

**ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ  
ΠΟΛΥΒΑΘΜΙΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ**

*Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας*

**EMC<sup>2</sup>**

## 1. Ασυνεχή – συνεχή συστήματα

Οι μέθοδοι αναζήτησης των κανονικών τρόπων ταλάντωσης που περιγράφηκαν στα απλά συστήματα δεν είναι εύκολο να εφαρμοστούν σε περιπτώσεις συστημάτων με πολύ μεγάλο αριθμό βαθμών ελευθερίας, γιατί τότε το μαθηματικό πρόβλημα γίνεται ογκώδες, αφού αντιστοιχεί μια διαφορική εξίσωση σε κάθε ένα βαθμό ελευθερίας. Έτσι είναι απαραίτητη η ανάπτυξη άλλων μεθόδων για την αναζήτηση των κανονικών τρόπων ταλάντωσης πολυβάθμιων συστημάτων.

Γενικά τα συστήματα με μεγάλο αριθμό βαθμών ελευθερίας ταξινομούνται σε δυο κατηγορίες :

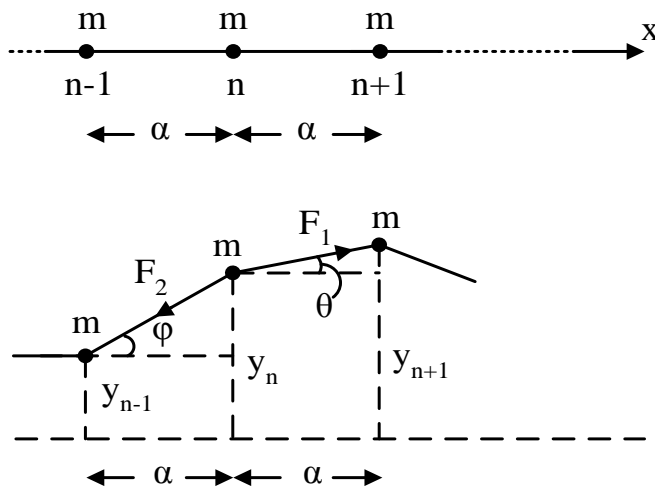
**α)** Εκείνα στα οποία ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας, αν και μεγάλος θεωρείται πεπερασμένος, δηλαδή τα κινητά μέρη του συστήματος είναι διακριτά και επομένως το μέσο στο οποίο γίνεται η μελέτη των ταλαντώσεων θεωρείται **ασυνεχές**.

**β)** Εκείνα στα οποία ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας είναι τόσο μεγάλος, ώστε να θεωρείται πρακτικά άπειρος, δηλαδή η δομή του μέσου είναι τόσο πυκνή ώστε να χαρακτηρίζεται **συνεχές**.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα ασυνεχών συστημάτων αποτελούν συστήματα ταλαντώσεων που προκύπτουν με την πολλαπλή επανάληψη ενός βασικού ταλαντωτή (περιοδική δομή), π.χ. μια σειρά μαζών συζευγμένων με ελατήρια, μια χορδή που φέρει ένα μεγάλο αριθμό σφαιριδίων, ένα μεγάλο πλήθος συζευγμένων εκκρεμών ή μια περιοδική επανάληψη ενός βασικού κυκλώματος LC.

Αντίστοιχα χαρακτηριστικά παραδείγματα συνεχών συστημάτων αποτελούν εκείνα στα οποία τα κινητά μέρη τους δεν μπορούν να διακριθούν μεταξύ τους, όπως π.χ. μια χορδή κατά μήκος της οποίας κατανέμεται συνεχώς η μάζα της ή μια ομοαξονική γραμμή μεταφοράς σημάτων η οποία χαρακτηρίζεται από μια κατανεμημένη αυτεπαγωγή και χωρητικότητα.

## 2. Εγκάρσιες ταλαντώσεις χορδής με N σφαιρίδια



Σχήμα 2.1

Έστω η χορδή του Σχήματος 2.1 αμελητέας μάζας που τείνεται με τάση  $T$  στη διεύθυνση  $x$  και φέρει  $N$  όμοια σφαιρίδια μάζας  $m$  σε ίσες μεταξύ τους αποστάσεις  $a$ , τα οποία μπορούν να μετατοπίζονται μόνο κάθετα στη διεύθυνση της χορδής και όλα πάνω στο ίδιο επίπεδο. Στο Σχήμα 2.1 φαίνεται μια τυχαία τριάδα γειτονικών σφαιριδίων με σκοπό να μελετηθεί η κίνηση του μεσαίου.

Θεωρώντας μια τυχαία φάση του συστήματος όπου η μάζα  $n$  έχει μετατοπιστεί κατά  $y_n$ , η μάζα  $n+1$  κατά  $y_{n+1}$  και η μάζα  $n-1$  κατά  $y_{n-1}$  τότε αμελώντας τα βάρη η μάζα  $n$  δέχεται τη δύναμη  $F_1$  από το δεξιό τμήμα της χορδής και τη δύναμη  $F_2$  από το αριστερό τμήμα της χορδής. Έτσι οι δυνάμεις κατά τη διεύθυνση  $x$  της χορδής λόγω ισορροπίας είναι :

$$F_1 \cos \theta = T \Rightarrow F_1 = \frac{T}{\cos \theta} \quad \text{και} \quad F_2 \cos \varphi = T \Rightarrow F_2 = \frac{T}{\cos \varphi} \quad (2 - 1)$$

όπου  $T$  η δύναμη με την οποία είναι τεντωμένη η χορδή (τάση χορδής).

Ενώ η εξίσωση κίνησης κατά την κάθετη διεύθυνση  $y$  στη χορδή σύμφωνα με το 2<sup>ο</sup> νόμο του Newton είναι :

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a}_n \Rightarrow F_1 \sin \theta - F_2 \sin \varphi = m \frac{d^2 y_n}{dt^2}$$

και αντικαθιστώντας τις  $F_1, F_2$  από τις σχέσεις (2 - 1) προκύπτει:

$$T \tan \theta - T \tan \varphi = m \frac{d^2 y_n}{dt^2}$$

Αλλά από το σχήμα εύκολα προκύπτει ότι :

$$\tan\theta = \frac{y_{n+1} - y_n}{\alpha} \quad \text{και} \quad \tan\varphi = \frac{y_n - y_{n-1}}{\alpha}$$

Άρα τελικά η εξίσωση κίνησης για τη n-οστή μάζα παίρνει τη μορφή :

$$\begin{aligned} T \frac{y_{n+1} - y_n}{\alpha} - T \frac{y_n - y_{n-1}}{\alpha} &= m \frac{d^2 y_n}{dt^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^2 y_n}{dt^2} &= \frac{T}{m\alpha} (y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) \quad (2 - 2) \end{aligned}$$

Η διαφορική εξίσωση (2 - 2) στην πραγματικότητα αντιπροσωπεύει ένα σύστημα N διαφορικών εξισώσεων 2<sup>ης</sup> τάξης για τις N άγνωστες συναρτήσεις  $y_n$ ,  $n=1,2,3,\dots,N$ . Για την επίλυση της (2 - 2) θεωρείται ότι στο σύστημα έχει διεγερθεί αποκλειστικά μόνο ένας τρόπος ταλάντωσης, οπότε όλα τα κινητά μέρη του συστήματος πρέπει να εκτελούν αρμονική ταλάντωση με την ίδια συχνότητα (του διεγερμένου τρόπου) και την ίδια φάση. Επίσης αν θεωρηθεί ότι το πλάτος της θέσης της n-οστής μάζας είναι  $A_n$ , τότε η χρονική μεταβολή της απόκλισης της n-οστής μάζας από τη θέση ισορροπίας (γενική λύση της (2 - 2)) θα είναι :

$$y_n(t) = A_n \cos(\omega t + \varphi) \quad (2 - 3)$$

Ομοίως είναι,  $y_{n+1}(t) = A_{n+1} \cos(\omega t + \varphi)$  και  $y_{n-1}(t) = A_{n-1} \cos(\omega t + \varphi)$  οπότε χρησιμοποιώντας αυτές τις τιμές του  $y$  στην εξίσωση κίνησης (2 - 2) προκύπτει :

$$\begin{aligned} -\omega^2 A_n &= \frac{T}{m\alpha} (A_{n+1} - 2A_n + A_{n-1}) \Rightarrow \\ \Rightarrow A_{n+1} - \left(2 - \frac{m\alpha\omega^2}{T}\right) A_n + A_{n-1} &= 0 \quad (2 - 4) \end{aligned}$$

Η σχέση (2 - 4) είναι η θεμελιώδης εξίσωση και παρέχει τα σχήματα των τρόπων ταλάντωσης, δηλαδή τη σχέση των πλατών των ταλαντωτών του συστήματος. Η γενική λύση της (2 - 4) είναι :

$$A_n = B \sin n\theta + C \cos n\theta \quad (2 - 5)$$

όπου  $B, C$  είναι αυθαίρετες σταθερές και το  $\theta$  είναι κάποια σταθερή γωνία για μια δεδομένη τιμή της  $\omega$ , που πρέπει να προσδιοριστεί.

Σύμφωνα με την (2-5) τα πλάτη  $A_{n+1}$  και  $A_{n-1}$  είναι :

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= B \sin(n+1)\theta + C \cos(n+1)\theta = \\ &= B(\sin n \theta \cos \theta + \cos n \theta \sin \theta) + C(\cos n \theta \cos \theta - \sin n \theta \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{n-1} &= B \sin(n-1)\theta + C \cos(n-1)\theta = \\ &= B(\sin n \theta \cos \theta - \cos n \theta \sin \theta) + C(\cos n \theta \cos \theta + \sin n \theta \sin \theta) \end{aligned}$$

Επομένως αθροίζοντας τις παραπάνω προκύπτει :

$$A_{n+1} + A_{n-1} = 2(B \sin n \theta + C \cos n \theta) \cos \theta = 2A_n \cos \theta$$

και αντικαθιστώντας το άθροισμα αυτό στη σχέση (2-4) προκύπτει :

$$2A_n \left( \cos \theta - 1 + \frac{m a \omega^2}{2T} \right) = 0 \quad (2-6)$$

Δηλαδή παρατηρείται ότι από τη σχέση αυτή μπορεί να εκφραστεί η συχνότητα του τρόπου ταλάντωσης που έχει διεγερθεί συναρτήσει του  $\theta$  (αφού  $A_n \neq 0$ ) ως :

$$\omega^2 = \frac{2T}{m a} (1 - \cos \theta) = \frac{4T}{m a} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (2-7)$$

Η τιμή του  $\theta_s$  (σταθερή για δεδομένη  $\omega_s$ ) προσδιορίζεται εύκολα από τις οριακές συνθήκες του προβλήματος. Έτσι επειδή τα άκρα της χορδής είναι συνδεδεμένα σε ακλόνητα τοιχώματα θα πρέπει να είναι ακίνητα.

Αλλά στις θέσεις αυτές δεν υπάρχουν σφαιρίδια και έτσι θα χρησιμοποιηθεί η σχέση (2-5) που δίνει το πλάτος της  $n$ -οστής μάζας για  $n=0$  και  $n=N+1$  αφού το πλήθος των σφαιριδίων είναι  $N$ .

Δηλαδή είναι  $A_0 = A_{N+1} = 0$  οπότε η (2-5) δίνει:

$$A_0 = B \sin 0 + C \cos 0 = 0 \Rightarrow C = 0$$

Συνεπώς στο συγκεκριμένο πρόβλημα που τα άκρα της χορδής είναι ακίνητα η σχέση (2 – 5) για το πλάτος της κίνησης των μαζών παίρνει τη μορφή:

$$A_n = B \sin n\theta \quad (2 - 8)$$

και για  $n=N+1$  αυτή δίνει :

$$A_{N+1} = B \sin(N + 1)\theta = 0 \Rightarrow \sin(N + 1)\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (N + 1)\theta = s\pi \Rightarrow \theta_s = \frac{s\pi}{N + 1}, \quad s = 1, 2, \dots, N \quad (2 - 9)$$

Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή του  $\theta$  στις σχέσεις (2 – 8) και (2 – 7) προκύπτει το πλάτος ταλάντωσης  $A_n$  της  $n$ -οστής μάζας στη συγκεκριμένη συχνότητα κανονικού τρόπου ταλάντωσης  $\omega_s$  :

$$A_n = B_s \sin \frac{ns\pi}{N + 1}, \quad s = 1, 2, \dots, N \quad (2 - 10)$$

ενώ οι επιτρεπόμενες συχνότητες  $\omega_s$  των κανονικών τρόπων ταλάντωσης είναι :

$$\omega_s^2 = \frac{4T}{ma} \sin^2 \frac{s\pi}{2(N + 1)}, \quad s = 1, 2, \dots, N \quad (2 - 11)$$

Δηλαδή επαληθεύεται εδώ η γενική αρχή σύμφωνα με την οποία το πλήθος των κανονικών τρόπων ταλάντωσης ενός συστήματος είναι ίσο με τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας του, αφού  $N$  είναι οι επιτρεπόμενες συχνότητες όσοι και οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος.

Παρατηρείται ότι για  $s=0$  η (2 – 10) δίνει μηδενικά πλάτη για όλες τις μάζες ενώ η (2 – 11) δίνει μηδενική συχνότητα, οπότε δεν υφίσταται ταλάντωση. Επίσης για  $s=N+1$  η (2 – 10) δίνει πάλι μηδενικά πλάτη, αλλά η (2 – 11) παίρνει την μέγιστη τιμή  $\omega_{\max}^2 = 4T/ma$ , η οποία λέγεται **συχνότητα αποκοπής** και χαρακτηρίζει όλα τα περιοδικά ταλαντωνόμενα συστήματα. Τέλος για  $s>N+1$  η (2 – 11) δίνει συχνότητες οι οποίες έχουν ήδη προκύψει για  $s \leq N$ , οπότε δεν αντιστοιχούν σε νέους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης.

Άρα τελικά η (2 – 3) λόγω της (2 – 10) δίνει τη μετατόπιση κάθε σφαιριδίου όταν έχει διεγερθεί ο  $s$ -στός κανονικός τρόπος ταλάντωσης  $\omega_s$  :

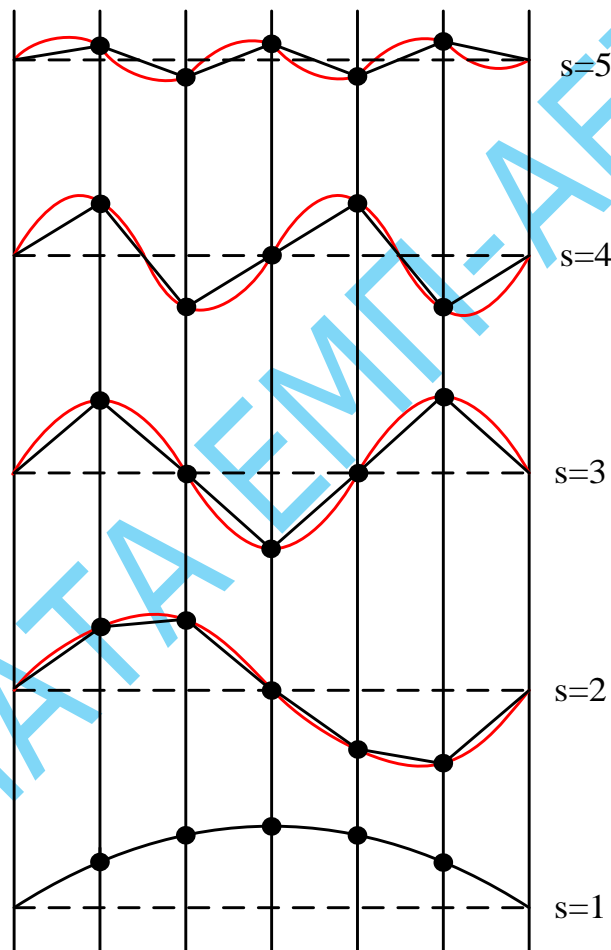
$$y_n(t) = B_s \sin \frac{ns\pi}{N + 1} \cos(\omega_s t + \phi_s) \quad s, n = 1, 2, \dots, N \quad (2 - 12)$$

Η γενική κίνηση των σφαιριδίων όταν έχουν διεγερθεί όλοι οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης του συστήματος θα δίνεται από την επαλληλία των σχέσεων (2 – 12) που αντιστοιχούν στις  $N$  τιμές που μπορεί να πάρει το  $s$ .

Δηλαδή :

$$y_n(t) = \sum_{s=1}^N B_s \sin \frac{ns\pi}{N+1} \cos(\omega_s t + \varphi_s)$$

Στο ακόλουθο σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα σχήματα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης μιας χορδής με  $N=5$  σφαιρίδια, όπως προκύπτουν από τη σχέση (2 – 10) για  $s=1,2,\dots,5$ .



Σχήμα 2.2

Παρατηρείται ότι τα σχήματα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης έχουν κυματοειδή μορφή όσον αφορά τις θέσεις των σφαιριδίων. Τα τμήματα της χορδής που συνδέουν τα σφαιρίδια διατηρούν το ευθύγραμμο σχήμα τους επειδή η μάζα τους είναι αμελητέα. Επομένως κατά την ταλάντωση εκτεταμένων συστημάτων οι επιμέρους ταλαντωτές

κινούνται με τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματίζονται **στάσιμα κύματα**, όπως είναι η εναλλακτική ονομασία που αποδίδεται στα σχήματα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης ενός εκτεταμένου συστήματος. Με τον όρο στάσιμο χαρακτηρίζεται το αμετάθετο του σχήματος του κανονικού τρόπου ταλάντωσης στο χώρο.

Σε όλα τα στάσιμα κύματα που απεικονίζονται στο **Σχήμα 2.2** υπάρχουν σημεία όπου το πλάτος είναι μέγιστο και ονομάζονται **κοιλίες** και σημεία (εκτός από το χαμηλότερο τρόπο ταλάντωσης  $s=1$ ) όπου το πλάτος μηδενίζεται και ονομάζονται **δεσμοί**.

Διαχρονικά η κίνηση σε κάποιον κανονικό τρόπο ταλάντωσης  $s$  γίνεται σύμφωνα με τη σχέση (2 – 12), που δείχνει ότι ενώ το σχήμα του τρόπου παραμένει αναλλοίωτο, το πλάτος της κίνησης μεταβάλλεται συναρτήσει του  $\cos(\omega_s t + \varphi_s)$ .

### Παρατήρηση :

Ορίζοντας το **μήκος κύματος**  $\lambda$  ως το μήκος στο οποίο η φάση του κύματος μεταβάλλεται κατά  $2\pi$  παρατηρείται ότι στο συνολικό μήκος της χορδής που είναι  $L=(N+1)\alpha$  η φάση του κανονικού τρόπου ταλάντωσης  $s$  μεταβάλλεται κατά  $s\pi$  και επομένως ισχύει :

$$\frac{\lambda_s}{2\pi} = \frac{L}{s\pi} \Rightarrow \lambda_s = \frac{2L}{s} = \frac{2(N+1)\alpha}{s}, \quad s = 1, 2, \dots, N \quad (2 - 13)$$

Δηλαδή τα μήκη των στάσιμων κυμάτων του συστήματος της χορδής με τα  $N$  σφαιρίδια είναι υποπολλαπλάσια του διπλασίου του μήκους της χορδής.

Επίσης ορίζεται ο **κυματάριθμος**  $k$  ως το πλήθος των μηκών κύματος που αντιστοιχεί σε  $2\pi$  μονάδες μήκους ή διαφορετικά η μεταβολή της φάσης ανά μονάδα μήκους, δηλαδή :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2 - 14)$$

Συνεπώς σύμφωνα με τις σχέσεις (2 – 13) και (2 – 14) οι κυματάριθμοι των στάσιμων κυμάτων που αντιστοιχούν στον κανονικό τρόπο ταλάντωσης  $s$  του συστήματος είναι :

$$k_s = \frac{s\pi}{L} = \frac{s\pi}{(N+1)\alpha}, \quad s=1, 2, \dots, N \quad (2 - 15)$$

Από τις σχέσεις (2 – 13) και (2 – 15) παρατηρείται ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός του κανονικού τρόπου ταλάντωσης, τόσο μικρότερο είναι το μήκος κύματος και τόσο μεγαλύτερος ο κυματάριθμος του αντίστοιχου στάσιμου κύματος.

Από τη σχέση (2 – 15) προκύπτει ότι :



$$\frac{s\pi}{N+1} = k_s \alpha \quad (2-16)$$

Άρα συνδυάζοντας τις σχέσεις (2-3), (2-5), (2-9) και (2-16) προκύπτει η γενική εξίσωση για τις μετατοπίσεις των σφαιριδίων της χορδής ως :

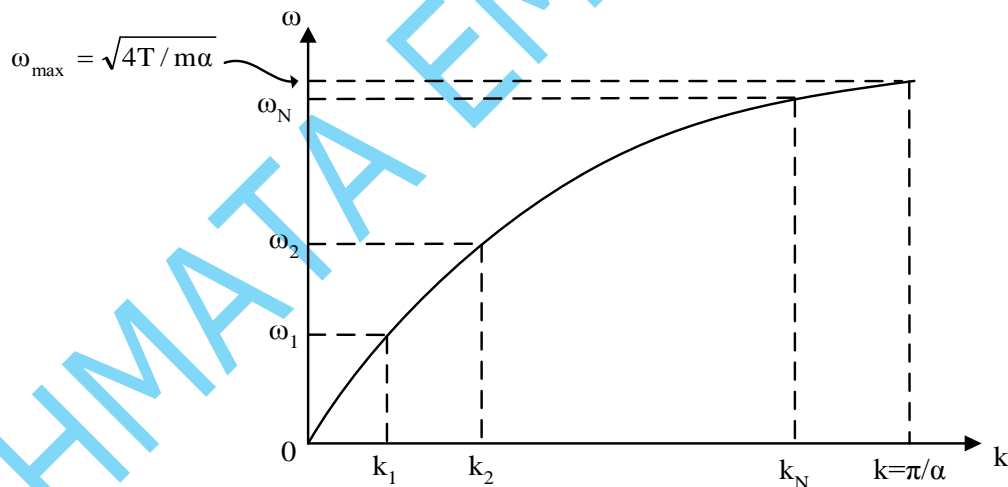
$$y_n(t) = (B \sin k_s n \alpha + C \cos k_s n \alpha) \cos(\omega_s t + \varphi_s) \quad (2-17)$$

Ενώ η (2-11) λόγω της (2-16) παρέχει τις συχνότητες  $\omega_s$  των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος συναρτήσει των αντίστοιχων κυματάρθμων  $k_s$  ως :

$$\omega_s^2 = \frac{4T}{m\alpha} \sin^2 \frac{k_s \alpha}{2} \Rightarrow \omega_s = \sqrt{\frac{4T}{m\alpha}} \sin \frac{k_s \alpha}{2}, \quad s = 1, 2, \dots, N \quad (2-18)$$

Η σχέση (2-18) και γενικά σχέσεις της μορφής  $\omega = \omega(k)$  ονομάζονται **σχέσεις διασποράς** και αποτελούν ενδογενές χαρακτηριστικό του συστήματος στο οποίο αναφέρονται, αφού από αυτές μπορούν να εκτιμηθούν οι ιδιότητες του μέσου στο οποίο αναπτύσσονται τα κύματα.

Η γραφική παράσταση της σχέσης (2-18) δίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

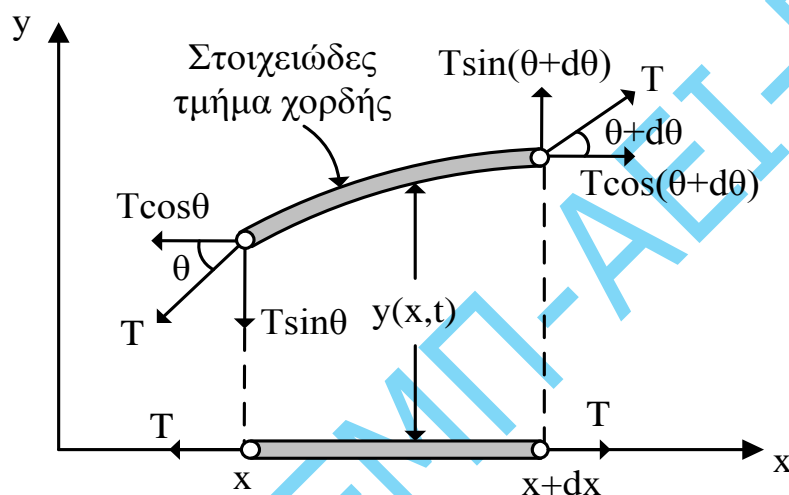


Σχήμα 2.3

Παρατηρείται από τη σχέση (2-18) ότι η οριακή τιμή της συχνότητας  $\omega_{\max}$  αντιστοιχεί σε  $\sin(k\alpha/2) = 1 \Rightarrow k\alpha/2 = \pi/2 \Rightarrow k = \pi/\alpha$  την οριακή τιμή του κυματάρθμου. Άρα η τιμή  $\omega_{\max}$  δεν αντιστοιχεί σε συχνότητα κανονικού τρόπου ταλάντωσης, αλλά είναι μόνο το όριο στο οποίο τείνουν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης όταν το πλήθος των βαθμών ελευθερίας είναι μεγάλο.

### 3. Εγκάρσιες ταλαντώσεις ομογενούς ελαστικής χορδής

Σε μια συνεχή χορδή, που παρουσιάζει συνεχή κατανομή μάζας, κάθε μώριο του υλικού από το οποίο είναι κατασκευασμένη είναι και ένας στοιχειώδης ταλαντωτής. Το πλήθος των μορίων αυτών είναι τόσο μεγάλο αν και πεπερασμένο, που μπορεί να θεωρηθεί άπειρο, άρα άπειρο θα είναι και το πλήθος των βαθμών ελευθερίας και το πλήθος των τρόπων ταλάντωσης ενός συνεχούς συστήματος.



Σχήμα 2.4

Έστω ένα στοιχειώδες τμήμα μήκους  $dx$  και μάζας  $dm$  μιας ομογενούς ελαστικής χορδής που έχει σταθερή γραμμική πυκνότητας μάζας  $\rho = dm/dx$ . Αρχικά η χορδή βρισκόταν πάνω στον άξονα  $x$  και τείνεται με μια σταθερή τάση  $T$  σε όλο το μήκος της, παρόλο που αυτή είναι ελάχιστα εκτατή.

Σε μια τυχαία χρονική στιγμή  $t$  το στοιχειώδες αυτό τμήμα απέχει απόσταση  $y(x,t)$  από τη θέση ισορροπίας, όπου θεωρείται ότι οι μετατοπίσεις  $y(x,t)$  από τη θέση ισορροπίας είναι δυνατές μόνο πάνω στο επίπεδο  $xy$  και ότι είναι πολύ μικρές έτσι ώστε οι γωνίες που σχηματίζονται από τη διαταραγμένη χορδή και τη διεύθυνση ισορροπίας της  $x$  να είναι μικρές.

Η δύναμη που ασκείται πάνω στο στοιχειώδες αυτό τμήμα είναι  $T$  και σχηματίζει γωνία  $\theta$  με τον άξονα  $x$  στο ένα άκρο του και  $T$  με γωνία  $\theta+d\theta$  στο άλλο άκρο. Επομένως η δύναμη που ασκείται στο στοιχειώδες αυτό τμήμα στη διεύθυνση  $x$  είναι  $T\cos(\theta+d\theta) - T\cos\theta$ , ενώ στη διεύθυνση  $y$  είναι  $T\sin(\theta+d\theta) - T\sin\theta$ .

Επειδή όμως οι γωνίες θεωρήθηκαν μικρές θα ισχύουν οι προσεγγίσεις  $\cos\theta \cong 1$ ,  $\cos(\theta+d\theta) \cong 1$  και  $\sin\theta \cong \theta$ ,  $\sin(\theta+d\theta) \cong \theta+d\theta$ , οπότε η δύναμη στη διεύθυνση  $x$  θα είναι μηδέν (δηλαδή δεν υπάρχει μετατόπιση προς τη διεύθυνση  $x$ ), ενώ η δύναμη στη διεύθυνση  $y$  θα είναι :

$$T(\theta + d\theta) - T\theta = Td\theta \quad (2 - 19)$$

Στη χρονική στιγμή  $t$  η κλίση του στοιχειώδους τμήματος της χορδής είναι ίση με  $\tan\theta \cong \theta$  και επίσης είναι ίση με την μερική παράγωγο της συνάρτησης  $y(x,t)$  ως προς  $x$ . Δηλαδή :

$$\tan\theta \cong \theta = \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Rightarrow d\theta = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} dx \quad (2 - 20)$$

Έτσι από τις σχέσεις (2 - 19) και (2 - 20) προκύπτει ότι η  $y$  συνιστώσα της δύναμης είναι :

$$Td\theta = T \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} dx$$

και σύμφωνα με το 2<sup>ο</sup> νόμο του Newton πρέπει αυτή να ισούται με τη μάζα  $dm = \rho dx$  επί την επιτάχυνση  $\partial^2 y(x, t) / \partial t^2$ . Άρα :

$$T \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} dx = dm \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{T} \frac{dm}{dx} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}} \quad (2 - 21)$$

Η σχέση (2 - 21) είναι η μορφή της εξίσωσης κίνησης της συνεχούς χορδής και ονομάζεται **κυματική εξίσωση**. Η εξίσωση αυτή είναι μια διαφορική εξίσωση 2<sup>ης</sup> τάξης με μερικές παραγώγους και δεν περιγράφει απλά και μόνο τις ταλαντώσεις μιας συνεχούς χορδής, αλλά περιγράφει γενικά τη διάδοση κυμάτων στη χορδή αυτή. Επίσης παρατηρείται ότι η ποσότητα της τάσης προς τη γραμμική πυκνότητα  $T/\rho$  έχει διαστάσεις τετραγώνου ταχύτητας και επομένως  $\sqrt{T/\rho} = v$  είναι η ταχύτητα μετάδοσης της κίνησης κατά μήκος της χορδής.

Οι συναρτήσεις  $y(x,t)$  που είναι λύσεις της κυματικής εξίσωσης (2 - 21) ονομάζονται **κυματοσυναρτήσεις**.

Υποθέτοντας ότι ένας μοναδικός τρόπος ταλάντωσης έχει διεγερθεί τότε όλα τα σημεία της χορδής ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα και φάση, οπότε η κυματοσυνάρτηση  $y(x,t)$  έχει τη μορφή :

$$y(x, t) = A(x)\cos(\omega t + \varphi) \quad (2 - 22)$$

όπου το πλάτος  $A(x)$  είναι το σχήμα του τρόπου που αντιστοιχεί στη συχνότητα  $\omega$ . Αντικαθιστώντας την (2 - 22) στην κυματική εξίσωση (2 - 21) προκύπτει :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A(x)}{dx^2} \cos(\omega t + \varphi) &= -\omega^2 \frac{\rho}{T} A(x) \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^2 A(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2 \rho}{T} A(x) &= 0 \end{aligned} \quad (2-23)$$

Η ομογενής διαφορική εξίσωση (2-23) περιγράφει τα σχήματα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης της χορδής και η γενική της λύση, δηλαδή το σχήμα του τρόπου που αντιστοιχεί στη συχνότητα  $\omega$  είναι :

$$A(x) = B \sin kx + C \cos kx \quad (2-24)$$

όπου  $B$  και  $C$  αυθαίρετες σταθερές και  $k=2\pi/\lambda$  είναι ο κυματάριθμος και σύμφωνα με τη (2-23) ισχύει :

$$k^2 = \frac{\omega^2 \rho}{T} \quad (2-25)$$

Η σχέση (2-25) αποτελεί τη σχέση διασποράς της συνεχούς χορδής.

Άρα η κυματοσυνάρτηση  $y(x,t)$  για τη μετατόπιση της χορδής σε ένα συγκεκριμένο τρόπο λόγω των (2-22) και (2-24) είναι :

$$y(x, t) = (B \sin kx + C \cos kx) \cos(\omega t + \varphi) \quad (2-26)$$

Για τον προσδιορισμό των κυματάριθμων χρησιμοποιούνται οι οριακές συνθήκες Dirichlet στα άκρα της χορδής ( $x=0$  και  $x=L$ ) που είναι ακίνητα. Δηλαδή η συνάρτηση  $A(x)$  θα είναι μηδενική στα άκρα της χορδής, οπότε η (2-24) δίνει :

$$\text{Για } x=0 : \quad A(0) = B \sin 0 + C \cos 0 \Rightarrow 0 = B \cdot 0 + C \cdot 1 \Rightarrow C = 0$$

$$\text{Άρα το πλάτος } A(x) \text{ γράφεται ως :} \quad A(x) = B \sin kx \quad (2-27)$$

Έτσι για  $x=L$  η (2-27) δίνει :

$$A(L) = B \sin kL \Rightarrow B \sin kL = 0 \Rightarrow \sin kL = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow kL = s\pi \Rightarrow k_s = \frac{s\pi}{L}, \quad s=1,2,3,\dots \quad (2-28)$$

Η σχέση (2 – 28) παρέχει τους κυματάρηθους που αντιστοιχούν σε κάθε τρόπο ταλάντωσης  $s$  και παρατηρείται ότι βρίσκονται σε πλήρη αναλογία με τους κυματάρηθους που δίνει η σχέση (2 – 15) για τη χορδή με  $N$  σφαιρίδια. Η μόνη διαφορά εντοπίζεται στο ότι στη χορδή με σφαιρίδια το πλήθος των τρόπων ταλάντωσης είναι πεπερασμένο και ίσο με τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας, ενώ στη συνεχή χορδή το πλήθος των τρόπων ταλάντωσης είναι άπειρο. Επομένως στη συνεχή χορδή τα σχήματα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης (δηλαδή τα στάσιμα κύματα όπως λέγονται) είναι άπειρα και δίνονται σύμφωνα με την (2 – 27) από τη σχέση :

$$A(x) = B_s \sin k_s x, \quad s=1,2,\dots \quad (2-29)$$

Τα μήκη των στάσιμων κυμάτων που αντιστοιχούν στους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης της χορδής με τη βοήθεια της (2 – 28) δίνονται από τη σχέση :

$$\lambda_s = \frac{2\pi}{k_s} \Rightarrow \lambda_s = \frac{2\pi}{s\pi/L} \Rightarrow \lambda_s = \frac{2L}{s}, \quad s=1,2,\dots \quad (2-30)$$

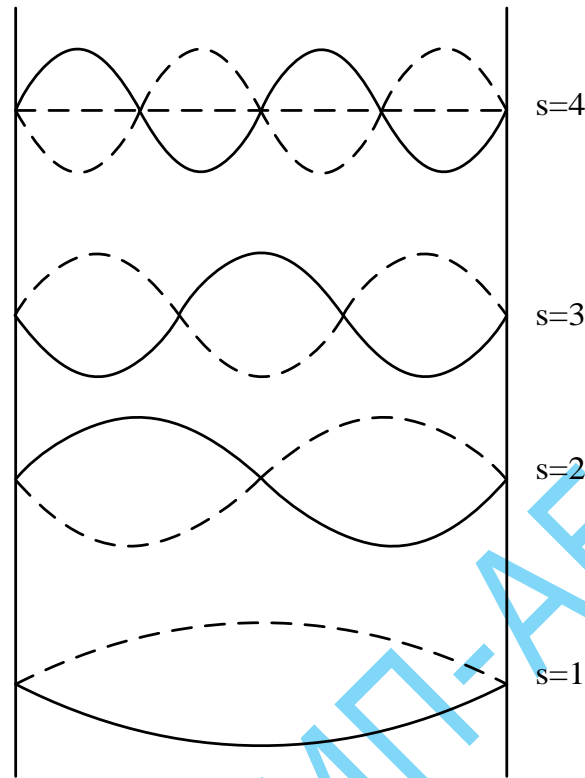
Δηλαδή τα μήκη των στάσιμων κυμάτων είναι ακέραια υποπολλαπλάσια του διπλάσιου μήκους της χορδής.

Επίσης οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης σύμφωνα με τις σχέσεις (2 – 25) και (2 – 28) είναι :

$$k^2 = \frac{\omega^2 \rho}{T} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{T}{\rho}} k \Rightarrow \omega_s = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \frac{s\pi}{L}, \quad s=1,2,\dots \quad (2-31)$$

Παρατηρείται ότι οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης είναι ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας  $\omega_1 = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \frac{\pi}{L}$  που αντιστοιχεί στο χαμηλότερο τρόπο ταλάντωσης  $s=1$  και ονομάζεται **θεμελιώδης συχνότητα**, ενώ όλες οι υπόλοιπες **αρμονικές** της.

Το ακόλουθο σχήμα παριστάνει τα σχήματα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης ή τα στάσιμα κύματα των τεσσάρων πρώτων αρμονικών ( $s=1,2,3,4$ ) που επιτρέπονται μεταξύ των δυο σταθερών άκρων μιας συνεχούς χορδής.



Σχήμα 2.5

Παρατηρείται ότι και στα στάσιμα κύματα της συνεχούς χορδής υπάρχουν σημεία μέγιστης απομάκρυνσης που λέγονται **κοιλίες** και σημεία με μηδενική απομάκρυνση που λέγονται **δεσμοί**.

Η χρονική συμπεριφορά της κίνησης της χορδής όταν έχει διεγερθεί ο  $s$ -οστός κανονικός τρόπος ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση :

$$y(x, t) = B_s \sin k_s x \cos(\omega_s t + \varphi_s) , \quad s = 1, 2, \dots \quad (2 - 32)$$

Ενώ στη γενική περίπτωση η τυχαία κίνηση της ομογενούς ελαστικής χορδής όταν έχουν διεγερθεί όλοι οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης προκύπτει με επαλληλία όλων των κανονικών τρόπων ταλάντωσης και περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση :

$$y(x, t) = \sum_{s=1}^{\infty} B_s \sin k_s x \cos(\omega_s t + \varphi_s) \quad (2 - 33)$$

όπου οι σταθερές  $B_s$  και  $\varphi_s$  προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή την αρχική θέση και την αρχική ταχύτητα της χορδής.

📖 Παρατήρηση :

Συγκρίνοντας τη διέγερση και τη δημιουργία στάσιμων κυμάτων της χορδής με σφαιρίδια και της συνεχούς χορδής εξάγονται τα ακόλουθα συμπεράσματα :

α) Στη χορδή με σφαιρίδια το πλήθος των κανονικών τρόπων ταλάντωσης είναι ίσο με τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας, ενώ στη συνεχή χορδή είναι άπειρο.

β) Τα σχήματα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης (στάσιμα κύματα) είναι ακριβώς τα ίδια, όπως αποδίδονται στα **Σχήματα 2.2** και **2.5**, εφόσον δε ληφθούν υπόψη τα σφαιρίδια και τα ευθύγραμμα τμήματα της χορδής με σφαιρίδια. Βέβαια στη συνεχή χορδή τα σχήματα αυτά θεωρητικά είναι άπειρα, αλλά στην πράξη μόνο η παρατήρηση των χαμηλών τρόπων ταλάντωσης είναι δυνατή, αφού έχουν θεωρηθεί μόνο μικρές μετατοπίσεις της χορδής από τη θέση ισορροπίας.

γ) Οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης στην περίπτωση της συνεχούς χορδής έχουν αρμονική σχέση μεταξύ τους (δηλαδή σχέση απλών πολλαπλασίων της θεμελιώδους συχνότητας  $\omega_1$ ), σε αντίθεση με την περίπτωση της χορδής με σφαιρίδια όπου οι συχνότητες δεν έχουν μεταξύ τους αρμονική σχέση, όπως φαίνεται από τις σχέσεις **(2 – 31)** και **(2 – 11)**.

#### 4. Μετάβαση από ασυνεχές σε συνεχές σύστημα

Η εξαγωγή της κυματικής εξίσωσης (2 – 21) μπορεί να προκύψει και από την εξίσωση (2 – 2) για τη χορδή με  $N$  σφαιρίδια αν υποθεθεί ότι ο αριθμός  $N$  των σφαιριδίων τείνει στο άπειρο. Τότε αν το μήκος της χορδής θεωρηθεί πεπερασμένο και ίσο με  $L$ , η απόσταση  $a$  μεταξύ δυο διαδοχικών σφαιριδίων θα τείνει στο μηδέν. Δηλαδή οι μάζες των σφαιριδίων συγχωνεύονται σε μια συνεχή χορδή η οποία έχει τώρα μάζα.

Επομένως η εγκάρσια μετατόπιση του  $n$ -οστού σφαιριδίου από τη θέση ισορροπίας μπορεί να γράφει ως :

$$y_n(t) = y(na, t) = y(x, t) \quad (2 - 34)$$

αφού η θέση του στη διεύθυνση  $x$  είναι ίση με  $x=na$ . Αντίστοιχα οι μετατοπίσεις των δυο γειτονικών σφαιριδίων  $n-1$  και  $n+1$  θα είναι :

$$\begin{aligned} y_{n-1}(t) &= y(na - a, t) = y(x - a, t) \\ y_{n+1}(t) &= y(na + a, t) = y(x + a, t) \end{aligned} \quad (2 - 35)$$

Αναπτύσσοντας τις συναρτήσεις  $y(x-a, t)$  και  $y(x+a, t)$  σε σειρές Taylor γύρω από το σημείο  $x$  για σταθερό  $t$  και κρατώντας όρους μέχρι δεύτερης τάξης ως προς  $a$  αφού αυτό τείνει στο μηδέν, προκύπτουν :

$$\begin{aligned} y(x - a, t) &= y(x, t) - \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} a^2 \\ y(x + a, t) &= y(x, t) + \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} a^2 \end{aligned}$$

Αθροίζοντας τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη και αναδιατάσσοντας τους όρους προκύπτει :

$$y(x + a, t) - 2y(x, t) + y(x - a, t) = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} a^2 \quad (2 - 36)$$

Αλλά από τις σχέσεις (2 – 34) και (2 – 35) είναι :

$$\frac{d^2 y_n}{dt^2} = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{και} \quad (2 - 37)$$



$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = y(x + \alpha, t) - 2y(x, t) + y(x - \alpha, t) \stackrel{(2-36)}{=} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \alpha^2$$

Άρα η εξίσωση (2-2) λόγω των σχέσεων (2-37) γίνεται :

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{T}{m\alpha} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \alpha^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{m}{T\alpha} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad (2-38)$$

Αλλά επειδή κατά μήκος της χορδής συναντάται ένα σφαιρίδιο μάζας  $m$  για κάθε μήκος  $\alpha$ , ο λόγος  $m/\alpha$  είναι η μάζα ανά μονάδα μήκους και επομένως η γραμμική πυκνότητα μάζας  $\rho$ . Οπότε τελικά η (2-38) δίνει :

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad (2-39)$$

Δηλαδή στο όριο που το  $N \rightarrow \infty$  κι επομένως  $\alpha \rightarrow 0$ , η εξίσωση κίνησης της χορδής με σφαιρίδια δίνει την κυματική εξίσωση.

### 📖 Παρατήρηση :

Η σχέση διασποράς της χορδής με  $N$  σφαιρίδια (2-18)  $\omega_s = \sqrt{\frac{4T}{m\alpha}} \sin \frac{k_s \alpha}{2}$  στο όριο που το  $\alpha \rightarrow 0$  και τουλάχιστον για τους πιο χαμηλούς τρόπους ταλάντωσης στους οποίους αντιστοιχούν μικροί κυματάρημοι το γινόμενο  $k_s \alpha$  είναι πολύ μικρό τείνοντας στο μηδέν και ισχύει η προσέγγιση  $\sin k_s \alpha / 2 \cong k_s \alpha / 2$  οπότε η σχέση διασποράς γίνεται :

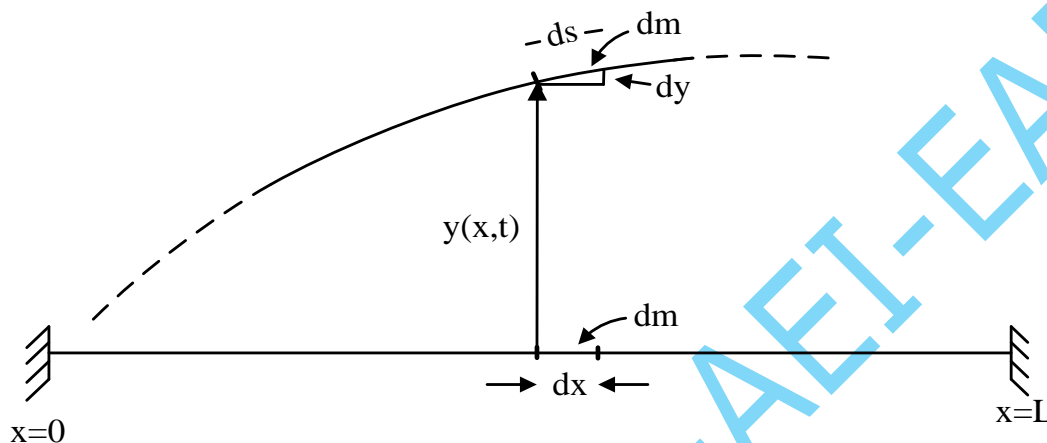
$$\omega_s \cong \sqrt{\frac{4T}{m\alpha}} \frac{k_s \alpha}{2} = \sqrt{\frac{T\alpha}{m}} k_s$$

Αλλά  $m/\alpha = \rho$  είναι η γραμμική πυκνότητα μάζας και επομένως όταν το  $\alpha \rightarrow 0$  η σχέση διασποράς της χορδής με σφαιρίδια δίνει τη σχέση διασποράς της συνεχούς χορδής (2-25):

$$\omega_s = \sqrt{\frac{T}{\rho}} k_s$$

## 5. Ενέργεια ταλαντώνμενης χορδής

Θεωρείται μια ομογενής χορδή μήκους  $L$  και γραμμικής πυκνότητας  $\rho=dm/dx$  που έχει τα άκρα της σταθερά και ταλαντώνεται σε κανονικό τρόπο ταλάντωσης.



Σχήμα 2.6

Η κινητική ενέργεια ενός στοιχειώδους τμήματος  $dm$  της χορδής, το οποίο στη θέση ισορροπίας βρίσκεται στη θέση  $x$  και έχει μήκος  $dx$  ενώ σε μια τυχαία θέση έχει μετατόπιση  $y(x,t)$  και εγκάρσια ταχύτητα  $v_y = \partial y / \partial t$ , είναι :

$$dK = \frac{1}{2} dm v_y^2 = \frac{1}{2} dm \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \Rightarrow dK = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx$$

Άρα η ολική κινητική ενέργεια της χορδής είναι το ολοκλήρωμα της προηγούμενης κατά μήκος της χορδής. Δηλαδή :

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2 - 40)$$

Η δυναμική ενέργεια της χορδής οφείλεται στην παραμόρφωση του σχήματος της χορδής. Έτσι το στοιχειώδες τμήμα μάζας  $dm$ , που αρχικά έχει μήκος  $dx$ , μετά την παραμόρφωση έχει μήκος  $ds$ :

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \Rightarrow ds = dx \sqrt{1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2}$$

Αλλά για μικρές μετατοπίσεις  $y(x,t)$ , η κλίση της χορδής  $\partial y / \partial x$  είναι επίσης μικρή, οπότε σύμφωνα με την προσέγγιση  $(1 + \varepsilon)^v \cong 1 + v\varepsilon$  για  $\varepsilon \ll 1$  είναι :

$$ds = dx \left[ 1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} \cong dx \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]$$

Συνεπώς η μεταβολή του μήκους του στοιχειώδους τμήματος  $dm$  είναι :

$$ds - dx = dx \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] - dx \Rightarrow ds - dx = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

Η δυναμική ενέργεια του στοιχειώδους τμήματος είναι το έργο που παράγει η τάση  $T$  με την οποία έχει τεντωθεί η χορδή και προκαλεί τη μεταβολή αυτή του μήκους. Δηλαδή :

$$dV = T(ds - dx) \Rightarrow dV = \frac{T}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

Άρα η ολική δυναμική ενέργεια της χορδής προκύπτει με ολοκλήρωση της τελευταίας κατά μήκος της χορδής. Δηλαδή :

$$V = \frac{T}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2 - 41)$$

Στην περίπτωση που η χορδή ταλαντώνεται με κάποιο κανονικό τρόπο ταλάντωσης θα είναι :

$$y_n(x,t) = (B_n \sin k_n x + C_n \cos k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi) \quad (2 - 42)$$

Επειδή όμως το αριστερό άκρο της χορδής είναι σταθερό η (2 - 42) δίνει :

$$y(x=0,t) = 0 \Rightarrow C_n \cos(\omega_n t + \varphi) = 0 \Rightarrow C_n = 0$$

Οπότε η (2 - 42) παίρνει τη μορφή :

$$y_n(x,t) = B_n \sin k_n x \cos(\omega_n t + \varphi) \quad (2 - 43)$$

Επίσης είναι :  $\frac{\partial y_n(x,t)}{\partial t} = -B_n \omega_n \sin k_n x \sin(\omega_n t + \varphi) \quad (2 - 44)$

$$\text{και } \frac{\partial y_n(x, t)}{\partial x} = B_n k_n \cos k_n x \cos(\omega_n t + \varphi) \quad (2-45)$$

Όπου από την οριακή συνθήκη του δεξιού άκρου που είναι ακλόνητο η (2-43) δίνει :

$$\begin{aligned} y(x=L, t) = 0 &\Rightarrow B_n \sin k_n L \cos(\omega_n t + \varphi) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sin k_n L = 0 \Rightarrow k_n L = n\pi \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n=1,2,\dots \end{aligned} \quad (2-46)$$

και σύμφωνα με τη σχέση διασποράς (2-31) οι δυνατές τιμές της συχνότητας  $\omega$  είναι :

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad n=1,2,\dots \quad (2-47)$$

Άρα η κινητική ενέργεια της χορδής στο  $n$ -οστό τρόπο ταλάντωσης σύμφωνα με τις σχέσεις (2-40) και (2-44) είναι :

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \left( \frac{\partial y_n}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \rho B_n^2 \omega_n^2 \sin^2(\omega_n t + \varphi) \int_0^L \sin^2 k_n x dx$$

$$\begin{aligned} \text{Όμως : } \int_0^L \sin^2 k_n x dx &= \frac{1}{2} \int_0^L (1 - \cos 2k_n x) dx = \frac{1}{2} \left[ x - \frac{1}{2k_n} \sin 2k_n x \right]_0^L = \\ &= \frac{L}{2} - \frac{1}{4k_n} \sin 2k_n L \stackrel{(2-46)}{=} \frac{L}{2} - \frac{1}{4k_n} \sin 2n\pi = \frac{L}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε : } K = \frac{1}{2} \rho B_n^2 \omega_n^2 \sin^2(\omega_n t + \varphi) \frac{L}{2} \stackrel{(2-47)}{=} \frac{\rho B_n^2 n^2 \pi^2 T}{2L^2 \rho} \sin^2(\omega_n t + \varphi) \frac{L}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \frac{B_n^2 n^2 \pi^2}{4L} T \sin^2(\omega_n t + \varphi) \quad (2-48)$$

Επίσης η δυναμική ενέργεια της χορδής στο n-οστό τρόπο ταλάντωσης σύμφωνα με τις σχέσεις (2 – 41) και (2 – 45) είναι :

$$V = \frac{T}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial y_n}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{T}{2} B_n^2 k_n^2 \cos^2(\omega_n t + \varphi) \int_0^L \cos^2 k_n x dx$$

Όμως :

$$\int_0^L \cos^2 k_n x dx = \frac{1}{2} \int_0^L (1 + \cos 2k_n x) dx = \frac{1}{2} \left[ x + \frac{1}{2k_n} \sin 2k_n x \right]_0^L = \dots = \frac{L}{2}$$

$$\text{Οπότε : } V = \frac{T}{2} B_n^2 k_n^2 \cos^2(\omega_n t + \varphi) \frac{L}{2} = \frac{T}{2} \frac{B_n^2 n^2 \pi^2}{L^2} \cos^2(\omega_n t + \varphi) \frac{L}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{B_n^2 n^2 \pi^2}{4L} T \cos^2(\omega_n t + \varphi) \quad (2 - 49)$$

Άρα η ολική ενέργεια στο n-οστό τρόπο ταλάντωσης της χορδής σύμφωνα με τις σχέσεις (2 – 48) και (2 – 49) είναι :

$$E = K + V = \frac{n^2 \pi^2 B_n^2 T}{4L} = \frac{T}{4} k_n^2 B_n^2, \quad n=1,2,\dots \quad (2 - 50)$$