ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

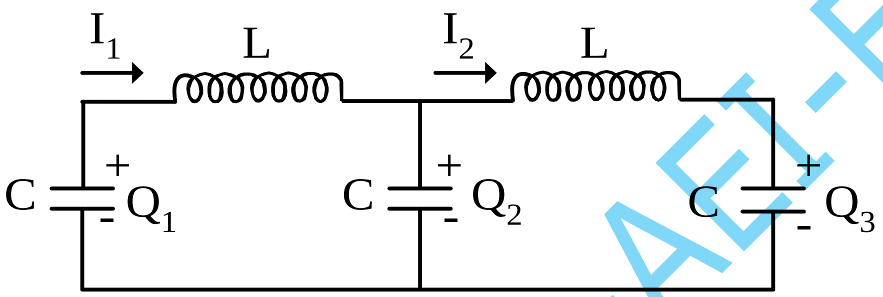
Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 4.1

Να βρεθούν οι συχνότητες σε Hz των δυο κανονικών τρόπων ταλάντωσης του διπλού κυκλώματος LC του σχήματος. Δίνεται: L=10H και C=6μF.

Λύση



Σύμφωνα με όσα έχουν αναλυτικά παρουσιαστεί στην παράγραφο 4.2 οι συζευγμένες ταλαντώσεις ενός διπλού κυκλώματος LC περιγράφονται από τις εξισώσεις **(4-6)**.
Εφαρμόζοντας είτε τη μέθοδο των κανονικών τρόπων ταλάντωσης, είτε τη μέθοδο των κανονικών συντεταγμένων προκύπτουν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης, ως:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{και} \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{LC}} \qquad \textbf{(1)}$$

Άρα τελικά για L=10H και C=6μF οι **(1)** δίνουν:

$$\omega_1 = 2\pi f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow f_1 = 20{,}55\text{Hz}$$

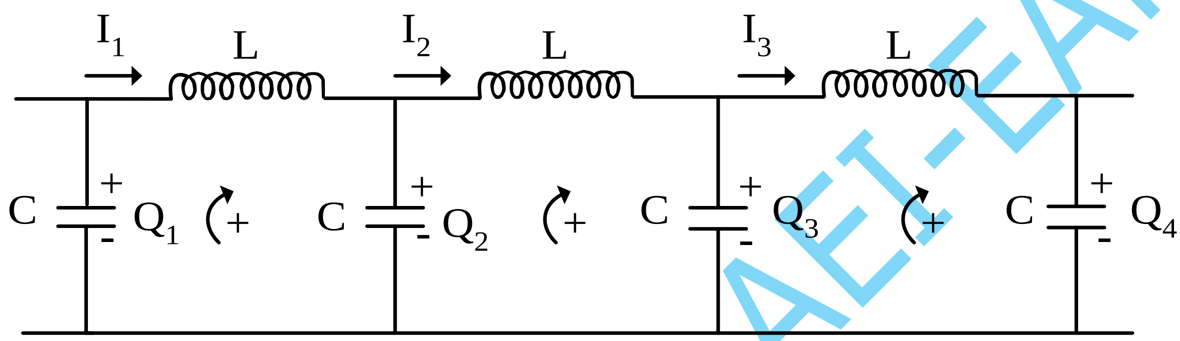
και

$$\omega_2 = 2\pi f_2 \Rightarrow f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{LC}} = \sqrt{3} f_1 \Rightarrow f_2 = 35{,}59\text{Hz}$$

ΘΕΜΑ 2

Θεωρείστε ένα κύκλωμα LC που αποτελείται από 3 αυτεπαγωγές και 4 χωρητικότητες, συνδεδεμένες με τον τρόπο που δείχνει το σχήμα. Βρείτε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης και τους λόγους των πλατών των ρευμάτων.

Λύση



Το σύστημα αυτό διαθέτει τρεις βαθμούς ελευθερίας και επιλέγονται σαν μεταβλητές για την περιγραφή των ταλαντώσεων τα ρεύματα I_1, I_2 και I_3 που διαρρέουν τα πηνία.
Εφαρμόζοντας τον 2$^{\text{ο}}$ κανόνα του Kirchhoff στους τρεις βρόχους του κυκλώματος, προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$
\begin{aligned}
V_{C_1} + V_{L_1} - V_{C_2} = 0 &\Rightarrow \frac{Q_1}{C} - L\frac{dI_1}{dt} - \frac{Q_2}{C} = 0 \\
V_{C_2} + V_{L_2} - V_{C_3} = 0 &\Rightarrow \frac{Q_2}{C} - L\frac{dI_2}{dt} - \frac{Q_3}{C} = 0 \qquad \textbf{(1)} \\
V_{C_3} + V_{L_3} - V_{C_4} = 0 &\Rightarrow \frac{Q_3}{C} - L\frac{dI_3}{dt} - \frac{Q_4}{C} = 0
\end{aligned}
$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους των παραπάνω εξισώσεων και παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο, προκύπτει το ακόλουθο σύστημα:

$$L\frac{d^2I_1}{dt^2}=\frac{1}{C}\frac{dQ_1}{dt}-\frac{1}{C}\frac{dQ_2}{dt}$$

$$L\frac{d^2I_2}{dt^2}=\frac{1}{C}\frac{dQ_2}{dt}-\frac{1}{C}\frac{dQ_3}{dt} \qquad \textbf{(2)}$$

$$L\frac{d^2I_3}{dt^2}=\frac{1}{C}\frac{dQ_3}{dt}-\frac{1}{C}\frac{dQ_4}{dt}$$

Επίσης από την αρχή διατήρησης του φορτίου και με βάση τη θετική φορά διαγραφής που εκλέχτηκε, ισχύουν οι σχέσεις:

$$I_1=-\frac{dQ_1}{dt},\quad I_3=\frac{dQ_4}{dt},\quad I_2-I_1=-\frac{dQ_2}{dt}\quad \text{και}\quad I_3-I_2=-\frac{dQ_3}{dt} \qquad \textbf{(3)}$$

Παρατηρείται ότι η πρώτη από τις παραπάνω εξισώσεις υποδηλώνει ότι το ρεύμα I_1 συντηρείται με δαπάνη του φορτίου Q_1, η δεύτερη ότι το ρεύμα I_3 αυξάνει το φορτίο Q_4 και οι άλλες δυο, που είναι εφαρμογή του 1^ου^ κανόνα του Kirchhoff στους κόμβους μεταξύ των τριών πηνίων, ότι η διαφορά των ρευμάτων I_2-I_1 και I_3-I_2 είναι ίση με τη μείωση του φορτίου Q_2 και Q_3 αντίστοιχα.

Συνεπώς αντικαθιστώντας τις σχέσεις **(3)** στις εξισώσεις **(2)**, προκύπτει το σύστημα:

$$L\frac{d^2I_1}{dt^2}=-\frac{1}{C}I_1+\frac{1}{C}(I_2-I_1)\Rightarrow L\frac{d^2I_1}{dt^2}=-\frac{2}{C}I_1+\frac{1}{C}I_2$$

$$L\frac{d^2I_2}{dt^2}=-\frac{1}{C}(I_2-I_1)+\frac{1}{C}(I_3-I_2)\Rightarrow L\frac{d^2I_2}{dt^2}=\frac{1}{C}I_1-\frac{2}{C}I_2+\frac{1}{C}I_3 \qquad \textbf{(4)}$$

$$L\frac{d^2I_3}{dt^2}=-\frac{1}{C}(I_3-I_2)-\frac{1}{C}I_3\Rightarrow L\frac{d^2I_3}{dt^2}=\frac{1}{C}I_2-\frac{2}{C}I_3$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο των κανονικών τρόπων ταλάντωσης, θεωρώντας λύσεις της μορφής $I_1(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$, $I_2(t)=B\cos(\omega t+\varphi)$, $I_3(t)=\Gamma\cos(\omega t+\varphi)$ και αντικαθιστώντας στο σύστημα **(4)**, προκύπτει:

$$-L A\omega^2 = -\frac{2}{C}A + \frac{1}{C}B \Rightarrow \left(L\omega^2 - \frac{2}{C}\right)A + \frac{1}{C}B = 0$$

$$-L B\omega^2 = \frac{1}{C}A - \frac{2}{C}B + \frac{1}{C}\Gamma \Rightarrow \frac{1}{C}A + \left(L\omega^2 - \frac{2}{C}\right)B + \frac{1}{C}\Gamma = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

$$-L\Gamma\omega^2 = \frac{1}{C}B - \frac{2}{C}\Gamma \Rightarrow \frac{1}{C}B + \left(L\omega^2 - \frac{2}{C}\right)\Gamma = 0$$

Ο μηδενισμός της ορίζουσας των συντελεστών του ομογενούς αυτού συστήματος παρέχει τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης:

$$\begin{vmatrix} L\omega^2 - \frac{2}{C} & \frac{1}{C} & 0 \\ \frac{1}{C} & L\omega^2 - \frac{2}{C} & \frac{1}{C} \\ 0 & \frac{1}{C} & L\omega^2 - \frac{2}{C} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(L\omega^2 - \frac{2}{C}\right)\begin{vmatrix} L\omega^2 - \frac{2}{C} & \frac{1}{C} \\ \frac{1}{C} & L\omega^2 - \frac{2}{C} \end{vmatrix} - \frac{1}{C}\begin{vmatrix} \frac{1}{C} & \frac{1}{C} \\ 0 & L\omega^2 - \frac{2}{C} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(L\omega^2 - \frac{2}{C}\right)\left[\left(L\omega^2 - \frac{2}{C}\right)^2 - \frac{1}{C^2}\right] - \frac{1}{C}\frac{1}{C}\left(L\omega^2 - \frac{2}{C}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(L\omega^2 - \frac{2}{C}\right)\left[\left(L\omega^2 - \frac{2}{C}\right)^2 - \frac{2}{C^2}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(L\omega^2 - \frac{2}{C}\right)\left(L^2\omega^4 - \frac{4}{C}L\omega^2 - \frac{6}{C^2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_1{}^2 = \frac{2-\sqrt{10}}{LC}, \quad \omega_2{}^2 = \frac{2}{LC} \quad \text{και} \quad \omega_3{}^2 = \frac{2+\sqrt{10}}{LC}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των ω_1, ω_2 και ω_3 διαδοχικά στις εξισώσεις **(5)**, προκύπτει ο λόγος των πλατών των ρευμάτων ως εξής:

1^{ος} τρόπος ταλάντωσης: για $\omega_1^2 = \frac{2-\sqrt{10}}{LC}$ είναι: $\frac{B}{A} = \frac{B}{\Gamma} = \sqrt{10}$ και $\frac{\Gamma}{A} = 9$

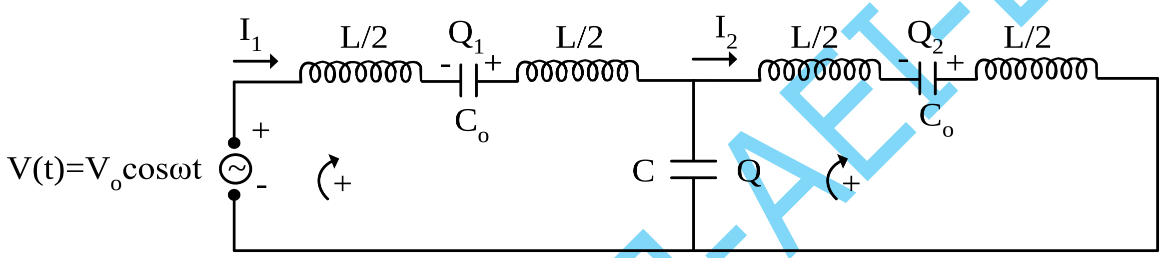
2^{ος} τρόπος ταλάντωσης: για $\omega_2^2 = \frac{2}{LC}$ είναι: $\frac{\Gamma}{A} = -1$ και $\frac{B}{A} = 0$

3^{ος} τρόπος ταλάντωσης: για $\omega_3^2 = \frac{2+\sqrt{10}}{LC}$ είναι: $\frac{B}{A} = \frac{B}{\Gamma} = -\sqrt{10}$ και $\frac{\Gamma}{A} = 9$

ΘΕΜΑ 3

Εξετάστε το ηλεκτρικό φίλτρο διέλευσης ζώνης που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα διατυπώνοντας τη διαφορική εξίσωση για τα ρεύματα I_1 και I_2. Δείξτε ότι οι κανονικές συντεταγμένες είναι $I_\alpha = I_1+I_2$ και $I_b = I_1 - I_2$ και βρείτε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης του συστήματος.

Λύση



Εφαρμόζοντας τον 2ο κανόνα του Kirchhoff για κάθε ένα από τους δυο βρόχους του κυκλώματος, προκύπτει:

$$\frac{L}{2}\frac{dI_1}{dt}+\frac{Q_1}{C_o}+\frac{L}{2}\frac{dI_1}{dt}+\frac{Q}{C}=V_o\cos\omega t \Rightarrow L\frac{dI_1}{dt}+\frac{Q_1}{C_o}+\frac{Q}{C}=V_o\cos\omega t$$

$$\frac{L}{2}\frac{dI_2}{dt}+\frac{Q_2}{C_o}+\frac{L}{2}\frac{dI_2}{dt}-\frac{Q}{C}=0 \Rightarrow L\frac{dI_2}{dt}+\frac{Q_2}{C_o}-\frac{Q}{C}=0 \qquad \textbf{(1)}$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο τις εξισώσεις **(1)** προκύπτει το σύστημα:

$$L\frac{d^2I_1}{dt^2}+\frac{1}{C_o}\frac{dQ_1}{dt}+\frac{1}{C}\frac{dQ}{dt}=-\omega V_o \sin\omega t$$

$$L\frac{d^2I_2}{dt^2}+\frac{1}{C_o}\frac{dQ_2}{dt}-\frac{1}{C}\frac{dQ}{dt}=0 \qquad \textbf{(2)}$$

Αλλά επειδή τα ρεύματα I_1 και I_2 αυξάνουν τα φορτία Q_1 και Q_2 στους δυο πυκνωτές C_o, θα ισχύουν:

$$I_1=\frac{dQ_1}{dt} \quad \text{και} \quad I_2=\frac{dQ_2}{dt} \qquad \textbf{(3)}$$

Ενώ σύμφωνα με τον 1ο κανόνα του Kirchhoff στον κόμβο του κυκλώματος, η διαφορά των ρευμάτων $I_2 - I_1$ είναι ίση με τη μείωση του φορτίου Q. Δηλαδή:

$$I_2 - I_1 = -\frac{dQ}{dt} \qquad \textbf{(4)}$$

Άρα αντικαθιστώντας τις **(3)** και **(4)** στο σύστημα **(2)**, προκύπτουν:

$$\begin{aligned} L\frac{d^2I_1}{dt^2} + \frac{I_1}{C_o} + \frac{I_1 - I_2}{C} &= -\omega V_o \sin\omega t \\ L\frac{d^2I_2}{dt^2} + \frac{I_2}{C_o} - \frac{I_1 - I_2}{C} &= 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(5)}$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις **(5)**, προκύπτουν:

$$L\frac{d^2(I_1 + I_2)}{dt^2} + \frac{I_1 + I_2}{C_o} = -\omega V_o \sin\omega t \qquad \textbf{(6)}$$

$$L\frac{d^2(I_1 - I_2)}{dt^2} + \frac{I_1 - I_2}{C_o} + \frac{2(I_1 - I_2)}{C} = -\omega V_o \sin\omega t \qquad \textbf{(7)}$$

Θέτοντας ως κανονικές συντεταγμένες τις $I_\alpha = I_1 + I_2$ και $I_b = I_1 - I_2$ οι εξισώσεις **(6)** και **(7)**, δίνουν:

$$L\frac{d^2I_\alpha}{dt^2} + \frac{I_\alpha}{C_o} = -\omega V_o \sin\omega t \qquad \textbf{(8)}$$

$$L\frac{d^2I_b}{dt^2} + I_b\left(\frac{1}{C_o} + \frac{2}{C}\right) = -\omega V_o \sin\omega t \qquad \textbf{(9)}$$

Άρα οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος, είναι:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{LC_o} \quad \text{και} \quad \omega_2^2 = \frac{1}{LC_o} + \frac{2}{LC}$$

Αγνοώντας την απόσβεση, δηλαδή την ωμική αντίσταση των συρμάτων οι λύσεις της μόνιμης κατάστασης των εξισώσεων **(8)** και **(9)**, είναι:

$$I_\alpha(t) = A\cos\omega t \quad \text{και} \quad I_b(t) = B\cos\omega t$$

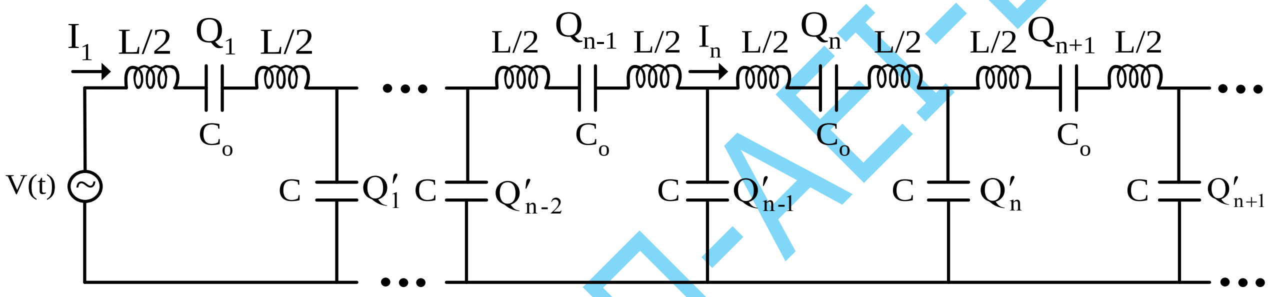
Σε αντιστοιχία με το μηχανικό φίλτρο ισχύει:

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{I_\alpha - I_b}{I_\alpha + I_b}=\frac{\omega_2^{\;2}-\omega_1^{\;2}}{\omega_2^{\;2}+\omega_1^{\;2}-2\omega^2}=\frac{\dfrac{1}{LC_o}+\dfrac{2}{LC}-\dfrac{1}{LC_o}}{\dfrac{1}{LC_o}+\dfrac{2}{LC}+\dfrac{1}{LC_o}-2\omega^2}=\frac{\dfrac{1}{LC}}{\dfrac{1}{LC_o}+\dfrac{1}{LC}-\omega^2}$$

ΘΕΜΑ 4

Πρόκειται να γίνει επίδειξη του φαινομένου της εκθετικής απόσβεσης του πλάτους των ηλεκτρικών ταλαντώσεων σε συζευγμένα κυκλώματα LC της μορφής που φαίνεται στο σχήμα, όπου αυτά διεγείρονται με τάση $V(t)=V_o\cos\omega t$ και η συχνότητα ω είναι μικρότερη από τη συχνότητα ω_o του χαμηλότερου τρόπου ταλάντωσης. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός τμημάτων που απαιτείται;
Εφαρμογή για L=1H, $C=C_o=0{,}01\mu F$, ω=5000rad/sec.

Λύση



Εφαρμόζοντας τον 2ο κανόνα του Kirchhoff στο βρόχο 1, προκύπτει:

$$\frac{L}{2}\frac{dI_1}{dt}+\frac{Q_1}{C_o}+\frac{L}{2}\frac{dI_1}{dt}-\frac{Q_1'}{C}=V(t)=V_o\cos\omega t$$

Ενώ στο βρόχο n, δίνει:

$$\frac{L}{2}\frac{dI_n}{dt}+\frac{Q_n}{C_o}+\frac{L}{2}\frac{dI_n}{dt}-\frac{Q_n'}{C}+\frac{Q_{n-1}'}{C}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{dI_n}{dt}+\frac{Q_n}{LC_o}-\frac{L}{LC}(Q_n'-Q_{n-1}')=0$$

Παραγωγίζοντας ως προς t την τελευταία, προκύπτει:

$$\frac{d^2I_n}{dt^2}+\frac{1}{LC_o}\frac{dQ_n}{dt}-\frac{1}{LC}\left(\frac{dQ_n'}{dt}-\frac{dQ_{n-1}'}{dt}\right)=0 \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά είναι: $\frac{dQ_n}{dt}=I_n$, $\frac{dQ_n'}{dt}=I_{n+1}-I_n$ και $\frac{dQ_{n-1}'}{dt}=I_n-I_{n-1}$

Επομένως αντικαθιστώντας τις παραπάνω στην **(1)**, προκύπτει:

$$\frac{d^2 I_n}{dt^2} + \frac{1}{LC_o} I_n - \frac{1}{LC}\left[(I_{n+1} - I_n) - (I_n - I_{n-1})\right] = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Αν ο αριθμός των βρόχων είναι μεγάλος και αν θεωρηθούν εκείνες οι διεγέρσεις στις οποίες η διαφορά φάσης μεταξύ δυο διαδοχικών βρόχων είναι πολύ μικρή, τότε το ρεύμα I_n θα διαφέρει πολύ λίγο από τα ρεύματα I_{n-1} και I_{n+1}.
Εκφράζοντας τη φάση του κύματος με το γινόμενο kα, ο κάθε βρόχος απέχει απόσταση α από το γειτονικό του και έτσι ο βρόχος n θα απέχει από την αρχή απόσταση z=nα, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι οι πραγματικές αποστάσεις των βρόχων είναι α.
Αφού λοιπόν θεωρούνται μικρές μεταβολές στη φάση, θεωρείται ότι το α είναι μικρό και επομένως χρησιμοποιώντας τη συνεχή μεταβλητή z μπορεί να γραφεί:

$$I_n(z,t) = I(z,t), \quad I_{n-1}(z,t) = I(z-\alpha,t) \ \text{ και } \ I_{n+1}(z,t) = I(z+\alpha,t)$$

Αναπτύσσοντας τις συναρτήσεις I(z-α,t) και I(z+α,t) σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο z, κρατώντας όρους μέχρι δεύτερης τάξεως ως προς α, προκύπτει:

$$I(z-\alpha,t) = I(z,t) - \alpha\frac{\partial I}{\partial z} + \frac{1}{2}\alpha^2\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} + \dots$$

$$I(z+\alpha,t) = I(z,t) + \alpha\frac{\partial I}{\partial z} + \frac{1}{2}\alpha^2\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} + \dots$$

Αντικαθιστώντας τελικά τις παραπάνω στην **(2)**, προκύπτει:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + \frac{1}{LC_o} I - \frac{\alpha^2}{LC}\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

Επειδή η γραμμή αυτή μεταφοράς θεωρείται ιδανική (χωρίς ωμικές αντιστάσεις) θα ταλαντώνεται με την ίδια συχνότητα ω της διεγείρουσας αρμονικής τάσης. Άρα ως λύση της εξίσωσης **(3)**, μπορεί να προταθεί η συνάρτηση:

$$I(z,t) = J(z)\cos\omega t \qquad \textbf{(4)}$$

όπου η J(z) περιγράφει το πλάτος του ρεύματος κατά μήκος της γραμμής μεταφοράς.
Σύμφωνα με την **(4)**, είναι:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = -\omega^2 J(z)\cos\omega t \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = \frac{d^2 J(z)}{dz^2}\cos\omega t$$

Επομένως αντικαθιστώντας τις παραπάνω στην **(3)**, προκύπτει η διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2J(z)}{dz^2}+\frac{LC}{\alpha^2}\left(\omega^2-\frac{1}{LC_o}\right)J(z)=0 \quad \text{ή} \quad \frac{d^2J(z)}{dz^2}+k^2J(z)=0 \qquad \textbf{(5)}$$

με

$$k^2=\frac{LC}{\alpha^2}\left(\omega^2-\frac{1}{LC_o}\right)=\frac{LC}{\alpha^2}(\omega^2-\omega_o^2) \qquad \textbf{(6)}$$

Παρατηρείται ότι ο συντελεστής k^2 της συνάρτησης J(z) μπορεί να πάρει είτε θετικές, είτε αρνητικές τιμές ανάλογα με τη συχνότητα ω η οποία διεγείρει τη γραμμή μεταφοράς.
Έτσι διακρίνονται οι περιπτώσεις:

α) Αν $\omega^2>\omega_o^2=1/LC_o$ τότε σύμφωνα με την **(6)**, είναι $k^2>0$ και η γενική λύση της εξίσωσης **(5)**, είναι:

$$J(z)=I_o\cos kz \qquad \textbf{(7)}$$

Η μορφή της λύσης **(7)** δείχνει ότι κατά μήκος της γραμμής μεταφοράς αναπτύσσεται ένα ημιτονικό κύμα με κυματάριθμο k (δηλαδή διατηρούμενες ταλαντώσεις στο σύστημα).
Άρα για $\omega>\omega_o$ η γραμμή μεταφοράς χαρακτηρίζεται ως **διασκορπιστικό μέσο** και είναι δυνατή η διάδοση κατά μήκος της οδεύοντων κυμάτων ρεύματος, τα οποία περιγράφονται από τη συνάρτηση:

$$I(z,t)=I_o\cos(\omega t-kz)$$

Τέλος η περιοχή των συχνοτήτων για τις οποίες παρατηρούνται οδεύοντα κύματα ονομάζεται **διασκορπιστική περιοχή συχνοτήτων**.

β) Αν $\omega^2<\omega_o^2=1/LC_o$ τότε είναι $k^2<0$. Το αντίθετό του ορίζει τη θετική ποσότητα:

$$q^2=\frac{LC}{\alpha^2}(\omega_o^2-\omega^2)>0 \qquad \textbf{(8)}$$

οπότε η εξίσωση **(5)** παίρνει τη μορφή:

$$\frac{d^2J(z)}{dz^2}-q^2J(z)=0$$

η γενική λύση της οποίας είναι:

$$J(z)=I_oe^{-qz}$$

όπου I_o το πλάτος του ρεύματος.

Άρα για $\omega<\omega_o$ η γραμμή μεταφοράς χαρακτηρίζεται ως **άεργο μέσο** και κατά μήκος της το ρεύμα μειώνεται εκθετικά και δεν υπάρχει οδεύον κύμα, αλλά εκθετικό κύμα, το οποίο περιγράφεται από τη συνάρτηση:

$$I(z,t)=I_o e^{-qz}\cos\omega t$$

Η περιοχή των συχνοτήτων για την οποία το μέσο παρουσιάζει άεργη συμπεριφορά, ονομάζεται **άεργη περιοχή συχνοτήτων**.

Σημείωση: Το q ορίζεται ως **σταθερά εξασθένησης πλάτους** και το αντίστροφό του μ=1/q ορίζεται ως **μήκος εξασθένησης** και είναι εκείνη η απόσταση στην οποία το αρχικό πλάτος γίνεται ίσο προς το 1/e της αρχικής του τιμής.

Συμπέρασμα: Στη συνεχή της προσέγγιση η γραμμή μεταφοράς του σχήματος συμπεριφέρεται σαν φίλτρο το οποίο επιτρέπει τη διέλευση οδευόντων κυμάτων των οποίων η συχνότητα είναι μεγαλύτερη από κάποια οριακή συχνότητα $\omega_o=1/LC_o$ την οποία ορίζει η τιμή του πυκνωτή χωρητικότητας C_o και του πηνίου αυτεπαγωγής L. Η συχνότητα ω_o ονομάζεται **συχνότητα αποκοπής χαμηλών συχνοτήτων**, επειδή η γραμμή δεν επιτρέπει τη διέλευση οδευόντων κυμάτων με συχνότητες μικρότερες από αυτήν.

Άρα για την επίδειξη του φαινομένου της εξασθένησης πρέπει να υπάρχουν αρκετοί βρόχοι ώστε σε απόσταση z=nα η ποσότητα $e^{-qz}=e^{-qn\alpha}<<1$.
Για πρακτικούς λόγους η ποσότητα 1/20 είναι αρκετά μικρή και γι' αυτό επιλέγεται το n έτσι ώστε:

$$e^{-qn\alpha}\overset{(8)}{=}e^{-\sqrt{(\omega_o^2-\omega^2)LC}\,n}\leq\frac{1}{20}=0{,}05$$

Αλλά: $\omega_o^2=\dfrac{1}{LC_o}=10^8\,\mathrm{rad/sec}$, $\omega=5\cdot10^3\,\mathrm{rad/sec}$ και $LC=10^{-8}$ οπότε η προηγούμενη δίνει:

$$e^{-0{,}87n}\leq 0{,}05\Rightarrow n\geq 3{,}46 \quad \text{ή} \quad n\geq 4 \quad \text{επειδή το n είναι ακέραιος}$$

Δηλαδή απαιτούνται 4 βρόχοι για την επίδειξη του φαινομένου της εξασθένησης. Ο αριθμός αυτός είναι αρκετά μικρός γιατί η διεγείρουσα συχνότητα ω είναι αρκετά μικρή. Συγκριτικά αναφέρεται ότι αν $\omega=9000\,\mathrm{rad/sec}$ θα ήταν $n\geq16$ και αν ω=9900rad/sec θα ήταν $n\geq150$ για να παρατηρηθεί η ίδια εξασθένηση.

ΘΕΜΑ 5

Σε ένα κύκλωμα L, C και R σε σειρά εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση $V = V_o \cos\omega t$.

α) Δείξτε ότι το πλάτος ταλάντωσης του φορτίου στον πυκνωτή γίνεται μέγιστο, όταν η συχνότητα της πηγής γίνει $\omega=(1/LC-R^2/2L^2)^{1/2}$.

β) Δείξτε ότι η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πηνίου L ή του πυκνωτή C στο συντονισμό ρεύματος είναι QV_o, όπου $Q = \omega_o L / R$ είναι ο συντελεστής ποιότητας του ηλεκτρικού αυτού κυκλώματος RLC.

Λύση

α) Σύμφωνα με τη σχέση **(4-21)** το πλάτος ταλάντωσης του φορτίου στον πυκνωτή ενός κυκλώματος RLC που διεγείρεται από μια εναλλασσόμενη τάση $V(t) = V_o \cos\omega t$ είναι:

$$Q_o = \frac{V_o}{\sqrt{\left(\omega^2 L - \frac{1}{C}\right)^2 + R^2\omega^2}} \qquad \textbf{(1)}$$

Επομένως το φορτίο αυτό γίνεται μέγιστο, όταν:

$$\frac{dQ_o}{d\omega} = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} V_o \frac{2(\omega^2 L - 1/C)2\omega L + 2\omega R^2}{2\sqrt{(\omega^2 L - 1/C)^2 + R^2\omega^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\omega^2 L - \frac{1}{C}\right)2L + R^2 = 0 \Rightarrow 2\omega^2 L^2 - \frac{2L}{C} + R^2 = 0 \Rightarrow$$

$$2\omega^2 L^2 = \frac{2L}{C} - R^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}}$$

β) Από τις σχέσεις **(4-22)** και **(4-23)** το ρεύμα είναι:

$$I(t) = \frac{V_o}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}} \cos(\omega t - \varphi) \qquad \textbf{(2)}$$

Επομένως η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πηνίου είναι:

$$V_L = -L\frac{dI}{dt} \overset{(2)}{\Rightarrow} V_L = \frac{LV_o\omega}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}\sin(\omega t - \varphi)$$

Στο συντονισμό ρεύματος όπου $\omega=1/\sqrt{LC}$ η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πηνίου γίνεται:

$$V_{L_o} = \frac{LV_o/\sqrt{LC}}{\sqrt{\left(\frac{L}{\sqrt{LC}} - \frac{\sqrt{LC}}{C}\right)^2 + R^2}} = \frac{LV_o}{R\sqrt{LC}} \Rightarrow V_{L_o} = \frac{V_o L}{R}\omega_o = QV_o,$$

όπου $Q = \omega_o L/R$ ο συντελεστής ποιότητας.

Επίσης η διαφορά δυναμικού στα άκρα πυκνωτή, είναι:

$$V_C = \frac{Q(t)}{C} \overset{(4-21)}{\Rightarrow} V_C = \frac{V_o}{C\sqrt{\left(\omega^2 L - \frac{1}{C}\right)^2 + R^2\omega^2}}\sin(\omega t - \varphi)$$

Ενώ στο συντονισμό ρεύματος όπου $\omega=1/\sqrt{LC}$ γίνεται:

$$V_{C_o} = \frac{V_o}{C\sqrt{\left(\frac{L}{LC} - \frac{1}{C}\right)^2 + R^2/LC}} = \frac{V_o}{CR/\sqrt{LC}} = \frac{V_o\sqrt{LC}}{CR} = \frac{V_o\sqrt{L}}{R\sqrt{C}} = \frac{V_o L}{R\sqrt{LC}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{C_o} = \frac{V_o L}{R}\omega_o = QV_o$$

όπου $Q=\omega_o L/R$ ο συντελεστής ποιότητας.

Άρα στο συντονισμό ρεύματος η διαφορά στα άκρα του πηνίου και του πυκνωτή είναι ίση με:

$$V_{L_o} = V_{C_o} = \frac{V_o L}{R}\omega_o$$