)} \qquad \textbf{(11-13)}$$

Ομοίως με την παραπάνω προκύπτει:

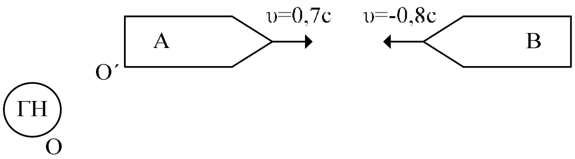
$$\boxed{\alpha'_z = \frac{1}{\gamma^2\left(1-\frac{\upsilon}{c^2}u_x\right)^2}\left(\alpha_z + \alpha_x\frac{\upsilon u_z/c^2}{1-\frac{\upsilon}{c^2}u_x}\right)} \qquad \textbf{(11-14)}$$

Οι σχέσεις **(11-12)**, **(11-13)** και **(11-14)** αποτελούν τους **μετασχηματισμούς επιταχύνσεων Lorentz.**

✎ Εφαρμογή 1

Ένας παρατηρητής ακίνητος στη γη βλέπει έναν πύραυλο Α να κινείται με ταχύτητα 0,7c με κατεύθυνση προς πύραυλο Β ο οποίος κινείται με ταχύτητα 0,8c με κατεύθυνση προς τον Α. Ποια είναι η ταχύτητα του πυραύλου Β με την οποία παρατηρητής πάνω στον πύραυλο Α βλέπει να τον προσεγγίζει;

<u>Λύση</u>



Θεωρώντας τον πύραυλο Α ως το κινούμενο σύστημα αναφοράς, το οποίο κινείται με ταχύτητα υ = 0,7c ως προς το ακίνητο σύστημα της Γης τότε η ταχύτητα του πυραύλου Β στο ακίνητο σύστημα της Γης είναι u = -0,8c. Σύμφωνα με την εξίσωση **(11-7)** η ταχύτητα u' του πυραύλου Β ως προς τον πύραυλο Α είναι:

$$u' = \frac{u - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}u} = \frac{-0{,}8c - 0{,}7c}{1 - (0{,}7c)(-0{,}8c)/c^2} \Rightarrow u' = -0{,}96c$$

✎ Εφαρμογή 2

Ένα σωματίδιο κινείται με ταχύτητα $\vec{u} = 0{,}3c\hat{x} + 0{,}4c\hat{y}$ στο ακίνητο σύστημα του εργαστηρίου Oxyz. Ένα κινούμενο σύστημα $O'x'y'z'$ έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon} = 0{,}5c\hat{x}$ ως προς το Oxyz. Προσδιορίστε το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου και τη γωνία μεταξύ της ταχύτητάς του και του άξονα x για τα δυο συστήματα αναφοράς.

Λύση

Στο ακίνητο σύστημα του εργαστηρίου Oxyz είναι:
$u_x = 0{,}3c$ και $u_y = 0{,}4c$ οπότε :

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{(0{,}3c)^2 + (0{,}4c)^2} \Rightarrow u = 0{,}5c$$

και $$\tan\theta = \frac{u_y}{u_x} = \frac{0{,}4c}{0{,}3c} = 1{,}33 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(1{,}33) \Rightarrow \theta = 53^o$$

Στο κινούμενο σύστημα $O'x'y'z'$ σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς ταχυτήτων Lorentz είναι:

$$u'_x = \frac{u_x - \upsilon}{1 - \upsilon u_x / c^2} = \frac{0{,}3c - 0{,}5c}{1 - (0{,}5c)(0{,}3c)/c^2} = \frac{-0{,}2c}{0{,}85} \Rightarrow u'_x = -0{,}24c$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0{,}5c)^2/c^2}} = 1{,}15$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - \upsilon u_x / c^2)} = \frac{0{,}4c}{1{,}15(1 - (0{,}5c)(0{,}3c)/c^2)} = \frac{0{,}4c}{0{,}9775} \Rightarrow u'_y = 0{,}41c$$

Επομένως:

$$u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y} = \sqrt{(0{,}24c)^2 + (0{,}41c)^2} \Rightarrow u' = 0{,}48c$$

και $$\tan\theta' = \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{0{,}41c}{-0{,}24c} = -1{,}71 \Rightarrow \theta' = \tan^{-1}(-1{,}71) \Rightarrow \theta' = 60^o$$

4. Σχετικιστική Ορμή, Δύναμη και Ενέργεια

Η **σχετικιστική ορμή** ενός σωματιδίου μάζας ηρεμίας m_o και ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ είναι σύμφωνα με την **(11-1)**:

$$\boxed{\vec{p} = m_r\vec{\upsilon} = \frac{m_o}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\vec{\upsilon} = \gamma\, m_o\vec{\upsilon}} \qquad \textbf{(11-15)}$$

☞ ***Παρατηρήσεις***

1) Για $\upsilon/c \to 0$ (δηλαδή $\upsilon << c$) η **(11-15)** δίνει $\vec{p} \to m_o\vec{\upsilon}$, την κλασσική τιμή της ορμής.

2) Για $\upsilon \to c$ η **(11-15)** δίνει $\vec{p} \to \infty$.

3) Η σχετικιστική ορμή διατηρείται στις κρούσεις μεταξύ σωματιδίων.

Η **σχετικιστική δύναμη** $\vec{F}$ ενός σωματιδίου ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του. Δηλαδή:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m_o\vec{\upsilon})} \qquad \textbf{(11-16)}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα έργου – κινητικής ενέργειας η κινητική ενέργεια ενός σωματιδίου ισούται με το έργο που απαιτείται για την επιτάχυνσή του από την ηρεμία σε μια τελική ταχύτητα υ. Δηλαδή: $K = \int_0^x F dx.$

Αλλά $F = dp/dt$ και $dx = \upsilon dt$ οπότε:

$K = \int_0^t \frac{dp}{dt}\upsilon dt = \int_0^p \upsilon dp$ και από την εξίσωση **(11-15)**:

$$p = \frac{m_o\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \Rightarrow \upsilon = \frac{p/m_o}{\sqrt{1+(p/m_oc)^2}}$$

Επομένως: $$K = \int_0^p \frac{p/m_o}{\sqrt{1+(p/m_oc)^2}}dp = m_oc^2\left\{\left[1+\left(\frac{p}{m_oc}\right)^2\right]^{1/2} - 1\right\}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω την ορμή p συναρτήσει της ταχύτητας υ σύμφωνα με την **(11-15)** προκύπτει τελικά:

$$\boxed{K = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - m_o c^2 = (\gamma - 1) m_o c^2} \qquad \textbf{(11-17)}$$

Ο όρος $m_o c^2$ στην εξίσωση **(11-17)** είναι ανεξάρτητος της ταχύτητας και καλείται **ενέργεια ηρεμίας E_o** του σωματιδίου. Δηλαδή:

$$\boxed{E_o = m_o c^2} \qquad \textbf{(11-18)}$$

Η **(11-18)** αποτελεί την σχέση ισοδυναμίας μάζας και ενέργειας και είναι η περίφημη εξίσωση του Einstein , σύμφωνα με την οποία επειδή το c^2 είναι ένας πάρα πολύ μεγάλος αριθμός, ένα μικρό ποσό μάζας αντιστοιχεί σε ένα μεγάλο ποσό ενέργειας.

Η **ολική ενέργεια** του σωματιδίου ισούται με το άθροισμα της κινητικής του ενέργειας και της ενέργειας ηρεμίας του. Δηλαδή :

$$\boxed{E = K + E_o = (\gamma - 1) m_o c^2 + m_o c^2 = \gamma\, m_o c^2} \qquad \textbf{(11-19)}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις **(11-19)** και **(11-15)** μπορεί να εκφραστεί η ολική ενέργεια E συναρτήσει της ορμής p. Είναι:

$$E^2 - p^2 c^2 \overset{(11-15),(11-19)}{=} (\gamma\, m_o c^2)^2 - (\gamma\, m_o \upsilon)^2 c^2 = (\gamma m_o c^2)^2 \left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right) =$$

$$= (\gamma m_o c^2)^2 \frac{1}{\gamma^2} = m_o^2 c^4 \Rightarrow \boxed{E^2 = p^2 c^2 + m_o^2 c^4} \qquad \textbf{(11-20)}$$

☞ **Παρατηρήσεις**

1) Στην επίλυση προβλημάτων αλληλεπίδρασης σωματιδίων εφαρμόζονται οι αρχές διατήρησης της σχετικιστικής ορμής και της ολικής σχετικιστικής ενέργειας.

2) Αν (p_x, p_y, p_z) είναι οι συνιστώσες της ορμής και E η ενέργεια ενός σωματιδίου ως προς ακίνητο σύστημα αναφοράς Oxyz, ενώ ως προς σύστημα $O'x'y'z'$ που κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon} = \upsilon \hat{x}$ ως προς το Oxyz είναι (p'_x, p'_y, p'_z) και E' τότε οι σχέσεις που συνδέουν τα μεγέθη στα δυο συστήματα αποδεικνύεται ότι είναι:

$$\boxed{p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{\upsilon}{c^2} E\right), \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad E' = \gamma\,(E - \upsilon p_x)} \qquad \textbf{(11-21)}$$

Οι σχέσεις **(11-21)** αποτελούν **τους μετασχηματισμούς της ορμής και της ενέργειας.** Για μια εύκολη εξαγωγή των σχέσεων **(11-21)** υπογραμμίστε ότι αυτές προκύπτουν από τις σχέσεις μετασχηματισμού Lorentz του χωροχρόνου **(11-2)** μέσω των αντιστοιχιών:

$$x \leftrightarrow p_x, \quad y \leftrightarrow p_y, \quad z \leftrightarrow p_z \quad \text{και} \quad t \leftrightarrow E/c^2$$

✎ Εφαρμογή 1

Ποια είναι η ορμή ενός σωματιδίου μάζας m και ταχύτητας 0,8c συναρτήσει της κλασσικής τιμής $m_o\upsilon$;

Λύση

Είναι: $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}8c)^2/c^2}} = 1{,}67$$

Άρα σύμφωνα με τον ορισμό της σχετικιστικής ορμής **(11-15)** είναι:

$$p = \gamma\, m_o \upsilon = 1{,}67\, m_o \upsilon$$

✎ Εφαρμογή 2

Για ποια ταχύτητα είναι η κινητική ενέργεια ενός σωματιδίου ίση με την ενέργεια ηρεμίας του;

Λύση

Αν $K = E_o = m_o c^2$ τότε η ολική ενέργεια είναι:

$$E = K + E_o = m_o c^2 + m_o c^2 = 2m_o c^2$$

Αλλά σύμφωνα με την **(11-19)**: $E = \gamma m_o c^2$ οπότε:

$$\gamma = 2 \Rightarrow \gamma^2 = 4 \Rightarrow \frac{1}{1-\upsilon^2/c^2} = 4 \Rightarrow 1-\frac{\upsilon^2}{c^2} = 0{,}25 \Rightarrow \frac{\upsilon^2}{c^2} = 0{,}75 \Rightarrow \upsilon = 0{,}87c$$

5. Σχετικιστικό Φαινόμενο Doppler για το Φως

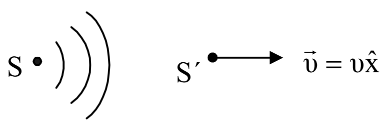
Ο Einstein με σκοπό την εξήγηση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου υπέθεσε την κυματοσωματιδιακή υπόσταση του φωτός (δυϊσμός φωτός) σύμφωνα με την οποία μια φωτεινή δέσμη είναι κύμα συχνότητας ν αλλά η ενέργειά της διαδίδεται στο χώρο κατά συμπυκνωμένα πακέτα που λέγονται **φωτόνια** και η ενέργεια κάθε φωτονίου είναι:

$$\boxed{E = h\nu} \qquad \textbf{(11-22)}$$

όπου h η σταθερά του Planck.

Επειδή το φωτόνιο κινείται πάντα με την ταχύτητα του φωτός c έχει μάζα ηρεμίας ίση με μηδέν ($m_o = 0$), οπότε σύμφωνα με την **(11-20)** η ορμή του είναι:

$$\boxed{p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}} \qquad \textbf{(11-23)}$$



Σχήμα 11.2

Έστω μια ακίνητη πηγή φωτός S, η οποία εκπέμπει φωτεινή δέσμη (φωτόνια) με συχνότητα ν ως προς την πηγή S. Κάθε φωτόνιο επίσης έχει ενέργεια $E = h\nu$ και ορμή $p_x = h\nu/c$ ως προς την ακίνητη πηγή S.

Αν ένας παρατηρητής S′ κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon} = \upsilon\hat{x}$ ως προς την πηγή S τότε δέχεται κάθε εκπεμπόμενο φωτόνιο με συχνότητα ν', ενέργεια $E' = h\nu'$ και ορμή $p'_x = h\nu'/c$.

Σύμφωνα με το μετασχηματισμό της ενέργειας **(11-21)** προκύπτει:

$$E' = \gamma(E - \upsilon p_x) \Rightarrow h\nu' = \gamma\left(h\nu - \upsilon\frac{h\nu}{c}\right) \Rightarrow \nu' = \frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\nu\left(1 - \frac{\upsilon}{c}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\nu' = \nu\sqrt{\frac{c-\upsilon}{c+\upsilon}}} \qquad \textbf{(11-24)}$$

Αν ο παρατηρητής S′ κινείται προς την πηγή S με ταχύτητα υ τότε η **(11-24)** με αντικατάσταση του υ με –υ δίνει:

$$\boxed{\nu' = \nu\sqrt{\frac{c+\upsilon}{c-\upsilon}}} \qquad \textbf{(11-25)}$$

Οι σχέσεις **(11-24)** και **(11-25)** αποτελούν τις εκφράσεις του σχετικιστικού φαινομένου Doppler για το φως και συγκεκριμένα η **(11-24)** αντιστοιχεί σε παρατηρητή απομακρυνόμενο από ακίνητη πηγή ενώ η **(11-25)** για παρατηρητή που πλησιάζει την πηγή.

Παρατηρείται ότι αν ο παρατηρητής απομακρύνεται από την πηγή η συχνότητα του φωτονίου μειώνεται ενώ αν αυτός προσεγγίζει την πηγή η συχνότητα του φωτονίου αυξάνεται. Το φαινόμενο αυτό εκμεταλλεύονται οι αστρονόμοι με σκοπό να εκτιμήσουν την ταχύτητα των γαλαξιών.