ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL
ΘΕΩΡΙΑ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

1. Ηλεκτρομαγνητική Θεωρία

Η θεωρία που περιγράφει και ερμηνεύει τα φαινόμενα της δημιουργίας και διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, δηλαδή των τοπικών και χρονικών μεταβολών του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου αποτελεί την **Ηλεκτρομαγνητική θεωρία.** Δημιουργός αυτής είναι ο Maxwell, που προέβλεψε θεωρητικά την ύπαρξη των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, το 1864, ενώ η πειραματική επαλήθευση των θεωριών του έγινε, το 1884, με τα πειράματα του Hertz.

Η ιστορική παρατήρηση του Maxwell ήταν πως αν επιχειρηθεί ο συνδυασμός, ανά δυο, των κλασσικών νόμων του Ηλεκτρομαγνητισμού, οι νόμοι αυτοί αποδεικνύονται ασυμβίβαστοι μεταξύ τους. Τη μόνη απόκλιση από τα πειραματικά αποτελέσματα παρουσίασε ο νόμος του Ampere. Και αυτό γιατί παρότι ο νόμος του Ampere προϋποθέτει την ύπαρξη μαγνητικού πεδίου μόνο σε περιοχές του χώρου, όπου οι κλειστές καμπύλες (αμπεριανοί βρόχοι) περικλείουν ρεύμα αγωγιμότητας I, ο Maxwell διαπίστωσε την ύπαρξη μαγνητικού πεδίου στο χώρο μεταξύ των οπλισμών ενός πυκνωτή, όπου δεν υπάρχει ρεύμα αγωγιμότητας. Έτσι απέδειξε ότι η πηγή δημιουργίας του μαγνητικού πεδίου στα σημεία αυτά είναι η χρονική μεταβολή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου κι αυτό το έκφρασε μέσω της υποθετικής ποσότητας του **ρεύματος ματατόπισης I_d**, που ορίζεται ως:

$$\boxed{I_d = \varepsilon_o \frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_o \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}} \qquad \textbf{(7-1)}$$

Εύκολα από την **(7-1)** προκύπτει ότι η **πυκνότητα του ρεύματος μετατόπισης $\vec{J}_d$** ορίζεται ως:

$$\boxed{\vec{J}_d = \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \qquad \textbf{(7-2)}$$

Επομένως η ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell διατυπώνεται υπό τη μορφή μιας ομάδας ολοκληρωτικών ή διαφορικών εξισώσεων, οι οποίες λέγονται **εξισώσεις Maxwell** και φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

Νόμος	**Ολοκληρωτική μορφή**	**Διαφορική μορφή**
1η: Νόμος Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο	$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc\ell}}{\varepsilon_o} = \frac{1}{\varepsilon_o}\int_V \rho dV$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$
2η: Νόμος Gauss για το μαγνητικό πεδίο	$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$
3η: Νόμος Faraday	$\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{dt}\cdot d\vec{S}$	$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
4η: Νόμος Ampere – Maxwell	$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_o(I+I_d) =$ $= \mu_o I + \mu_o\varepsilon_o\int_S \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$	$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_o(\vec{J}+\vec{J}_d) =$ $= \mu_o\vec{J} + \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

Πίνακας 7.1: Εξισώσεις Maxwell

Από τον **Πίνακα 7.1** παρατηρείται ότι:

- Η 1η εξίσωση Maxwell είναι ο νόμος του Gauss για τον ηλεκτρισμό και συσχετίζει το ηλεκτρικό φορτίο με το ηλεκτρικό πεδίο που προκαλείται από αυτό. Επίσης είναι ισοδύναμη με το νόμο του Coulomb.

- Η 2η εξίσωση Maxwell είναι ο νόμος του Gauss για τον μαγνητισμό, σύμφωνα με τον οποίο αποδεικνύεται η μη ύπαρξη απομονωμένων μαγνητικών μονοπόλων στη φύση και ότι οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές είναι κλειστές καμπύλες.

- Η 3η εξίσωση Maxwell είναι ο νόμος του Faraday, σύμφωνα με τον οποίο χρονική μεταβολή του μαγνητικού πεδίου παράγει ηλεκτρικό πεδίο.

- Η 4η εξίσωση Maxwell είναι ο νόμος του Ampere για το μαγνητισμό με την προσθήκη από τον Maxwell του ρεύματος μετατόπισης με σκοπό την, κατ' αντιστοιχία προς την 3η εξίσωση Maxwell, απόδειξη της παραγωγής μαγνητικού πεδίου από χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο.

Γενικά οι εξισώσεις Maxwell δίνουν μια πλήρη περιγραφή του τρόπου με τον οποίο σχετίζονται τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ με τις πηγές τους και μεταξύ τους.
Οι εξισώσεις Maxwell ισχύουν και στο κενό, όπου δεν υπάρχουν φορτία (ρ=0) ούτε ρεύματα $(\vec{J}=0)$, έχουν απλούστερη μορφή και παρουσιάζουν κάποια συμμετρία. Αυτές φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

Εξίσωση	**Ολοκληρωτική μορφή**	**Διαφορική μορφή**
1η εξίσωση Maxwell	$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=0$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$
2η εξίσωση Maxwell	$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$
3η εξίσωση Maxwell	$\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{\ell}=-\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$	$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
4η εξίσωση Maxwell	$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\mu_o\varepsilon_o\int_S \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$	$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_o\varepsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

Πίνακας 7.2: Εξισώσεις Maxwell στο κενό

Οι εξισώσεις Maxwell εντός της ύλης, δηλαδή στη γενική περίπτωση κατά την οποία λαμβάνονται υπόψη τόσο οι διηλεκτρικές όσο και οι μαγνητικές ιδιότητες του μέσου, λαμβάνουν την τροποποιημένη μορφή που φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα :

Εξίσωση	**Ολοκληρωτική μορφή**	**Διαφορική μορφή**
1η εξίσωση Maxwell	$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=q_f$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_f$
2η εξίσωση Maxwell	$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$
3η εξίσωση Maxwell	$\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{\ell}=-\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$	$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
4η εξίσωση Maxwell	$\oint_c \vec{H}\cdot d\vec{\ell}=I_f+\int_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$	$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

Πίνακας 7.3: Εξισώσεις Maxwell εντός της ύλης

Το πιο αξιοσημείωτο γνώρισμα των εξισώσεων Maxwell, όπως αναπτύχθηκαν προηγουμένως, είναι ότι η χρονική μεταβολή καθενός από τα δυο πεδία επάγει πεδίο του άλλου τύπου στις γειτονικές περιοχές του χώρου. Συνεπώς οι εξισώσεις Maxwell προβλέπουν την ύπαρξη ηλεκτρομαγνητικών διαταραχών που απαρτίζονται από χρονικά μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία που διαδίδονται από ένα σημείο του χώρου σε άλλο, ακόμη και αν δεν υπάρχει ύλη στον ενδιάμεσο χώρο, δηλαδή στο κενό. Αυτές οι διαταραχές ονομάζονται **ηλεκτρομαγνητικά κύματα** και παρέχουν τη φυσική βάση για το φως και τα κύματα όλου του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος.

2. Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

Για να γίνει κατανοητή η ιστορική σημασία των εξισώσεων Maxwell, θα θεωρηθεί η απλή περίπτωση ενός μοναδικού κινούμενου φορτίου σ' ένα χώρο απόλυτου κενού. Σε σημεία, τότε, του κενού χώρου που βρίσκονται σε μεγάλη απόσταση από το κινούμενο φορτίο, όπου $\rho = 0$ και $\vec{J} = 0$, ο συνδυασμός των εξισώσεων Maxwell δίνει τις εξισώσεις :

$$\nabla^2\vec{E} = \mu_o\varepsilon_o \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{και} \quad \nabla^2\vec{B} = \mu_o\varepsilon_o \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \qquad \mathbf{(7-3)}$$

Οι σχέσεις **(7 – 3)** αποτελούν τις **κυματικές εξισώσεις**, οι οποίες ικανοποιούνται από τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ στην περίπτωση του κενού.
Συνεπώς στην περίπτωση του κινούμενου φορτίου στο κενό, η προσπάθεια για την ικανοποίηση των εξισώσεων του Maxwell οδηγεί σε ένα συγκλονιστικό φαινόμενο : τα πεδία που δημιουργούνται από το κινούμενο φορτίο, δεν περιορίζονται στο στενό περιβάλλον του, αλλά αφήνοντας την πηγή της δημιουργίας τους εξαπλώνονται σε κάθε σημείο του χώρου, όπου παρατηρείται μια τοπική και χρονική μεταβολή του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου. Δηλαδή δημιουργείται ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα και η ταχύτητα διάδοσής του ισούται με την ταχύτητα του φωτός, επειδή ισχύει $c^2 = 1/\varepsilon_o\mu_o$.
Η λύση των κυματικών εξισώσεων **(7 – 3)** που θα επιτρέψει τον υπολογισμό του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου την κάθε χρονική στιγμή, σε κάθε σημείο του χώρου, είναι γενικά πολύπλοκο πρόβλημα. Ωστόσο η λύση τους διευκολύνεται αν αναζητηθούν λύσεις επίπεδων αρμονικών κυμάτων. Ένα κύμα λέγεται **επίπεδο**, αν οι στιγμιαίες τιμές του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου είναι ίσες σε όλα τα σημεία, σε κάθε επίπεδο που είναι παράλληλο σ' ένα ορισμένο επίπεδο. Τα επίπεδα αυτά λέγονται **μέτωπα του κύματος**. Σε κάθε επίπεδο κύμα , η τιμή των $\vec{E}$ και $\vec{B}$ εξαρτάται μόνο από την τιμή μιας μόνο των καρτεσιανών συντεταγμένων, που συμπίπτει με τη φορά διάδοσης του κύματος, έστω της z. Έτσι οι λύσεις των κυματικών εξισώσεων για ένα επίπεδο αρμονικό κύμα μπορεί να έχουν τη μορφή :

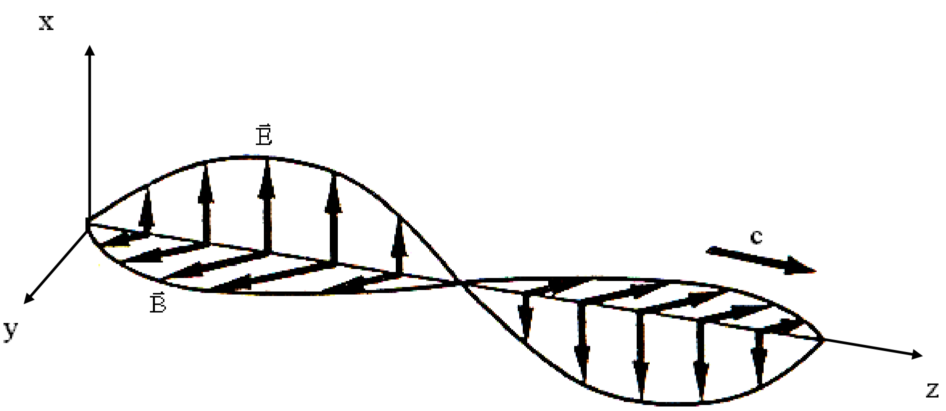
$$\vec{E} = E_o\cos(\omega t - kz)\hat{x} \quad \text{και} \quad \vec{B} = B_o\cos(\omega t - kz)\hat{y} \qquad \mathbf{(7-4)}$$

όπου ω η κυκλική συχνότητα και k ο κυματάριθμος.

Η κυκλική συχνότητα ω και ο κυματάριθμος k συνδέονται μεταξύ τους μέσω της γραμμικής **σχέσης διασποράς** :

$$\boxed{\omega = ck} \qquad \mathbf{(7-5)}$$

Ακολούθως παρατίθεται η σχηματική αναπαράσταση ενός επίπεδου αρμονικού ηλεκτρομαγνητικού κύματος.



Σχήμα 7.1

Συνοπτικά τα χαρακτηριστικά όλων των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι :

α) Κάθε ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι εγκάρσιο, δηλαδή τα διανύσματα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ είναι κάθετα στην κατεύθυνση διάδοσης του κύματος και επίσης κάθετα μεταξύ τους. Η κατεύθυνση διάδοσης είναι η κατεύθυνση του εξωτερικού γινομένου $\vec{E}\times\vec{B}$.

β) Ο λόγος των μέτρων των διανυσμάτων $\vec{E}$ και $\vec{B}$ είναι καθορισμένος και ίσος με :

$$\boxed{E = cB} \qquad \textbf{(7 – 6)}$$

γ) Κάθε ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται στο κενό με μια ορισμένη και σταθερή ταχύτητα, την ταχύτητα του φωτός $c = 3\cdot 10^8\,m/sec$.

δ) Σε αντίθεση με τα μηχανικά κύματα, τα οποία χρειάζονται τα ταλαντωνόμενα σωματίδια ενός υλικού (όπως νερό ή αέρας) για να διαδοθούν, τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα δεν απαιτούν κανένα μέσο διάδοσης. Αυτό που ταλαντώνεται σε ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο.

❒ **Σημείωση :** Για να αποτελούν ηλεκτρομαγνητικό κύμα δυο δοθείσες συναρτήσεις των $\vec{E}$ και $\vec{B}$ θα πρέπει να ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες **(α)**, **(β)**, **(γ)** καθώς και τις κυματικές εξισώσεις **(7 – 3)**.

3. Ενέργεια Ηλεκτρομαγνητικού Κύματος – Διάνυσμα Poynting

Χαρακτηριστικό μέγεθος ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος, όπως και κάθε κύματος, είναι η ενέργεια που μεταφέρει στη μονάδα του χρόνου, ανά μονάδα επιφάνειας κάθετης στη διεύθυνση διάδοσης, δηλαδή η ένταση του κύματος.

Προφανώς η ροή της ενέργειας που μεταφέρει ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα θα έχει τη διεύθυνση της διάδοσής του. Για την περιγραφή του μέτρου και της κατεύθυνσης του ρυθμού της ροής της ενέργειας ορίζεται μια διανυσματική ποσότητα, η οποία καλείται **διάνυσμα Poynting $\vec{S}$** και σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου δίνεται από την ακόλουθη έκφραση :

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_o}\vec{E}\times\vec{B}} \qquad \textbf{(7 – 7)}$$

Επειδή το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο είναι συναρτήσεις του χώρου και του χρόνου, προκύπτει ότι και το διάνυσμα Poynting είναι επίσης συνάρτηση του χώρου και του χρόνου. Το διάνυσμα Poynting έχει διαστάσεις ισχύος ανά μονάδα επιφάνειας και μονάδα μέτρησής του στο S.I. είναι το 1 Watt / m^2.

Λόγω της σχέσης $E_o = cB_o$ προκύπτει ότι το μέτρο του διανύσματος Poynting είναι :

$$\boxed{S = \frac{E_oB_o}{\mu_o} = \frac{E_o^2}{c\mu_o} = \varepsilon_o c E_o^2} \qquad \textbf{(7 – 8)}$$

Η μέση τιμή του μέτρου του διανύσματος Poynting σε ένα σημείο ονομάζεται **ένταση** του κύματος σε εκείνο το σημείο και είναι :

$$\boxed{I = \overline{S} = \frac{1}{2}\frac{E_oB_o}{\mu_o}} \qquad \textbf{(7 – 9)}$$