# ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
# ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

*Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας*



**ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778**
**www.pmoiras.weebly.com**

**ΘΕΜΑ 1**

Το ηλεκτρικό πεδίο ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό δίνεται από τη σχέση $\vec{E} = 30\cos\left(2\pi\cdot 10^8 t - \frac{2\pi}{3}x\right)\hat{y}$ Volt/m.

Να καθοριστούν η συχνότητα, το μήκος κύματος, η κατεύθυνση διάδοσης του κύματος και η κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου.

**Λύση**

Από τη δοθείσα συνάρτηση του ηλεκτρικού πεδίου φαίνεται ότι $\omega = 2\pi\cdot 10^8\,\mathrm{rad/sec}$ και $k = \frac{2\pi}{3}\,\mathrm{rad/m}$. Επομένως:

$$\omega = 2\pi\nu \Rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\pi\cdot 10^8}{2\pi} \Rightarrow \nu = 10^8\,\mathrm{Hz}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2\pi/3} \Rightarrow \lambda = 3\mathrm{m}$$

Επίσης από τη δοθείσα συνάρτηση συμπεραίνεται ότι το ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος της θετικής κατεύθυνσης του άξονα x (αφού είναι της μορφής $E = E_o\cos(\omega t - kx)$).

Το μαγνητικό πεδίο υπολογίζεται ως εξής:

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\hat{x}\times\vec{E} = \frac{30}{c}\cos(2\pi\cdot 10^8 t - \frac{2\pi}{3}x)\hat{x}\times\hat{y} \Rightarrow \vec{B} = 10^{-7}\cos\left(2\pi\cdot 10^8 t - \frac{2\pi}{3}x\right)\hat{z}$$

όπου $c = 3\cdot 10^8\,\mathrm{m/sec}$ και $\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}$. Δηλαδή το μαγνητικό πεδίο κείται στη θετική κατεύθυνση του άξονα z.

**ΘΕΜΑ 2**

Δίνονται στο κενό, χωρίς πηγές, τα πεδία $\vec{E} = E_o \sin(\omega t - kz)\hat{x}$ και $\vec{H} = \frac{E_o}{n}\sin(\omega t - kz)\hat{y}$. Προσδιορίστε την παράμετρο n συναρτήσει των $\omega, \varepsilon_o, \mu_o$ έτσι ώστε τα πεδία να ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell.

**Λύση**

Η μαγνητική διέγερση $\vec{H}$ είναι : $\vec{H} = \vec{B}/\mu_o$

οπότε η τρίτη εξίσωση Maxwell δίνει :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_o \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\mu_o \frac{\partial H_y}{\partial t}\hat{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{y} = -\mu_o \frac{\partial H_y}{\partial t}\hat{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}[E_o \sin(\omega t - kz)] = -\mu_o \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{E_o}{n}\sin(\omega t - kz)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -kE_o \cos(\omega t - kz) = -\omega\mu_o \frac{E_o}{n}\cos(\omega t - kz) \Rightarrow k = \frac{\omega\mu_o}{n} \qquad \textbf{(1)}$$

Ενώ από την τέταρτη εξίσωση Maxwell προκύπτει:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \mu_o \vec{\nabla} \times \vec{H} = \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} = \varepsilon_o \frac{\partial E_x}{\partial t}\hat{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial H_y}{\partial z}\hat{x} = \varepsilon_o \frac{\partial E_x}{\partial t}\hat{x} \Rightarrow -\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{E_o}{n}\sin(\omega t - kz)\right] = \varepsilon_o \frac{\partial}{\partial t}\left[E_o \sin(\omega t - kz)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{E_o}{n} k\cos(\omega t - kz) = \omega\varepsilon_o E_o \cos(\omega t - kz) \Rightarrow \frac{k}{n} = \omega\varepsilon_o \Rightarrow k = n\omega\varepsilon_o \qquad \textbf{(2)}$$

Άρα από τις **(1)** και **(2)** προκύπτει:

$$\frac{\omega\mu_o}{n} = n\omega\varepsilon_o \Rightarrow n^2 = \mu_o/\varepsilon_o \Rightarrow n = \sqrt{\mu_o/\varepsilon_o}$$

Η παράμετρος n εκφράζει το φυσικό μέγεθος της εμπέδησης Ζ και εξαρτάται μόνο από τις ιδιότητες του μέσου που διαδίδεται το κύμα.

**ΘΕΜΑ 3**

Έστω ότι το ηλεκτρικό πεδίο ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό είναι : $\vec{E} = E_o \sin(\omega t - kz)\hat{x}$. Να προσδιοριστεί το μαγνητικό πεδίο αυτού του κύματος.

**Λύση**

Από τη δοθείσα συνάρτηση φαίνεται ότι το ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα z, οπότε το μαγνητικό πεδίο είναι :

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\hat{z} \times \vec{E} = \frac{1}{c} E_o \sin(\omega t - kz)\hat{z} \times \hat{x} \Rightarrow \vec{B} = \frac{E_o}{c} \sin(\omega t - kz)\hat{y}$$

όπου $\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$ και $c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}}$ η ταχύτητα του φωτός στο κενό.

**ΘΕΜΑ 4**

Εξετάστε αν τα πεδία $\vec{E} = E_o \cos x \cos t \ \hat{y}$ και $\vec{B} = E_o \sin x \sin t \ \hat{z}$ στο κενό συνιστούν κύμα.

**Λύση**

Από την τρίτη εξίσωση Maxwell προκύπτει:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & E_o \sin x \sin t \end{vmatrix} = \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial}{\partial t}(E_o \cos x \cos t)\hat{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial}{\partial x}(E_o \sin x \sin t)\hat{y} = \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial}{\partial t}(E_o \cos x \cos t)\hat{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -E_o \cos x \sin t = -\mu_o \varepsilon_o E_o \cos x \sin t \Rightarrow \mu_o \varepsilon_o = 1 \qquad \textbf{άτοπο}$$

Άρα οι δοθείσες συναρτήσεις δε συνιστούν ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Αυτό φαίνεται επίσης και από το γεγονός ότι $E_o = B_o$ και όχι $E_o = cB_o$.

**ΘΕΜΑ 5**

Δίνεται το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}=\frac{Ae^{(x-ct)}}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}}\hat{y}$ και το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}=Ae^{(x-ct)}\hat{z}$. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις αυτές περιγράφουν ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

**Λύση**

Σύμφωνα με τις δοθείσες συναρτήσεις το κύμα διαδίδεται κατά μήκος του άξονα x, ενώ το $\vec{E}$ ταλαντώνεται στο επίπεδο xy και το $\vec{B}$ στο επίπεδο xz. Δηλαδή είναι εγκάρσιο κύμα. Ο λόγος των πλατών των πεδίων είναι :

$$\frac{E_o}{B_o}=\frac{Ae^{(x-ct)}/\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}}{Ae^{(x-ct)}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}}\Rightarrow \frac{E_o}{B_o}=c$$

Επίσης είναι : $\frac{\partial B}{\partial x}=Ae^{(x-ct)}\Rightarrow \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}=Ae^{(x-ct)}$

και $\frac{\partial B}{\partial t}=-cAe^{(x-ct)}\Rightarrow \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}=c^2Ae^{(x-ct)}$

Οπότε από την κυματική εξίσωση του μαγνητικού πεδίου είναι:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}\Rightarrow Ae^{(x-ct)}=\frac{1}{\upsilon^2}c^2Ae^{(x-ct)}\Rightarrow \frac{c^2}{\upsilon^2}=1\Rightarrow \upsilon=c$$

Δηλαδή το κύμα διαδίδεται με την ταχύτητα του φωτός.

Άρα εφόσον οι δοθείσες συναρτήσεις ικανοποιούν τις κυματικές εξισώσεις περιγράφουν ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα που διαδίδεται στο κενό με την ταχύτητα του φωτός.

**ΘΕΜΑ 6**

**α)** Αποδείξτε ότι ένα επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδιδόμενο στο κενό κατά τον άξονα z περιγράφεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial B_y(z,t)}{\partial z} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t}$$

**β)** Θεωρώντας το ηλεκτρικό πεδίο ενός στάσιμου ηλεκτρομαγνητικού κύματος :

$$E_x(z,t) = A\cos kz\cos\omega t, \quad E_y(z,t) = E_z(z,t) = 0$$

να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο που αντιστοιχεί σε αυτό και να σχεδιαστούν τα δύο πεδία συναρτήσει του z.

**γ)** Υπολογίστε το διάνυσμα Poynting $\vec{S}$ του στάσιμου αυτού ηλεκτρομαγνητικού κύματος, καθώς επίσης και τη μέση τιμή του $\vec{S}$ και να εξηγηθεί ποιοτικά το αποτέλεσμα.

**δ)** Δείξτε ότι η ολική ενέργεια για το στάσιμο αυτό κύμα παραμένει σταθερή μέσα σε οποιοδήποτε διάστημα μήκους λ/4, δηλαδή ανάμεσα σε ένα δεσμό και μια κοιλία του στάσιμου αυτού κύματος.

**Λύση**

**α)** Έστω $\vec{E} = E_x(z,t)\hat{x}$ και $\vec{B} = B_y(z,t)\hat{y}$ το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα ενός επιπέδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος διαδιδόμενου στο κενό κατά τον άξονα z. Σύμφωνα με την τέταρτη εξίσωση Maxwell στο κενό είναι:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & B_y(z,t) & 0 \end{vmatrix} = \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial E_x}{\partial t}\hat{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial B_y}{\partial z}\hat{x} = \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial E_x}{\partial t}\hat{x} \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_o\varepsilon_o\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Κι επειδή $c^2 = \frac{1}{\mu_o\varepsilon_o} \Rightarrow \mu_o\varepsilon_o = \frac{1}{c^2}$ η παραπάνω τελικά γράφεται :

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

**β)** Το ζητούμενο μαγνητικό πεδίο θα υπολογιστεί από την τρίτη εξίσωση Maxwell:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A\cos kz\cos\omega t & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$$

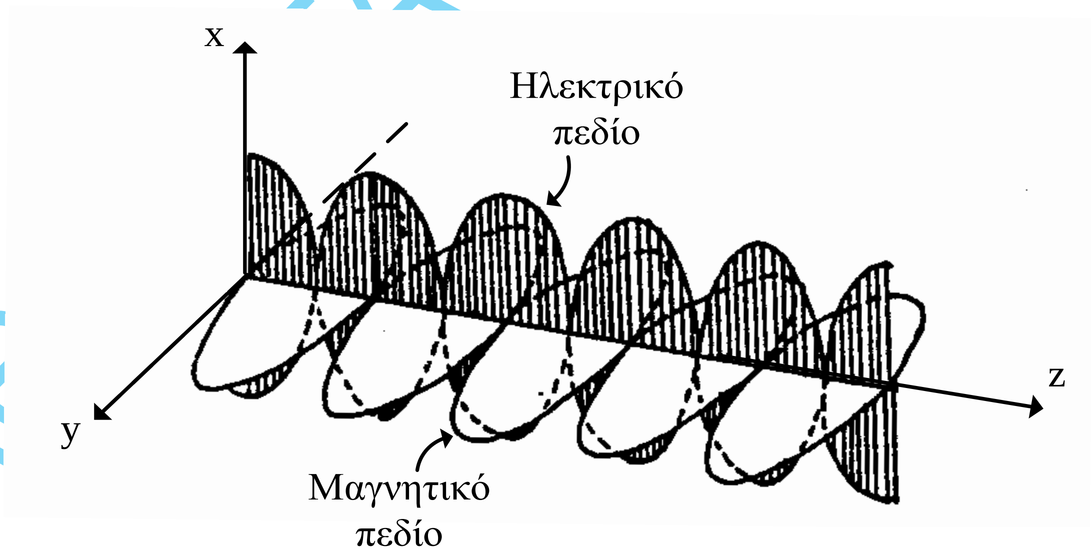
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}(A\cos kz\cos\omega t)\hat{y} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = kA\sin kz\cos\omega t\hat{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{B} = kA\sin kz\int\cos\omega t dt\ \hat{y} \Rightarrow \vec{B} = \frac{kA}{\omega}\sin kz\sin\omega t\ \hat{y}$$

Αλλά επειδή $c = \frac{\omega}{k}$ τελικά γράφεται :

$$\vec{B} = \frac{A}{c}\sin kz\sin\omega t\ \hat{y}$$

Το ακόλουθο σχήμα δείχνει τα δύο στάσιμα κύματα $E_x$ και $B_y$ μετατοπισμένα κατά λ/4 το ένα προς το άλλο.



**γ)** Το διάνυσμα Poynting είναι:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_o}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{A}{\mu_o}\cos kz \cos\omega t \frac{A}{c}\sin kz \sin\omega t(\hat{x}\times\hat{y}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \frac{A^2}{\mu_o c}(\sin kz \cos kz)(\sin\omega t \cos\omega t)\hat{z}$$

Αλλά : $\sin kz \cos kz = \dfrac{\sin 2kz}{2}$ και $\sin\omega t \cos\omega t = \dfrac{\sin 2\omega t}{2}$ οπότε η προηγούμενη δίνει :

$$\vec{S} = \frac{A^2}{4\mu_o c}\sin 2kz \sin 2\omega t\hat{z}$$

Η μέση τιμή του διανύσματος Poynting τόσο ως προς z, όσο και ως προς t είναι μηδέν, αφού γενικά η μέση τιμή του ημιτόνου είναι <sinφ>=0 για $0 \le \varphi \le 2\pi$. Δηλαδή $<\vec{S}>=0$.

Το αποτέλεσμα αυτό είναι συμβιβαστό με το γεγονός ότι τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ έχουν τη μορφή στάσιμων κυμάτων, δηλαδή κυμάτων τα οποία παραμένουν εντοπισμένα σε μια περιοχή του χώρου κι επομένως δε μεταφέρουν ενέργεια.

**δ)** Η ολική ενέργεια μέσα σε διάστημα z=λ/4 ανάμεσα σε ένα δεσμό και μια κοιλία είναι :

$$U = \int_0^{\lambda/4}(u_E + u_B)dz$$

όπου $u_E = \dfrac{\varepsilon_o}{2}E^2$ και $u_B = \dfrac{B^2}{2\mu_o}$ είναι οι πυκνότητες ενέργειας του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου στη θέση z. Οπότε :

$$U = \int_0^{\lambda/4}\left(\frac{\varepsilon_o}{2}E^2 + \frac{B^2}{2\mu_o}\right)dz =$$

$$\frac{\varepsilon_o}{2}A^2\cos^2\omega t\int_0^{\lambda/4}\cos^2 kz dz + \frac{A^2}{2\mu_o c^2}\sin^2\omega t\int_0^{\lambda/4}\sin^2 kz dz =$$

$$=\frac{\varepsilon_o A^2}{2}\frac{\lambda}{8}(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t)=\frac{\varepsilon_o A^2\lambda}{16}\overset{\lambda=\frac{2\pi c}{\omega}}{\Rightarrow} U=\frac{\pi\varepsilon_o c A^2}{8\omega}$$

Δηλαδή η ολική ενέργεια είναι σταθερή ποσότητα και εξαρτάται μόνο από το πλάτος Α και την κυκλική συχνότητα ω του στάσιμου κύματος.

❒**Σημείωση:** Τα προηγούμενα ολοκληρώματα υπολογίζονται ως εξής :

$$\int_0^{\lambda/4}\cos^2 kz dz=\int_0^{\lambda/4}\frac{1}{2}(1+\cos 2kz)dz=\frac{1}{2}\left[z+\frac{\sin 2kz}{2k}\right]_0^{\lambda/4}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{4}+\frac{\sin(k\lambda/2)}{2k}\right)\overset{k=2\pi/\lambda}{=}\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{4}+\frac{\sin\pi}{2k}\right)=\frac{\lambda}{8}$$

και $$\int_0^{\lambda/4}\sin^2 kz dz=\int_0^{\lambda/4}\frac{1}{2}(1-\cos 2kz)dz=......=\frac{\lambda}{8}$$

**ΘΕΜΑ 7**

Το ηλεκτρικό πεδίο επιπέδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό έχει την έκφραση $\vec{E} = E_o \sin(\omega t - kz)\hat{x}$. Προσδιορίστε το διάνυσμα Poynting του κύματος και σχεδιάστε τη χρονική εξάρτησή του σε ένα σημείο του χώρου.

**Λύση**

Το μαγνητικό πεδίο του κύματος αυτού είναι :

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\hat{z} \times \vec{E} = \frac{E_o}{c}\sin(\omega t - kz)\hat{z} \times \hat{x} \Rightarrow \vec{B} = \frac{E_o}{c}\sin(\omega t - kz)\hat{y}$$

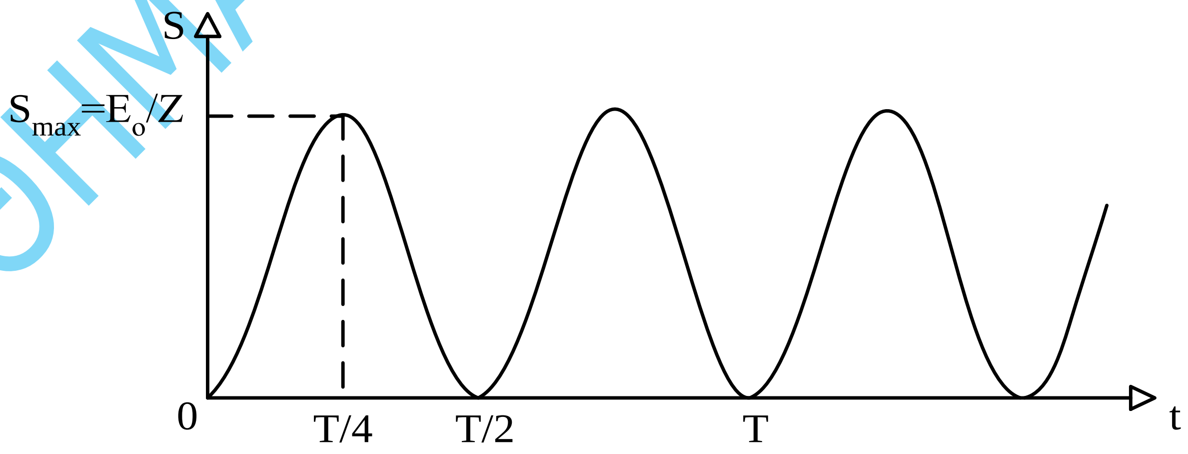
Άρα το διάνυσμα Poynting του κύματος αυτού είναι :

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_o}\vec{E} \times \vec{B} = \frac{E_o^2}{\mu_o c}\sin^2(\omega t - kz)\hat{x} \times \hat{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{S} = E_o\sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}\sin^2(\omega t - kz)\hat{z} \Rightarrow \vec{S} = \frac{E_o}{Z}\sin^2(\omega t - kz)\hat{z}$$

όπου $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$, $\quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}}$ και $Z = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}}$ η εμπέδηση.

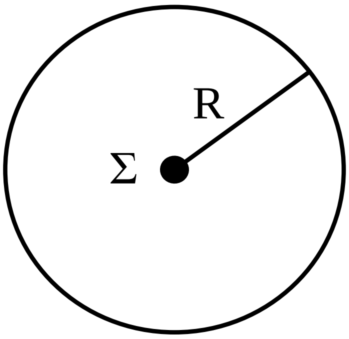
Στο ακόλουθο σχήμα παριστάνεται η χρονική εξάρτηση του μέτρου του διανύσματος Poynting σε ένα σημείο z του χώρου.



**ΘΕΜΑ 8**

Ένας ραδιοφωνικός σταθμός ισχύος 100kW εκπέμπει ισοτροπικά. Να υπολογιστούν τα πλάτη του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου σε απόσταση 50km από το σταθμό.

**Λύση**




Επειδή ο ραδιοφωνικός σταθμός εκπέμπει ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις (ισοτροπικά), η ίδια ισχύς P=100kW διαπερνά ομοιόμορφα και ακτινικά τη σφαιρική επιφάνεια που έχει κέντρο το σταθμό και ακτίνα R=50km.
Η ένταση των κυμάτων στα σημεία της σφαιρικής αυτής επιφάνειας είναι:

$$I = \frac{P}{S} \Rightarrow I = \frac{P}{4\pi R^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά επειδή σε μεγάλη απόσταση από το σταθμό το κύμα μπορεί να θεωρηθεί επίπεδο, η ένταση είναι:

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}E_o^2 \qquad \textbf{(2)}$$

Συνεπώς από τις **(1)** και **(2)** προκύπτει:

$$\frac{P}{4\pi R^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}E_o^2 \Rightarrow E_o^2 = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}}\frac{P}{4\pi R^2} \qquad \textbf{(3)}$$

Αντικαθιστώντας στην **(3)** τις τιμές $Z_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}} = 376{,}7$ Ω, $P=10^5$Watt, $R=5\cdot 10^4$ m προκύπτει :

$$E_o^2 = 376{,}7\frac{10^5}{4\cdot 3{,}14\cdot 25\cdot 10^8} = \frac{376{,}7}{314}10^{-3} = 1{,}2\cdot 10^{-3} \Rightarrow E_o = 3{,}5\cdot 10^{-2}\,V/m$$

Ενώ το πλάτος του μαγνητικού πεδίου εφόσον το κύμα θεωρείται επίπεδο είναι:

$$E_o = cB_o \Rightarrow B_o = \frac{E_o}{c} = \frac{3{,}5\cdot 10^{-2}}{3{,}8\cdot 10^8} \Rightarrow B_o = 0{,}92\cdot 10^{-10}\,\text{Teslα}$$

**ΘΕΜΑ 9**

Ένας ραδιοφωνικός σταθμός βρίσκεται σε απόσταση 1km από το ραδιόφωνό μας και εκπέμπει ισοτροπικά. Κοντά στο ραδιόφωνο το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου του επίπεδου κύματος που λαμβάνουμε είναι $E_o = 0{,}1$ V/m. Να υπολογιστούν :

**α)** Το πλάτος $B_o$ του αντίστοιχου μαγνητικού πεδίου.
**β)** Η ένταση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος.
**γ)** Η ισχύς του σταθμού.
**δ)** Η ορμή ανά μονάδα όγκου που μεταφέρει το κύμα.
**ε)** Η ηλεκτρομαγνητική πίεση που εξασκεί η ακτινοβολία στο σώμα μας.

**Λύση**

**α)** Εφόσον τα κύματα που εκπέμπει ο σταθμός θεωρούνται επίπεδα, το πλάτος του μαγνητικού πεδίου είναι:

$$B_o = \frac{E_o}{c} = \frac{0{,}1}{3\cdot 10^8} \Rightarrow B_o = 3{,}3\cdot 10^{-10}\,\text{Tesla}$$

**β)** Η ένταση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος ισούται με τη μέση τιμή του μέτρου του διανύσματος Poynting και σύμφωνα με την **(7-12)** είναι:

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}E_o^2 = \frac{1}{2}c\varepsilon_o E_o^2 = \frac{1}{2}3\cdot 10^8\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = 1{,}4\cdot 10^{-5}\,\text{Watt}/\text{m}^2$$

**γ)** Αν υποτεθεί ότι ο σταθμός βρίσκεται στο κέντρο μιας σφαίρας με ακτίνα R=1km, δηλαδή επιφάνειας $S = 4\pi R^2$, και ότι αυτός εκπέμπει ισοτροπικά τότε το γινόμενο IS είναι σταθερό, αφού εκφράζει τη μέση ενέργεια που ακτινοβολεί ο σταθμός ανά μονάδα χρόνου, δηλαδή την ισχύ του σταθμού. Επομένως :

$$P = IS = I4\pi R^2 = 1{,}4\cdot 10^{-5} 4\cdot 3{,}14\cdot 1000^2 \Rightarrow P = 175{,}8\,\text{Watt}$$

**δ)** Η ορμή ανά μονάδα όγκου που μεταφέρει το κύμα είναι :

$$< \frac{d\vec{p}}{dV} > = \frac{< S >}{c} = \frac{I}{c} = \frac{1}{2}\varepsilon_o E_o^2 = \frac{1}{2} 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow < \frac{d\vec{p}}{dV} > = 4{,}4 \cdot 10^{-14} \mathrm{kgr} / \mathrm{m}^2 \sec$$

**ε)** Υποθέτοντας ότι η ακτινοβολία προσπίπτει στο σώμα μας και απορροφάται πλήρως τότε η ηλεκτρομαγνητική πίεση θα δίνεται από τη σχέση:

$$< P > = \frac{1}{2}\varepsilon_o E_o^2 = 4{,}4 \cdot 10^{-14} \mathrm{Nt} / \mathrm{m}^2$$

Δηλαδή παρατηρείται ότι η ηλεκτρομαγνητική πίεση ισούται με την ορμή ανά μονάδα όγκου που μεταφέρει το κύμα.

**ΘΕΜΑ 10**

Ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται σε μέσο με δείκτη διάθλασης n. Έστω ότι $\upsilon_{ph}$ και $\upsilon_g$ είναι αντίστοιχα η φασική και η ομαδική ταχύτητα του κύματος.
**α)** Αν η κυκλική συχνότητα ω του κύματος συνδέεται με τον αντίστοιχο κυματάριθμο k με τη σχέση :

$$\omega^2 = \alpha^2 + c^2 k^2$$

όπου α σταθερά και c η ταχύτητα του φωτός, δείξτε ότι $\upsilon_{ph} > c$, $\upsilon_g < c$ και $\upsilon_{ph} \cdot \upsilon_g = c^2$.
**β)** Αν λ είναι το μήκος κύματος στο κενό, δείξτε τη σχέση :

$$\frac{1}{\upsilon_g} = \frac{1}{\upsilon_{ph}} - \frac{\lambda}{c}\frac{dn}{d\lambda}$$

**Λύση**

**α)** Η φασική ταχύτητα $\upsilon_{ph}$ και η ομαδική ταχύτητα $\upsilon_g$ ορίζονται πάντα ως :

$$\upsilon_{ph} = \frac{\omega}{k} \quad \text{και} \quad \upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} \qquad \textbf{(1)}$$

Διαφορίζοντας τη δοθείσα σχέση διασποράς προκύπτει:

$$2\omega d\omega = 2c^2 k dk \Rightarrow \frac{\omega}{k}\frac{d\omega}{dk} = c^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} \upsilon_{ph} \cdot \upsilon_g = c^2 \qquad \textbf{(2)}$$

Λύνοντας ως προς ω τη σχέση διασποράς και διαιρώντας με k προκύπτει η φασική ταχύτητα ως :

$$\upsilon_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + c^2 k^2}}{k} \Rightarrow \upsilon_{ph} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{k^2} + c^2} \Rightarrow \upsilon_{ph} > c \qquad \textbf{(3)}$$

Άρα από την **(2)** λόγω της **(3)** προκύπτει :

$$\upsilon_g = \frac{c^2}{\upsilon_{ph}} < \frac{c^2}{c} = c \Rightarrow \upsilon_g < c$$

❒**Παρατήρηση:** Η σχέση $\upsilon_{ph} > c$ δεν έρχεται σε αντίθεση με την ειδική θεωρία της σχετικότητας γιατί το ηλεκτρομαγνητικό κύμα δεν μεταφέρει ενέργεια ή πληροφορία με την $\upsilon_{ph}$, αλλά με την ομαδική ταχύτητα $\upsilon_g$, για την οποία ισχύει $\upsilon_g < c$.

**β)** Είναι : $$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} \Rightarrow \frac{1}{\upsilon_g} = \frac{dk}{d\omega} \qquad \textbf{(4)}$$

Αλλά από τον ορισμό του δείκτη διάθλασης είναι :

$$n = \frac{c}{\upsilon_{ph}} \Rightarrow \upsilon_{ph} = \frac{c}{n} \qquad \textbf{(5)}$$

Οπότε : $$\upsilon_{ph} = \frac{\omega}{k} \overset{(5)}{\Rightarrow} \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow k = \frac{n\omega}{c} \qquad \textbf{(6)}$$

Άρα η **(4)** δίνει :

$$\frac{1}{\upsilon_g} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{n\omega}{c}\right) = \frac{n}{c} + \frac{\omega}{c}\frac{dn}{d\omega} \overset{(5)}{\Rightarrow} \frac{1}{\upsilon_g} = \frac{1}{\upsilon_{ph}} + \frac{\omega}{c}\frac{dn}{d\omega} \qquad \textbf{(7)}$$

Όμως είναι : $$\frac{dn}{d\omega} = \frac{dn}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\omega} \qquad \textbf{(8)}$$

όπου το μήκος κύματος λ στο κενό ικανοποιεί τη σχέση :

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{2\pi\nu} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \Rightarrow \frac{d\lambda}{d\omega} = -\frac{2\pi c}{\omega^2} \qquad \textbf{(9)}$$

Επομένως η **(8)** λόγω της **(9)** γίνεται :

$\frac{dn}{d\omega} = -\frac{2\pi c}{\omega^2}\frac{dn}{d\lambda}$ και αντικαθιστώντας αυτή στην **(7)** προκύπτει :

$$\frac{1}{\upsilon_g} = \frac{1}{\upsilon_{ph}} - \frac{\omega}{c}\frac{2\pi c}{\omega^2}\frac{dn}{d\lambda} = \frac{1}{\upsilon_{ph}} - \frac{2\pi}{\omega}\frac{dn}{d\lambda} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\upsilon_g} = \frac{1}{\upsilon_{ph}} - \frac{\lambda}{c}\frac{dn}{d\lambda}}$$

αφού ισχύει : $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \Rightarrow \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{c}$

**ΘΕΜΑ 11**

Έστω ότι ένα διηλεκτρικό μέσο χαρακτηρίζεται από την εξής σχέση διασποράς :

$$\omega = \omega_o(1 + 8\alpha^2 k^2 - 2\alpha^4 k^4)$$

που συνδέει την κυκλική συχνότητα ω με τον κυματάριθμο k ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Τι μέση συχνότητα πρέπει να έχουν οι κυματομορφές, που χρησιμοποιούνται για την τηλεπικοινωνία στο μέσο αυτό, ώστε τα σήματα να μεταδίδονται όσο το δυνατό ταχύτερα;

**Λύση**

Τα σήματα μεταδίδονται στο διηλεκτρικό μέσο με την ομαδική ταχύτητα :

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} \Rightarrow \upsilon_g = \omega_o(16\alpha^2 k - 8\alpha^4 k^3) \qquad \textbf{(1)}$$

Για να διαδίδονται τα σήματα όσο το δυνατό ταχύτερα θα πρέπει η μέση συχνότητα να επιλεγεί έτσι ώστε να μεγιστοποιείται η ομαδική ταχύτητα. Δηλαδή ο αντίστοιχος μέσος κυματάριθμος πρέπει να επαληθεύει τη σχέση :

$$\frac{d\upsilon_g}{dk} = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \omega_o(16\alpha^2 - 24\alpha^4 k^2) = 0 \Rightarrow$$

$$24\alpha^4 k^2 = 16\alpha^2 \Rightarrow k^2 = \frac{2}{3\alpha^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Άρα η μέση συχνότητα που πρέπει να έχουν οι κυματομορφές είναι:

$$\omega = \omega_o\left(1 + 8\alpha^2 \frac{2}{3\alpha^2} - 2\alpha^4 \frac{4}{9\alpha^4}\right) = \omega_o\left(1 + \frac{16}{3} - \frac{8}{9}\right) = \omega_o \frac{9 + 48 - 8}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{49}{9}\omega_o = 5{,}44\omega_o$$

**ΘΕΜΑ 12**

Να υπολογιστεί η ομαδική ταχύτητα των φωτεινών κυμάτων στο κενό και μέσα σε διαφανές μέσο με δείκτη διάθλασης $n(\omega)$.

**Λύση**

Στο κενό η φασική ταχύτητα του φωτός είναι : $\upsilon_{ph} = c$ **(1)**

Αλλά : $\upsilon_{ph} = \dfrac{\omega}{k} \overset{(1)}{\Rightarrow} c = \dfrac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = ck$ **(2)**

Άρα η ομαδική ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι :

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} \overset{(2)}{\Rightarrow} \upsilon_g = c$$

Δηλαδή παρατηρείται ότι στο κενό η φασική και η ομαδική ταχύτητα του φωτός είναι ίδια. Γενικά ο δείκτης διάθλασης ενός μέσου είναι συνάρτηση της συχνότητας ω του φωτεινού κύματος και γι' αυτό γίνεται ανάλυση του φωτός όταν αυτό περνά μέσα από πρίσμα. Από τον ορισμό του δείκτη διάθλασης προκύπτει :

$$n = \frac{c}{\upsilon_{ph}} \Rightarrow \upsilon_{ph} = \frac{c}{n} \Rightarrow \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} \Rightarrow k = \frac{\omega n}{c} \qquad (3)$$

Άρα η ομαδική ταχύτητα των φωτεινών κυμάτων σε διαφανές μέσο είναι:

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} \overset{(3)}{\Rightarrow} \upsilon_g = \frac{1}{\frac{n}{c} + \frac{\omega}{c}\frac{dn}{d\omega}} \Rightarrow \upsilon_g = \frac{c}{n + \omega\frac{dn}{d\omega}} \qquad (4)$$

Από τη σχέση **(4)** παρατηρείται ότι όταν $dn/d\omega>0$ είναι $\upsilon_g < \upsilon_{ph}$ (**ομαλός διασκεδασμός**), ενώ όταν $dn/d\omega<0$ είναι $\upsilon_g > \upsilon_{ph}$ (**ανώμαλος διασκεδασμός**).

**ΘΕΜΑ 13**

**α)** Αν $\upsilon_g, \upsilon_{ph}$ είναι η ομαδική και η φασική ταχύτητα αντίστοιχα και λ το μήκος κύματος ενός φωτεινού κύματος, να αποδειχθεί η σχέση :

$$\upsilon_g = \upsilon_{ph} - \lambda \frac{d\upsilon_{ph}}{d\lambda}$$

**β)** Αν κάποιο μέσο χαρακτηρίζεται από τη σχέση : $\upsilon_{ph}^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}$, όπου $g, \sigma, \rho$ σταθερές, να προσδιοριστεί το μήκος κύματος λ έτσι ώστε να μην παρουσιάζεται διασκεδασμός.

**Λύση**

**α)** Η φασική ταχύτητα δίνεται από τη σχέση :

$$\upsilon_{ph} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = k\upsilon_{ph} \qquad \textbf{(1)}$$

Επομένως η ομαδική ταχύτητα είναι:

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} \overset{(1)}{\Rightarrow} \upsilon_g = \frac{d}{dk}(k\upsilon_{ph}) = \upsilon_{ph} + k\frac{d\upsilon_{ph}}{dk} \qquad \textbf{(2)}$$

Αλλά : $\frac{d\upsilon_{ph}}{dk} = \frac{d\upsilon_{ph}}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk}$ όπου επειδή λ=2π/k είναι:

$$\frac{d\lambda}{dk} = \frac{d}{dk}\left(\frac{2\pi}{k}\right) = -\frac{2\pi}{k^2}$$

Οπότε : $$\frac{d\upsilon_{ph}}{dk} = -\frac{2\pi}{k^2}\frac{d\upsilon_{ph}}{d\lambda} \qquad \textbf{(3)}$$

Συνεπώς αντικαθιστώντας την **(3)** στη **(2)** προκύπτει :

$$\upsilon_g = \upsilon_{ph} - k\frac{2\pi}{k^2}\frac{d\upsilon_{ph}}{d\lambda} = \upsilon_{ph} - \frac{2\pi}{k}\frac{d\upsilon_{ph}}{d\lambda}$$

Κι επειδή $\lambda = 2\pi/k$ η παραπάνω γράφεται : $\boxed{\upsilon_g = \upsilon_{ph} - \lambda\frac{d\upsilon_{ph}}{d\lambda}}$ **(4)**

**β)** Από τη σχέση **(4)** φαίνεται ότι αν $d\upsilon_{ph}/d\lambda = 0$ τότε είναι $\upsilon_g = \upsilon_{ph}$, δηλαδή δεν παρουσιάζεται διασκεδασμός .
Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της δοθείσας σχέσης ως προς λ προκύπτει :

$$2\upsilon_{ph}\frac{d\upsilon_{ph}}{d\lambda} = \frac{g}{2\pi} - \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda^2} \qquad \textbf{(5)}$$

Άρα όταν δεν παρουσιάζεται διασκεδασμός είναι :

$$\frac{d\upsilon_{ph}}{d\lambda} = 0 \overset{(5)}{\Rightarrow} \frac{1}{2\upsilon_{ph}}\left(\frac{g}{2\pi} - \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda^2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{g}{2\pi} - \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda^2} = \frac{g}{2\pi} \Rightarrow \lambda^2 = 4\pi^2\frac{\sigma}{\rho g} \Rightarrow \lambda = 2\pi\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$$

**ΘΕΜΑ 14**

Η διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στην ιονόσφαιρα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση : $\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \omega_o^2 E = c^2 \dfrac{\partial^2 E}{\partial z^2}$

Να προσδιοριστεί η σχέση διασποράς ω=ω(k) και να βρεθεί ο δείκτης διάθλασης n συναρτήσει του ω.

**Λύση**

Θεωρώντας τη διάδοση επίπεδων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στην ιονόσφαιρα είναι:

$$E = E_o \sin(\omega t - kz) \qquad \textbf{(1)}$$

Συνεπώς αντικαθιστώντας την **(1)** στην δοθείσα διαφορική εξίσωση προκύπτει η σχέση διασποράς ως :

$$-\omega^2 E_o \sin(\omega t - kz) + \omega_o^2 E_o \sin(\omega t - kz) = -c^2 k^2 E_o \sin(\omega t - kz) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\omega^2 + \omega_o = -c^2 k^2 \Rightarrow \boxed{\omega^2 = \omega_o^2 + c^2 k^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Από τον ορισμό του δείκτη διάθλασης είναι : $n = \dfrac{c}{\upsilon_{ph}}$ **(3)**

Αλλά : $\upsilon_{ph} = \dfrac{\omega}{k}$ οπότε η **(3)** γράφεται :

$$n = \frac{c}{\omega / k} \Rightarrow n = \frac{ck}{\omega} \Rightarrow k = \frac{n\omega}{c} \qquad \textbf{(4)}$$

Αντικαθιστώντας τέλος την **(4)** στη σχέση διασποράς **(2)** προκύπτει :

$$\omega^2 = \omega_o^2 + c^2 \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \Rightarrow \omega^2 = \omega_o^2 + n^2 \omega^2 \Rightarrow n^2 \omega^2 = \omega^2 - \omega_o^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 = 1 - \frac{\omega_o^2}{\omega^2} \Rightarrow n(\omega) = \sqrt{1 - \frac{\omega_o^2}{\omega^2}}$$

**ΘΕΜΑ 15**

Παλμός ακτίνων X, που περιέχει συχνότητες $\nu \geq 4 \cdot 10^7\,\text{Hz}$ διαδίδεται σε ένα μέσο όπου ο δείκτης διάθλασης, για την παραπάνω περιοχή συχνοτήτων, δίνεται από τη σχέση : $n^2 = 1 - \nu_o^2 / \nu^2$ όπου $\nu_o = 10^{17}\,\text{Hz}$

Δηλαδή το μέσο προκαλεί διασπορά.

**α)** Βρείτε μια γενική σχέση που να συνδέει την ομαδική ταχύτητα $\upsilon_g$ του παλμού με τον δείκτη διάθλασης του μέσου μέσα στο οποίο διαδίδεται.

**β)** Εκφράστε την ομαδική ταχύτητα $\upsilon_g$ και τη φασική ταχύτητα $\upsilon_{ph}$ του παραπάνω παλμού σαν συνάρτηση της συχνότητας.

**γ)** Σχεδιάστε ποιοτικά, στο ίδιο διάγραμμα τις ταχύτητες $\upsilon_{ph}$ και $\upsilon_g$ συναρτήσει της συχνότητας ν. Τι σημαίνει το γεγονός ότι $\upsilon_{ph} > c$;

Δείξτε ότι $\upsilon_g \cdot \upsilon_{ph} = c^2$.

**Λύση**

**α)** Από τον ορισμό της φασικής ταχύτητας είναι:

$$\upsilon_{ph} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = \upsilon_{ph} k \qquad \textbf{(1)}$$

Οπότε από τον ορισμό της ομαδικής ταχύτητας προκύπτει :

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(\upsilon_{ph} k) = \upsilon_{ph} + k\frac{d\upsilon_{ph}}{dk} = \upsilon_{ph} + k\frac{d\upsilon_{ph}}{d\omega}\frac{d\omega}{dk} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_g = \upsilon_{ph} + k\upsilon_g \frac{d\upsilon_{ph}}{d\omega} \qquad \textbf{(2)}$$

Αλλά επειδή $\upsilon_{ph} = c/n$ η **(2)** γίνεται :

$$\upsilon_g = \frac{c}{n} + kc\upsilon_g \frac{d(1/n)}{d\omega} = \frac{c}{n} + kc\upsilon_g\left(-\frac{1}{n^2}\frac{dn}{d\omega}\right) = \frac{c}{n} - \frac{kc}{n^2}\upsilon_g\frac{dn}{d\omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_g\left(1 + \frac{kc}{n^2}\frac{dn}{d\omega}\right) = \frac{c}{n} \Rightarrow \upsilon_g = \frac{c/n}{1 + \frac{kc}{n^2}\frac{dn}{d\omega}} = \frac{c}{n + \frac{kc}{n}\frac{dn}{d\omega}} = \frac{c}{n + k\upsilon_{ph}\frac{dn}{d\omega}} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \upsilon_g = \frac{c}{n + \omega \dfrac{dn}{d\omega}} = \frac{c}{n + \nu \dfrac{dn}{d\nu}} \qquad (3)$$

**β)** Επειδή $n = \sqrt{1 - \nu_o^2 / \nu^2}$ η φασική ταχύτητα των ακτινών X στο μέσο είναι:

$$\upsilon_{ph} = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{1 - \nu_o^2 / \nu^2}} = c\left(1 - \frac{\nu_o^2}{\nu^2}\right)^{-1/2} \qquad (4)$$

Επειδή $\dfrac{\nu_o^2}{\nu^2} \leq \dfrac{1}{16}$ χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα $(1+x)^{\alpha} \cong 1 + \alpha x$, η σχέση **(4)** δίνει :

$$\upsilon_{ph} \cong c\left(1 + \frac{\nu_o^2}{2\nu^2}\right) \qquad (5)$$

Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα για το δείκτη διάθλασης προκύπτει :

$$n = \left(1 - \frac{\nu_o^2}{\nu^2}\right)^{1/2} \Rightarrow n \cong 1 - \frac{\nu_o^2}{2\nu^2} \quad \text{και} \quad \frac{dn}{d\nu} \cong \frac{\nu_o^2}{\nu^3}$$

Επομένως αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην έκφραση **(3)** της ομαδικής ταχύτητας προκύπτει :

$$\upsilon_g = \frac{c}{n + \nu \dfrac{\nu_o^2}{\nu^3}} = \frac{c}{n + \dfrac{\nu_o^2}{\nu^2}} = \frac{c}{1 - \dfrac{\nu_o^2}{2\nu^2} + \dfrac{\nu_o^2}{\nu^2}} = \frac{c}{1 + \dfrac{\nu_o^2}{2\nu^2}} = c\left(1 + \frac{\nu_o^2}{2\nu^2}\right)^{-1} \Rightarrow$$

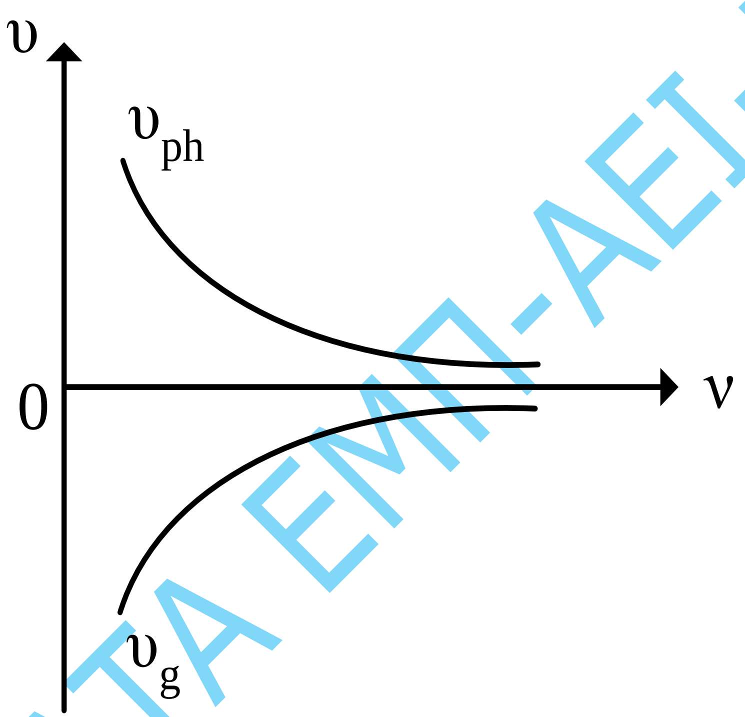
$$\Rightarrow \upsilon_g \cong c\left(1 - \frac{\nu_o^2}{2\nu^2}\right) \qquad (6)$$

**γ)** Το γεγονός ότι $\upsilon_{ph} > c$ στη σχέση **(5)** δεν έρχεται σε αντίθεση με τη θεωρία της σχετικότητας, γιατί οι πληροφορίες που μεταφέρει το κύμα διαδίδονται με την ομαδική ταχύτητα $\upsilon_g$, όπου σύμφωνα με τη σχέση **(6)** είναι $\upsilon_g < c$.

Σύμφωνα με τις **(5)** και **(6)** το γινόμενο $\upsilon_{ph}\upsilon_g$ είναι:

$$\upsilon_{ph}\cdot\upsilon_g = c^2\left(1+\frac{\nu_o^2}{2\nu^2}\right)\left(1-\frac{\nu_o^2}{2\nu^2}\right) = c^2\left(1-\frac{\nu_o^4}{4\nu^4}\right) \cong c^2$$

Στο ακόλουθο σχήμα παριστάνονται οι συναρτήσεις $\upsilon_{ph}(\nu)$ και $\upsilon_g(\nu)$.



**ΘΕΜΑ 16**

Η διηλεκτρική σταθερά $\varepsilon_r$ αερίου για μήκος κύματος λ δίνεται από την έκφραση $\varepsilon_r = (c/\upsilon_{ph})^2 = A + \frac{B}{\lambda^2} - D\lambda^2$,

όπου A, B και D είναι σταθερές, c είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό και $\upsilon_{ph}$ η φασική του ταχύτητα.

Αν $\upsilon_g$ είναι η ομαδική ταχύτητα, δείξτε ότι : $\upsilon_g \varepsilon_r = \upsilon_{ph}(A - 2D\lambda^2)$

**Λύση**

Είναι : $\varepsilon_r = A + \frac{B}{\lambda^2} - D\lambda^2$

Αλλά : $k = 2\pi/\lambda \Rightarrow \lambda = 2\pi/k$, οπότε η παραπάνω γίνεται :

$$\varepsilon_r = A + \frac{Bk^2}{4\pi^2} - \frac{4\pi^2 D}{k^2} \Rightarrow \varepsilon_r = A + B'k^2 - D'k^2 \qquad (1)$$

όπου $B' = \frac{B}{4\pi^2}$ και $D' = 4\pi^2 D$

Επίσης είναι : $\varepsilon_r = \frac{c^2}{\upsilon_{ph}^2} \Rightarrow \upsilon_{ph}^2 = \frac{c^2}{\varepsilon_r} \Rightarrow \upsilon_{ph} = \frac{c}{\varepsilon_r^{1/2}}$ **(2)**

Έτσι από τον ορισμό της φασικής ταχύτητας προκύπτει :

$$\upsilon_{ph} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = \upsilon_{ph} k \overset{(2)}{\Rightarrow} \omega = \frac{ck}{\varepsilon_r^{1/2}} = ck\varepsilon_r^{-1/2} \qquad (3)$$

Οπότε η ομαδική ταχύτητα είναι :

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} \overset{(3)}{\Rightarrow} \upsilon_g = c\left(\varepsilon_r^{-1/2} + k\frac{d}{dk}(\varepsilon_r^{-1/2})\right) = c\left(\varepsilon_r^{-1/2} - \frac{k}{2}\varepsilon_r^{-3/2}\frac{d\varepsilon_r}{dk}\right) \qquad (4)$$

όπου λόγω της **(1)** είναι: $\frac{d\varepsilon_r}{dk} = 2B'k + \frac{2D'}{k^3}$ και η **(4)** δίνει :

$$\upsilon_g = c\left[\varepsilon_r^{-1/2} - \varepsilon_r^{-3/2}\left(B'k^2 + \frac{D'}{k^2}\right)\right] \Rightarrow \upsilon_g \varepsilon_r = c\left[\varepsilon_r^{1/2} - \varepsilon_r^{-1/2}\left(B'k^2 + \frac{D'}{k^2}\right)\right] \quad \textbf{(5)}$$

Αλλά από την **(1)** φαίνεται ότι $B'k^2 = \varepsilon_r - A + D'/k^2$ και η **(5)** γίνεται :

$$\upsilon_g \varepsilon_r = c\left[\varepsilon_r^{1/2} - \varepsilon_r^{-1/2}\left(\varepsilon_r - A + \frac{2D'}{k^2}\right)\right] = c\left\{\varepsilon_r^{1/2} - \varepsilon_r^{-1/2}\left[\varepsilon_r - \left(A - \frac{2D'}{k^2}\right)\right]\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_g \varepsilon_r = c\varepsilon_r^{-1/2}\left\{\varepsilon_r - 1[\varepsilon_r - (A - 2D'/k^2)]\right\} = c\varepsilon_r^{-1/2}(\varepsilon_r - \varepsilon_r + A - 2D'/k^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_g \varepsilon_r = c\varepsilon_r^{-1/2}(A - 2D'/k^2) \quad \textbf{(6)}$$

Όμως από την **(2)** είναι : $\upsilon_{ph} = c\varepsilon_r^{-1/2}$ και $D' = 4\pi^2 D$ οπότε η **(6)** δίνει :

$$\upsilon_g \varepsilon_r = \upsilon_{ph}(A - 2D4\pi^2/k^2) \Rightarrow \upsilon_g \varepsilon_r = \upsilon_{ph}(A - 2D\lambda^2),\ \text{όπου}\ \lambda^2 = \frac{4\pi^2}{k^2}$$

**ΘΕΜΑ 17**

Δίνεται το ηλεκτρικό πεδίο $E_x = E_o e^{i(\omega t - kz)}$ που διαδίδεται σε μονωτή με $\varepsilon = 9\varepsilon_o$, $\mu = \mu_o$, $\sigma = 0$. Να υπολογιστούν :

**α)** Η σχέση διασποράς.

**β)** Η φασική ταχύτητα $\upsilon_{ph}$, η εμπέδηση Z, το μήκος κύματος λ και ο κυματάριθμος k σε σχέση με τους αντίστοιχους όρους στο κενό.

**γ)** Τα $E_x = E(z,t)$ και $H_y = H(z,t)$ αν $E_o = 100V/m$ και $\nu = 300MHz$.

**Λύση**

**α)** Η κυματική εξίσωση του ηλεκτρικού πεδίου είναι:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Οπότε αντικαθιστώντας το $E = E_o e^{i(\omega t - kz)}$ στην **(1)** προκύπτει η σχέση διασποράς :

$$-k^2 E_o e^{i(\omega t - kz)} = -\omega^2 \varepsilon\mu\, E_o e^{i(\omega t - kz)} \Rightarrow k^2 = \omega^2 \varepsilon\mu \qquad \textbf{(2)}$$

**β)** Η φασική ταχύτητα είναι :

$$\upsilon_{ph} = \frac{\omega}{k} \overset{(2)}{=} \frac{\omega}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{9\varepsilon_o\mu_o}} = \frac{1}{3\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}} \Rightarrow \upsilon_{ph} = \frac{c}{3}$$

Η εμπέδηση είναι :

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_o}{9\varepsilon_o}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}} = \frac{Z_o}{3} = \frac{120\pi}{3}\Omega \Rightarrow Z = 40\pi\,\Omega, \text{ όπου } Z_o = 120\pi\,\Omega$$

Το μήκος κύματος είναι :

$$\lambda = \frac{\upsilon_{ph}}{\nu} = \frac{c}{3\nu} \Rightarrow \lambda = \frac{\lambda_o}{3}$$

Ο κυματάριθμος είναι : $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_o/3} = 3\frac{2\pi}{\lambda_o} \Rightarrow k = 3k_o$

**γ)** Είναι : $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 300 \cdot 10^6 \Rightarrow \omega = 6\pi 10^8 \, \mathrm{rad/sec}$

και $k = 3k_o = 3\frac{\omega}{c} = \frac{3 \cdot 6\pi 10^8}{3 \cdot 10^8} \Rightarrow k = 6\pi \, \mathrm{rad/m}$

Άρα : $E_x = E_o \cos(\omega t - kz) \Rightarrow E_x = 100\cos(6\pi 10^8 t - 6\pi z) \; \mathrm{V/m}$

και $H_y = \frac{E_x}{Z} = \frac{100}{40\pi}\cos(6\pi 10^8 t - 6\pi z) \Rightarrow H_y = \frac{5}{2\pi}\cos(6\pi 10^8 t - 6\pi z)\mathrm{A/m}$

**ΘΕΜΑ 18**

Ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται σε ένα μέσο. Το ηλεκτρικό πεδίο έχει τη μορφή $\vec{E} = 10\cos(10^8 t - 3z)\hat{x}$. Προσδιορίστε αν το μέσο που διαδίδεται το κύμα είναι κενό, τέλειος μονωτής ή αγωγός. Προσδιορίστε επίσης το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$.

**Λύση**

Επειδή το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου είναι σταθερό το μέσο δεν μπορεί να είναι αγωγός, γιατί στους αγωγούς το πλάτος του Ε φθίνει.

Η ταχύτητα του κύματος είναι :

$$\upsilon = \frac{\omega}{k} = \frac{10^8}{3} = 3.33 \cdot 10^7\ \mathrm{m/sec} < c$$

Άρα αφού υ<c το μέσο δεν είναι κενό, αλλά μονωτής.

Το μαγνητικό πεδίο είναι :

$$\vec{B} = \frac{E_o}{\upsilon}\cos(\omega t - kz)\hat{y} = \frac{10}{10^8/3}\cos(10^8 t - 3z)\hat{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{B} = 3 \cdot 10^{-7}\cos(10^8 t - 3z)\hat{y}\ \text{Tesla}$$

**ΘΕΜΑ 19**

Επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα $E = E_o \sin(\omega t - kz)$ προσπίπτει σε αγώγιμο μέσο μαγνητικής διαπερατότητας μ και ειδικής αγωγιμότητας σ. Υπολογίστε το βάθος που το πλάτος του παραπάνω κύματος θα γίνει το 10 % της αρχικής του τιμής.

**Λύση**

Η εξασθένηση του πλάτους του ηλεκτρικού πεδίου που θα υποστεί το ηλεκτρομαγνητικό κύμα το οποίο προσπίπτει στο αγώγιμο μέσο είναι:

$$E = E_o e^{-\alpha z} \Rightarrow 0{,}1E_o = E_o e^{-\alpha z} \Rightarrow 0{,}1 = e^{-\alpha z} \Rightarrow -\alpha z = \ell n 0{,}1 \Rightarrow -\alpha z = -2{,}3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{2{,}3}{\alpha} \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά σύμφωνα με την **(7-18)** για το επιδερμικό βάθος είναι:

$$\alpha = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}} \qquad \textbf{(2)}$$

Επομένως η **(1)** λόγω της **(2)** δίνει: $z = 2{,}3\sqrt{\dfrac{2}{\mu\sigma\omega}}$

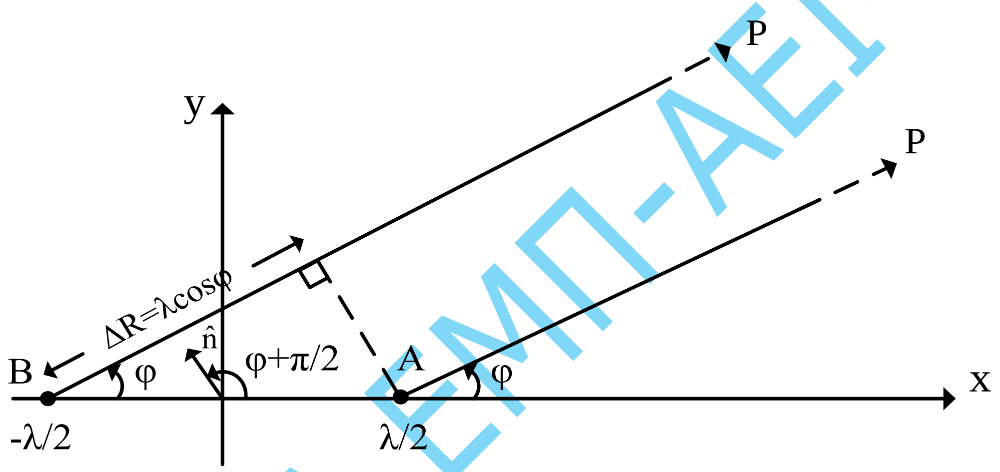
**ΘΕΜΑ 20**

Οι συντεταγμένες δυο σημειακών φορτίων Α και Β δίνονται συναρτήσει του χρόνου ως εξής :

$$x_A = \lambda/2,\ \ y_A = b\cos\omega t,\ \ z_A = 0 \ \text{και}\ \ x_B = -\lambda/2,\ y_B = b\cos\omega t,\ \ z_B = 0$$

Τα φορτία των Α και Β είναι και τα δυο ίσα με q και $\lambda = 2\pi c/\omega$.
Υπολογίστε την ένταση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, που οφείλεται στην παραπάνω κίνηση των φορτίων, στο σημείο P με συντεταγμένες (Rcosφ, Rsinφ, 0), αν R>>λ και b<<λ.

**Λύση**




Η κοινή στιγμιαία επιτάχυνση των φορτίων Α και Β είναι πάντα παράλληλη προς τον άξονα y και είναι :

$$\vec{\alpha} = -b\omega^2\cos\omega t\hat{y} \qquad \textbf{(1)}$$

Στο σημείο παρατήρησης P (Rcosφ,Rsinφ,0) υπάρχει ένα ηλεκτρικό πεδίο ακτινοβολίας :

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B \qquad \textbf{(2)}$$

όπου $\vec{E}_A$ και $\vec{E}_B$ είναι τα ηλεκτρικά πεδία που προκαλεί κάθε φορτίο στο σημείο P και είναι :

$$\vec{E}_A(t) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_o c^2 R}\vec{\alpha}_\perp\left(t - \frac{R}{c}\right) \qquad \textbf{(3)}$$

$$\vec{E}_B(t) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_o c^2 R}\vec{\alpha}_\perp\left(t - \frac{R+\Delta R}{c}\right) \qquad \textbf{(4)}$$

όπου $\vec{\alpha}_\perp$ είναι η κάθετη συνιστώσα της επιτάχυνσης και λόγω της **(1)** είναι:

$$\vec{\alpha}_\perp = \alpha\cos\varphi\hat{n} \Rightarrow \vec{\alpha}_\perp = -b\omega^2\cos\omega t\cos\varphi\hat{n} \qquad \textbf{(5)}$$

όπου $\hat{n}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στη διανυσματική ακτίνα του P.

Συνεπώς το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P **(2)** λόγω των **(3)**, **(4)** και **(5)** είναι:

$$\vec{E} = \frac{qb\omega^2}{4\pi\varepsilon_o c^2 R}\cos\varphi\left[\cos\left(\omega t - \frac{\omega R}{c}\right) + \cos\left(\omega t - \frac{\omega R}{c} - \frac{\omega\Delta R}{c}\right)\right]\hat{n} \qquad \textbf{(6)}$$

Το διάνυσμα Poynting στο σημείο P έχει ακτινική διεύθυνση και μέτρο :

$$|S| = \frac{1}{\mu_o}|\vec{E}\times\vec{B}| = \frac{1}{\mu_o c}|\vec{E}|^2 \text{ επειδή } \vec{E}\perp\vec{B} \text{ και } |\vec{B}| = |\vec{E}|/c$$

Οπότε λόγω της **(6)** η παραπάνω γίνεται :

$$|\vec{S}| = \frac{q^2b^2\omega^4}{16\pi^2\varepsilon_o^2\mu_o c^5 R^2}\cos^2\varphi\left[\cos\left(\omega t - \frac{\omega R}{c}\right) + \cos\left(\omega t - \frac{\omega R}{c} - \frac{\omega\Delta R}{c}\right)\right]^2 \qquad \textbf{(7)}$$

Η ένταση I της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας στο σημείο P ισούται με τη μέση χρονική τιμή $<|\vec{S}|>$. Δηλαδή είναι :

$$I = <|\vec{S}|> \overset{(7)}{=}$$

$$= \frac{q^2b^2\omega^4\cos^2\varphi}{16\pi^2\varepsilon_o^2\mu_o c^5 R^2} < \left[\cos\left(\omega t - \frac{\omega R}{c}\right) + \cos\left(\omega t - \frac{\omega R}{c} - \frac{\omega\Delta R}{c}\right)\right]^2 > \qquad \textbf{(8)}$$

όπου $$\left[\cos\left(\omega t-\frac{\omega R}{c}\right)+\cos\left(\omega t-\frac{\omega R}{c}-\frac{\omega\Delta R}{c}\right)\right]^2=$$

$$=\cos^2\left(\omega t-\frac{\omega R}{c}\right)+\cos^2\left(\omega t-\frac{\omega R}{c}-\frac{\omega\Delta R}{c}\right)+$$

$$+2\cos\left(\omega t-\frac{\omega R}{c}\right)\cos\left(\omega t-\frac{\omega R}{c}-\frac{\omega\Delta R}{c}\right)$$

Ενώ : $$<\cos^2\left(\omega t-\frac{R}{c}\right)>=<\cos^2\left(\omega t-\frac{\omega R}{c}-\frac{\omega\Delta R}{c}\right)>=\frac{1}{2}$$

Και

$$<\cos\left(\omega t-\frac{\omega R}{c}\right)\cos\left(\omega t-\frac{\omega R}{c}-\frac{\omega\Delta R}{c}\right)>=\frac{1}{2}<\cos\left(2\omega t-\frac{2\omega R}{c}-\frac{\omega\Delta R}{c}\right)+$$

$$+\cos\left(\frac{\omega\Delta R}{c}\right)>=0+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\omega\Delta R}{c}\right)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\omega\Delta R}{c}\right)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η γνωστή τριγωνομετρική σχέση μετατροπής του γινομένου σε άθροισμα $\cos\alpha\cos\beta=[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]/2$ και ότι $<\cos(\alpha t+\beta)>=0$.

Επομένως τελικά είναι :

$$<\left[\cos\left(\omega t-\frac{\omega R}{c}\right)+\cos\left(\omega t-\frac{\omega R}{c}-\frac{\omega\Delta R}{c}\right)\right]^2>=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\omega\Delta R}{c}\right)=$$

$$1+\cos\left(\frac{\omega\Delta R}{c}\right)=2\cos^2\left(\frac{\omega\Delta R}{2c}\right)$$

Άρα η **(8)** γράφεται :

$$I=\frac{q^2b^2\omega^4\cos^2\varphi}{16\pi^2\varepsilon_o^2\mu_o c^5R^2}2\cos^2\left(\frac{\omega\Delta R}{2c}\right) \qquad \textbf{(9)}$$

Αλλά $\Delta R = \lambda \cos\varphi$ είναι η διαφορά των αποστάσεων του σημείου Ρ από τα φορτία Α και Β αντίστοιχα. Έτσι είναι :

$$\frac{\omega \Delta R}{2c} = \frac{\omega \lambda \cos\varphi}{2c} = \frac{\omega 2\pi \cos\varphi}{2ck} = \frac{ck\pi \cos\varphi}{ck} = \pi \cos\varphi$$

όπου $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$ και $\omega = ck$

Οπότε τελικά είναι:

$$I = \frac{q^2 b^2 \omega^4 \cos^2\varphi}{8\pi^2 \varepsilon_o^2 \mu_o c^5 R^2} \cos^2(\pi \cos\varphi)$$

**ΘΕΜΑ 21**

Δυο όμοια σημειακά φορτία $q_1 = q_2 = q$ εκτελούν αρμονική ταλάντωση με το ίδιο πλάτος $z_o$, την ίδια κυκλική συχνότητα ω και διαφορά φάσης $180^o$, πάνω τον άξονα z. Οι ταλαντώσεις τους είναι συμμετρικές ως προς την αρχή Ο. Συγκεκριμένα οι απομακρύνσεις τους $z_1$ και $z_2$ από την αρχή δίνονται, συναρτήσει του χρόνου από τις σχέσεις :

$$z_1 = z_o + z_o \cos\omega t \qquad \text{και} \qquad z_2 = -z_o - z_o \cos\omega t$$

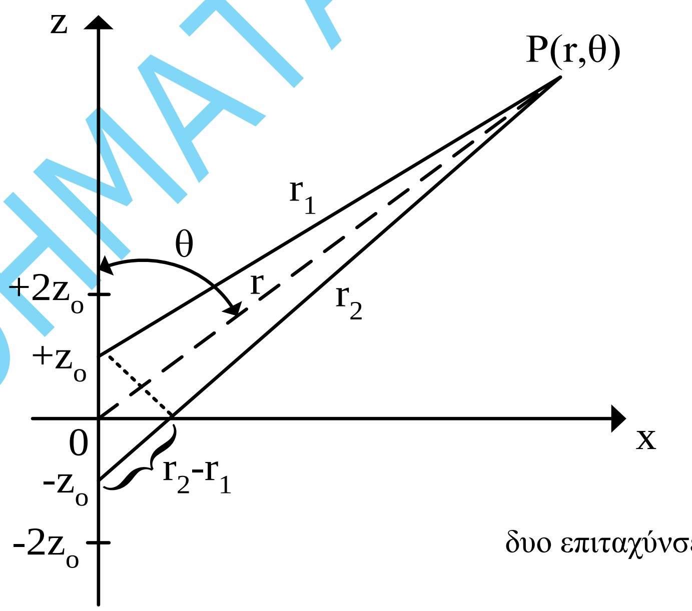
Το σύστημα αυτό λέγεται **ηλεκτρικό τετράπολο** και ενδιαφέρει το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο ακτινοβολίας σε ένα σημείο P(r,θ), που απέχει μεγάλη απόσταση r από τα φορτία (δηλαδή $r \gg z_o$), όταν το μήκος κύματος λ της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας είναι πολύ μεγαλύτερο από το πλάτος ταλάντωσης των φορτίων (δηλαδή $\lambda \gg z_o$ ή $kz_o \ll 2\pi$).

**α)** Βρείτε τα ηλεκτρικά πεδία ακτινοβολίας $E_1$ και $E_2$, που οφείλονται σε κάθε φορτίο χωριστά. Σε ποιες διευθύνσεις (ορισμένες με την πολική γωνία θ) καθένα πεδίο $E_1$, $E_2$ μηδενίζεται;

**β)** Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο ακτινοβολίας $E_1 + E_2$ που προκύπτει σαν επαλληλία των δυο παραπάνω πεδίων. Σε ποιές διευθύνσεις (ορισμένες με τη γωνία θ) μηδενίζεται το συνολικό πεδίο $E_1 + E_2$;

**γ)** Σε ένα πολικό διάγραμμα σχεδιάστε την εξάρτηση του συνολικού πεδίου $E_1 + E_2$ από την πολική γωνία θ. Η εξάρτηση αυτή από τη γωνία θ είναι χαρακτηριστική της τετραπολικής ακτινοβολίας.

**Λύση**




**α)** Το ηλεκτρικό πεδίο ακτινοβολίας κάθε φορτίου είναι ανάλογο της εγκάρσιας ως προς την OP συνιστώσας της επιτάχυνσης την καθυστερημένη χρονική στιγμή $t' = t - \frac{r_i}{c}$ (i=1,2). Συνεπώς οι καθυστερημένες εγκάρσιες προβολές των δυο επιταχύνσεων είναι :

$$\vec{\alpha}_{\perp 1} = \ddot{z}_1(t')\sin\theta\hat{n} = -z_o\omega^2 \sin\theta\cos\left(\omega t - \omega\frac{r_1}{c}\right)\hat{n} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\vec{\alpha}_{\perp 2} = \ddot{z}_2(t')\sin\theta\hat{n} = z_o\omega^2 \sin\theta\cos\left(\omega t - \omega\frac{r_2}{c}\right)\hat{n} \qquad \textbf{(2)}$$

όπου $r_1, r_2$ είναι οι αποστάσεις του σημείου P από το κέντρο της ταλάντωσης κάθε φορτίου και $\hat{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην OP. Επίσης επειδή $r >> z_o$ θα ισχύει $\theta_1 \cong \theta_2 \cong \theta$ και $r_1 \cong r_2 \cong r$, ενώ από το σχήμα είναι $r_2 - r_1 = 2z_o\cos\theta$.

Επομένως λόγω του ότι k=ω/c τα ηλεκτρικά πεδία είναι :

$$\vec{E}_1 = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_o c^2 r}\vec{\alpha}_{\perp 1}\left(t - \frac{r_1}{c}\right) \overset{(1)}{\Rightarrow} \vec{E}_1 = \frac{qz_o\omega^2}{4\pi\varepsilon_o c^2 r}\sin\theta\cos(\omega t - kr_1)\hat{n} \qquad \textbf{(3)}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_o c^2 r}\vec{\alpha}_{\perp 2}\left(t - \frac{r_2}{c}\right) \overset{(2)}{\Rightarrow} \vec{E}_2 = \frac{-qz_o\omega^2}{4\pi\varepsilon_o c^2 r}\sin\theta\cos(\omega t - kr_2)\hat{n} \qquad \textbf{(4)}$$

Παρατηρείται από τις σχέσεις **(3)** και **(4)** ότι στις διευθύνσεις θ=0 και θ=π καθένα πεδίο $E_1$, $E_2$ μηδενίζεται, αφού μηδενίζεται η αντίστοιχη εγκάρσια προβολή της καθυστερημένης επιτάχυνσης.

**β)** Η επαλληλία των δυο παραπάνω πεδίων δίνει :

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{-qz_o\omega^2}{4\pi\varepsilon_o c^2 r}\sin\theta[\cos(\omega t - kr_2) - \cos(\omega t - kr_1)]\hat{n} \qquad \textbf{(5)}$$

Αλλά :

$$\cos(\omega t - kr_2) - \cos(\omega t - kr_1) = -2\sin\left(\frac{2\omega t - kr_1 - kr_2}{2}\right)\sin\left(\frac{kr_1 - kr_2}{2}\right) =$$

$$= 2\sin\left(\frac{2\omega t - kr_1 - kr_2}{2}\right)\sin\left[\frac{k(r_2 - r_1)}{2}\right] = 2\sin(\omega t - kr)\sin(kz_o\cos\theta)$$

όπου $r_1 \cong r_2 \cong r$ και $r_2 - r_1 = 2z_o \cos\theta$

Άρα η **(5)** γράφεται :

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{-qz_o\omega^2}{2\pi\varepsilon_o c^2 r}\sin\theta\sin(kz_o\cos\theta)\sin(\omega t - kr)\hat{n} \qquad \textbf{(6)}$$

Επειδή όμως $kz_o << 2\pi$ είναι $\sin(kz_o\cos\theta) \cong kz_o\cos\theta$ οπότε η **(6)** γίνεται :

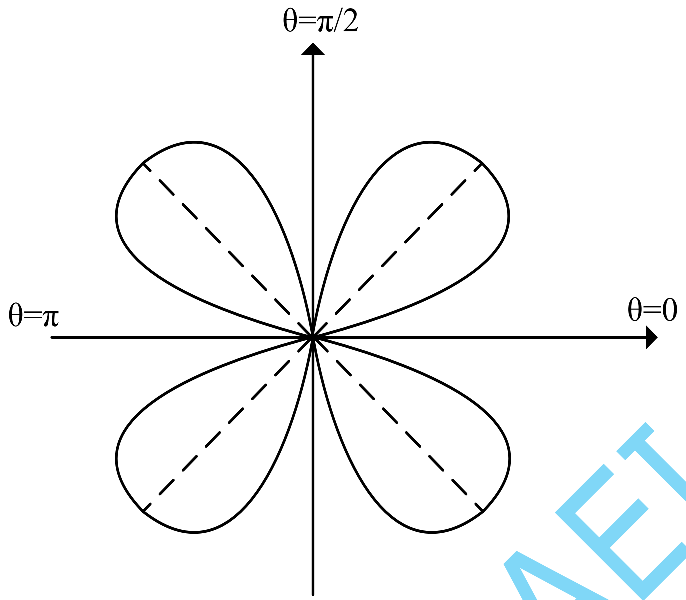
$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{-qz_o^2\omega^2 k}{2\pi\varepsilon_o c^2 r}\sin\theta\cos\theta\sin(\omega t - kr)\hat{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{-qz_o^2\omega^3}{4\pi\varepsilon_o c^3 r}\sin 2\theta\sin(\omega t - kr)\hat{n} \qquad \textbf{(7)}$$

όπου αντικαταστάθηκε το $k = \dfrac{\omega}{c}$ και $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta$.

Από τη σχέση **(7)** παρατηρείται ότι το συνολικό πεδίο $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ μηδενίζεται στις διευθύνσεις θ=0, θ=π/2 και θ=π.

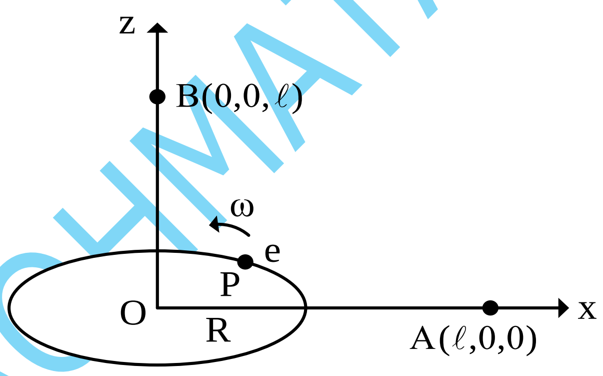
**γ)** Στο ακόλουθο πολικό διάγραμμα παριστάνεται η εξάρτηση του συνολικού πεδίου από την πολική γωνία θ ως αποτέλεσμα της παρουσίας του παράγοντα sin2θ.

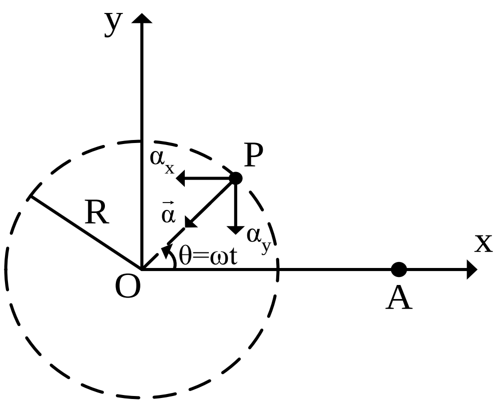



**ΘΕΜΑ 22**

Ηλεκτρόνιο κινείται σε κυκλική τροχιά, στο επίπεδο Oxy με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα R, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Σε μια τυχαία θέση του ηλεκτρονίου να υπολογιστούν η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και η ένταση ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας στα σημεία A($\ell$,0,0) και B(0,0, $\ell$), όπου $\ell$>>R.

**Λύση**




Επειδή το ηλεκτρόνιο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, σε μια τυχαία θέση P το ηλεκτρόνιο έχει μόνο κεντρομόλο επιτάχυνση, δηλαδή η ολική του επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ έχει φορά προς το κέντρο O και μέτρο $\omega^2 R$. Επομένως είναι:

$$\vec{\alpha} = -\alpha\cos\theta\hat{x} - \alpha\sin\theta\hat{y} \Rightarrow \vec{\alpha} = -\omega^2 R\cos\omega t\hat{x} - \omega^2 R\sin\omega t\hat{y} \qquad \textbf{(1)}$$

όπου λόγω της ομαλής κυκλικής κίνησης είναι θ=ωt.

Για το σημείο Α($\ell$,0,0) η εγκάρσια συνιστώσα της επιτάχυνσης είναι :

$$\vec{\alpha}_{\perp}(t) = -\omega^2 R\sin\omega t\hat{y} \qquad \textbf{(2)}$$

Ενώ για το σημείο Β(0,0, $\ell$), επειδή $\ell$>>R το Β βρίσκεται πολύ μακριά από το Ο, οπότε είναι $OB \perp \vec{\alpha}$, δηλαδή η εγκάρσια συνιστώσα της επιτάχυνσης για το Β είναι :

$$\vec{\alpha}_{\perp}(t) = -\omega^2 R\cos\omega t\hat{x} - \omega^2 R\sin\omega t\hat{y} \qquad \textbf{(3)}$$

Άρα η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στα σημεία Α και Β είναι :

$$\vec{E}_A = \frac{-q\vec{\alpha}_{\perp}(t - r/c)}{4\pi\varepsilon_o c^2 r} \overset{(2)}{=} \frac{-e\omega^2 R}{4\pi\varepsilon_o c^2 \ell}\sin(\omega t - \omega\ell/c)\hat{y} \qquad \textbf{(4)}$$

$$\vec{E}_B = \frac{-q\vec{\alpha}_{\perp}(t - r/c)}{4\pi\varepsilon_o c^2 r} = \frac{-e\omega^2 R}{4\pi\varepsilon_o c^2 \ell}[\cos(\omega t - \omega\ell/c)\hat{x} + \sin(\omega t - \omega\ell/c)\hat{y}] \qquad \textbf{(5)}$$

Το μέτρο του διανύσματος Poynting στο σημείο Α είναι :

$$|\vec{S}_A| = \frac{|\vec{E}_A|^2}{\mu_o c} \overset{(4)}{=} \frac{e^2\omega^4 R^2}{16\pi^2\varepsilon_o^2\mu_o c^5 \ell^2}\sin^2(\omega t - \omega\ell/c)$$

Άρα η ένταση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας στο σημείο Α ισούται με τη μέση χρονική τιμή του μέτρου του διανύσματος Poynting στο σημείο αυτό. Δηλαδή :

$$I_A = <|\vec{S}_A|> = \frac{e^2\omega^4 R^2}{16\pi^2\varepsilon_o^2\mu_o c^5 \ell^2} < \sin^2(\omega t - \omega\ell/c) > \Rightarrow I_A = \frac{e^2\omega^4 R^2}{32\pi^2\varepsilon_o^2\mu_o c^5 \ell^2}$$

όπου $< \sin^2(\omega t - \omega\ell/c) > = \dfrac{1}{2}$

Αντίστοιχα το μέτρο διανύσματος Poynting στο σημείο Β είναι :

$$|\vec{S}_B| = \frac{|\vec{E}_B|^2}{\mu_o c} \overset{(5)}{=} \frac{e^2\omega^4 R^2}{16\pi^2\varepsilon_o^2\mu_o c^5 \ell^2}\left[\cos^2(\omega t - \omega\ell/c) + \sin^2(\omega t - \omega\ell/c)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{S}_B| = \frac{e^2\omega^4 R^2}{16\pi^2\varepsilon_o^2\mu_o c^5 \ell^2}$$

όπου $\quad \langle \cos^2(\omega t - \omega\ell/c) \rangle = \langle \sin^2(\omega t - \omega\ell/c) \rangle = \frac{1}{2}$

Άρα : $\quad I_B = \langle |\vec{S}_B| \rangle = \frac{e^2\omega^4 R^2}{16\pi^2\varepsilon_o^2\mu_o c^5 \ell^2}$