☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ
ΘΕΩΡΙΑ & ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Περιεχόμενα

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

1. Μοντέλο υλικού σώματος

Είναι ένα σύνολο δομικών στοιχείων, που αλληλεπιδρούν σύμφωνα με κάποιους νόμους και κινούνται με αντίστοιχο τρόπο.

Τα μοντέλα υλικού σώματος και του απόλυτα άκαμπτου σώματος δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μελέτη των εσωτερικών ιδιοτήτων των υλικών σωμάτων, όταν είναι ουσιαστική η δομή τους και η κίνηση των διαφόρων τμημάτων του σώματος το ένα σε σχέση με το άλλο.

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

EMC²

2. Ορισμοί – μάζα – γραμμομόριο

Η μάζα των ατόμων και των μορίων

Στην μοριακή φυσική οι μάζες των ατόμων και των μορίων δεν είναι απόλυτες τιμές (π.χ. Kgr) αλλά σχετικές και αδιάστατες ποσότητες. Δηλαδή στην μοριακή φυσική στην πραγματικότητα συγκρίνουμε τις μάζες των μορίων ή των ατόμων με μια μοναδιαία ατομική μάζα.

Ορίσαμε σαν **μοναδιαία ατομική μάζα (mu)** το 1/12 της μάζας του ισοτόπου ^{12}C

$$m_{\upsilon} = \frac{m_{^{12}C}}{12} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{Kgr}$$

μάζα του ισοτόπου ^{12}C άνθρακα

Σχετική ατομική μάζα ή σχετική μάζα του ατόμου $A_r = \dfrac{m_{\alpha\tau\acute{o}\mu o\upsilon}}{m_{\upsilon}}$

Σχετική μοριακή μάζα ή σχετική μάζα του μορίου : $M_r = \dfrac{m_{\mu o\rho\acute{\iota}o\upsilon}}{m_{\upsilon}}$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Ποσότητα υλικού

Στο SI η ποσότητα του υλικού χαρακτηρίζεται από τον αριθμό των δομικών στοιχείων του υλικού.

Το ένα **γραμμομόριο (mole)** είναι **ίσο** με την ποσότητα του υλικού του εξεταζόμενου συστήματος, το οποίο περιέχει τόσα δομικά στοιχεία, όσα άτομα περιέχονται σε 0,012 Kgr του ισοτόπου ^{12}C άνθρακα.

Ορίσαμε N_A σταθερά του Avogadro τα δομικά αυτά στοιχεία που περιέχονται σε 12 gr του ^{12}C.

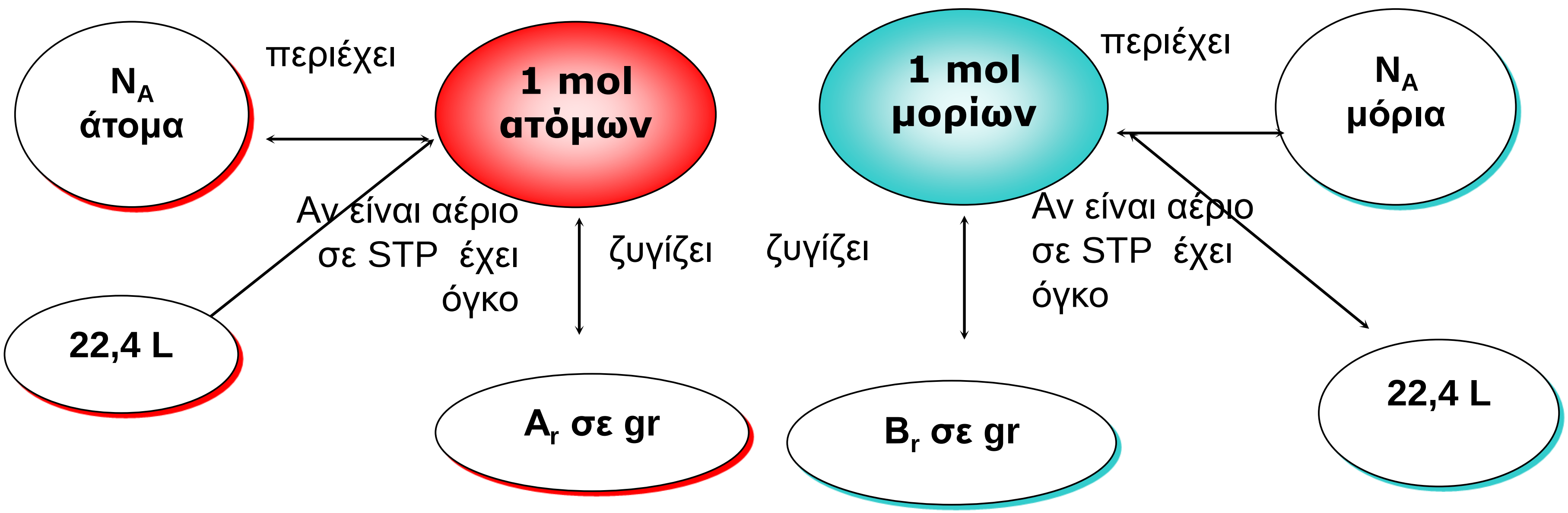
$$N_A = \frac{0,012\mathrm{Kgr}}{m_{^{12}C}} \cdot \mathrm{mole}^{-1} = \frac{0,012\mathrm{Kgr}}{12 \cdot m_{\upsilon}} \cdot \mathrm{mole}^{-1} = \frac{10^{-3}\mathrm{Kgr}}{m_{\upsilon}} \cdot \mathrm{mole}^{-1} = 6,02 \cdot 10^{23}\mathrm{mole}^{-1}$$

Γραμμομοριακή μάζα

είναι η μάζα ενός mole υλικού δηλαδή $M = m_{\mu o\rho} N_A = M_r$ gr/mole

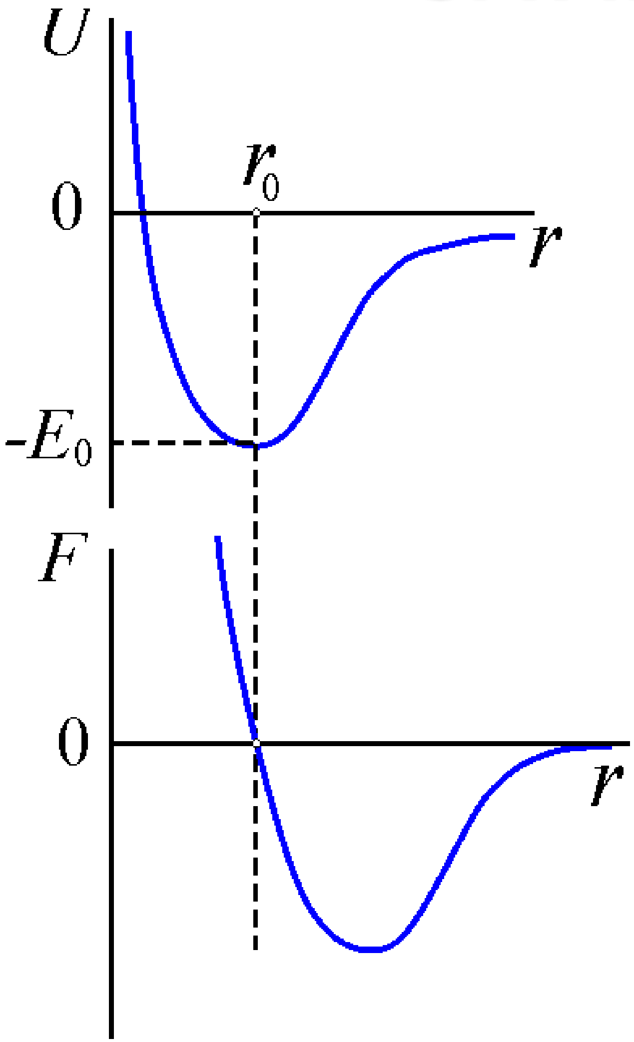
☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Αριθμός γραμμομορίων (mole) ν $\nu = \frac{n}{N_A} = \frac{m_{\upsilon\lambda\iota\kappa o\acute{\upsilon}}}{M}$



☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

3. Η κατάσταση ενός υλικού



Ανάμεσα σε δύο άτομα ή μόρια ασκούνται δυνάμεις

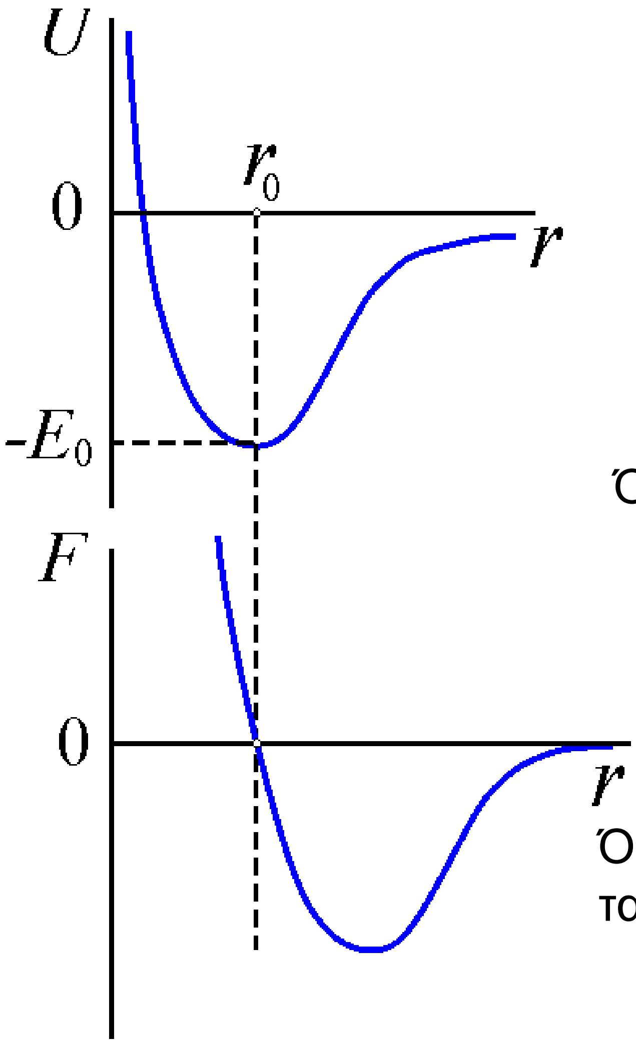
- Έλξης αν έχουν συγκριτικά μεγάλες αποστάσεις
- Άπωσης αν έχουν συγκριτικά μικρές αποστάσεις

Ένα μοντέλο δυναμικού αλληλεπίδρασης μεταξύ των μορίων είναι το δυναμικό Lennard - Jones 6 - 12, που προσεγγίζεται από τον τύπο:

$$U(r) = \frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^{6}}$$ με α,b σταθερές

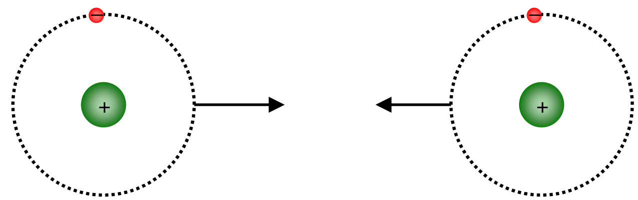
Όπου r η μεταξύ απόσταση των σωματιδίων

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

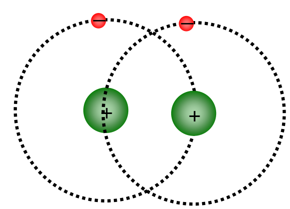


Όταν r >> r_o μηδενική δύναμη

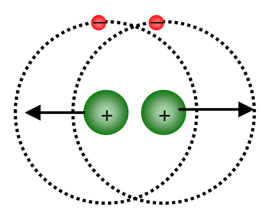
Όταν r > r_o έχουμε έλξη



Όταν r = r_o δεν υπάρχει αλληλεπίδραση F → 0.



Όταν r < r_o έχουμε άπωση (όταν είναι σχετικά κοντά τα σωματίδια).

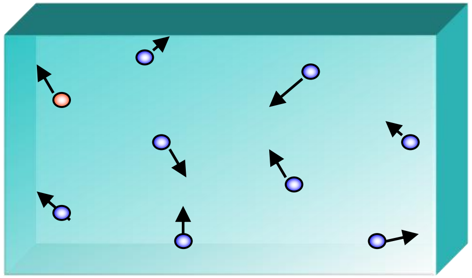


EMC²

4. Τα βασικά γνωρίσματα των καταστάσεων

Αέρια κατάσταση $E_K >> |E_P|$

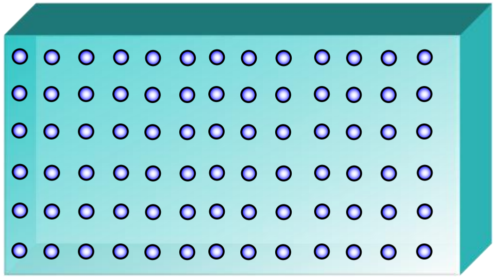
Αν η κινητική ενέργεια των δομικών στοιχείων είναι πολύ μεγαλύτερη σε σχέση με την δυναμική ενέργεια τότε αναφερόμαστε στην αέρια κατάσταση. Εδώ τα μόρια ή τα άτομα έχουν σχετικά μεγάλες ταχύτητες και σχετικά μεγάλες αποστάσεις.



Το αέριο δεν έχει σχήμα και όγκο . Ο όγκος και το σχήμα του καθορίζεται από το δοχείο που περιέχει τα δομικά στοιχεία

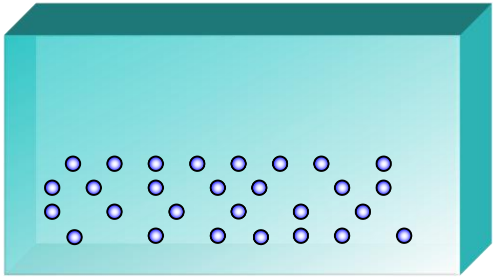
Στερεά κατάσταση $E_K << |E_P|$

Αν η κινητική ενέργεια των δομικών στοιχείων είναι πολύ μικρότερη σε σχέση με την δυναμική ενέργεια τότε αναφερόμαστε στην στερεά κατάσταση. Εδώ τα μόρια ή τα άτομα έχουν σχετικά μικρές ταχύτητες και βρίσκονται σε καθορισμένες θέσεις. Ένα στερεό έχει σχήμα και όγκο.



Υγρή κατάσταση $E_K \approx |E_P|$

Αν η κινητική ενέργεια των δομικών στοιχείων είναι περίπου ίδια με την δυναμική ενέργεια τότε αναφερόμαστε στην υγρή κατάσταση. Εδώ τα μόρια σχετικά μικρές αποστάσεις και οι θέσεις τους δεν είναι καθορισμένες .



Το υγρό δεν έχει σχήμα έχει όγκο . Ο όγκος και το σχήμα του καθορίζεται από το δοχείο που περιέχει τα δομικά στοιχεία

5. Το μοντέλο του ιδανικού αερίου

Είναι ένα αέριο, όπου θεωρούμε ότι:

1. αποτελείται από σημειακά μόρια με πεπερασμένη μάζα (Δηλαδή ο όγκος των μορίων είναι πολύ μικρός, συγκρινόμενος με τον όγκο που καταλαμβάνει όλο αέριο και αλληλεπιδρούν μόνο όταν έρχονται σε επαφή).

2. Τα μόρια του αερίου βρίσκονται σε άτακτη κίνηση που υπακούει του Νόμους του Νεύτωνα.

3. Μεταξύ των μορίων δεν ασκούνται (σημαντικές) δυνάμεις παρά μόνο στη διάρκεια μίας κρούσης.

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα μεταξύ δύο διαδοχικών κρούσεων το μόριο να κινείται με σταθερή ταχύτητα. Ενώ, η μέση απόσταση μεταξύ των μορίων είναι πολύ μεγάλη συγκριτικά με το πολύ μικρό μέγεθος τους).

4. Συγκρούονται μεταξύ τους σύμφωνα με τους νόμους κρούσης των σφαιρών (είναι ελαστικές κρούσεις και με αμελητέα διάρκεια σε σχέση με το χρόνο ανάμεσα σε δύο διαδοχικές συγκρούσεις).

5. Οι συγκρούσεις των μορίων με τα τοιχώματα του δοχείου διατηρούν την ορμή και την ενέργεια τους.

Παρατηρήσεις

Το μοντέλο του Ιδανικού αερίου είναι προσεγγιστικό και δεν υπάρχει τέτοιο αέριο στη φύση,

Τα αρκετά αραιά αέρια συμπεριφέρονται όπως το ιδανικό αέριο.

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

6. Μέθοδοι μελέτης συστήματος πολλών σωματιδίων ενός Ιδανικού Αερίου

Υπάρχουν τρεις βασικοί τρόποι για την μελετήσουμε ένα σύστημα πολλών σωματιδίων που είναι η:

Α. Δυναμική Μέθοδος **Β.** Στατιστική Μέθοδος **Γ.** Θερμοδυναμική Μέθοδος

Α. Δυναμική Μέθοδος ⇒ Αδύνατη Πρακτικά

Αν γνωρίζουμε τις θέσεις(x,y,z) και τις ταχύτητες ($\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z$) όλων των σωματιδίων του αέριου μία χρονική στιγμή, μπορούμε να υπολογίσουμε τις θέσεις και τις ταχύτητες τους όλες τι επόμενες χρονικές στιγμές.

+ Θετικά

Οι θέσεις και οι ταχύτητες των μορίων για κάθε χρονική στιγμή, δίνουν την πληρέστερη και πιο λεπτομερειακή πληροφορία για το σύστημα των πολλών σωματιδίων

— Αρνητικά

Αδύνατο στην πράξη

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Α. Δυναμική Μέθοδος

Παράδειγμα

Καταγραφή στοιχείων 1 cm^3 αέρα

1 cm^3 αέρα περι-έχει $2.7 \cdot 10^{19}$ μόρια

Πρέπει να γνωρίζουμε **6**$\cdot 2.7 \cdot 10^{19} \approx$ $\approx 1.74 \cdot 10^{20}$ αριθμούς

Η συσκευή μας καταγράφει 10^9 αριθμούς/s

Για την καταγραφή των στοιχείων 1 cm^3 αέρα χρειάζονται $1.74 \cdot 10^{11}$ s = 5600 χρόνια

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

EMC²

Α. Δυναμική Μέθοδος

Υπολογισμοί

Αν θέλαμε να υπολογίσουμε την ολική κινητική ενέργεια του συστήματος μία δεδομένη χρονική στιγμή τότε θα έπρεπε να γίνουν διαδοχικά οι πράξεις:

$$\left.\begin{matrix} \upsilon_x \\ \upsilon_y \\ \upsilon_z \end{matrix}\right\} \xrightarrow{3} \left.\begin{matrix} \upsilon_x^2 \\ \upsilon_y^2 \\ \upsilon_z^2 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{2} \upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2 \xrightarrow{2} \frac{1}{2} m \upsilon^2$$

(7 πράξεις/σωματίδιο)

1 cm^3 αέρα περι-έχει $2.7 \cdot 10^{19}$ μόρια

Πρέπει να εκτελέσουμε γνωρίζουμε **7**$\cdot 2.7 \cdot 10^{19} \approx$ $\approx 1.89 \cdot 10^{20}$ αριθμούς

Η συσκευή μας κάνει πράξεις 10^9 αριθμούς/s

Για τον υπολογισμό της ολικής κινητικής ενέργειας χρειάζονται $1.89 \cdot 10^{11}$ s ≈ 6000 χρόνια

Α. Δυναμική Μέθοδος

Αλλαγή Καταστάσεων

Τα σωματίδια του αερίου, όμως, συγκρούονται μεταξύ τους.
1 μόριο συγκρούεται 10^9 φορές/s, δηλαδή έχουμε μία κρούση κάθε 10^{-9} s. Αλλά και το μόριο με το οποίο συγκρούεται το πρώτο συγκρούεται και αυτό με τη σειρά του με άλλα με την ίδια συχνότητα. Δηλαδή μέσα σε χρόνο $N \cdot 10^{-9}$s έχει αλλάξει η κατάσταση 2N μορίων.

Συμπέρασμα
Η δυναμική μέθοδος (η οποία βασίζεται στην αναλυτική μελέτη της θέσης και της ταχύτητας όλων των σωματιδίων) είναι αδύνατη πρακτικά.
Η δυναμική μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο σε συστήματα με μικρό αριθμό σωμάτων.

Β. Στατιστική Μέθοδος = Μικροσκοπική Προσέγγιση

Η στατιστική μέθοδος για τη μελέτη του συστήματος πολλών σωμάτων έχει πιθανοκρατικό χαρακτήρα.
Στη μέθοδο αυτή, οι συντεταγμένες (x,y,z) και οι συνιστώσες των ταχυτήτων ($υ_x$,$υ_y$,$υ_z$) θεωρούνται **τυχαία μεγέθη**.

+ Θετικά

Πλήρης ανάλυση των φαινομένων και κατανόηση της Φυσικής τους σημασίας.

— Αρνητικά

Μερικές φορές δεν υπάρχει πλήρης κατανόηση των μακροσκοπικών φαινομένων.

Συμπέρασμα

Η στατιστική μέθοδος βοηθάει
α. στην κατανόηση της ουσίας των φαινομένων
β. στην ερμηνεία της σχέσης ανάμεσα του συστήματος συνολικά με τη συμπεριφορά και τις ιδιότητες των μεμονωμένων σωματιδίων.
Η στατιστική Φυσική μελετάει τη σχέση ανάμεσα σε μικροσκοπικές και μακροσκοπικές καταστάσεις.

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Γ. Θερμοδυναμική Μέθοδος = Μακροσκοπική Προσέγγιση

Η στατιστική μέθοδος για τη μελέτη του συστήματος πολλών σωμάτων έχει φαινομενολογικό χαρακτήρα.
Στη μέθοδο αυτή, εξετάζεται στο σύστημα μακροσκοπικά χρησιμοποιώντας τους γενικούς νόμους της φυσικής.
Στη θερμοδυναμική μέθοδος αγνοούνται όλοι οι εσωτερικοί μηχανισμοί των διαδικασιών που καθορίζουν τη συμπεριφορά του συστήματος συνολικά.

+ Θετικά

Εύκολη και κατανοητή ανάλυση των μακροσκοπικών ιδιοτήτων του συστήματος.

— Αρνητικά

Άγνοια της ουσίας των φαινομένων και των δυνατοτήτων αξιοποίησης των μικροσκοπικών παραμέτρων.

Συμπέρασμα

Η θερμοδυναμική μέθοδος χαρακτηρίζεται από τη γενικότητα της και επιτρέπει τη μελέτη των φαινομένων χωρίς τη γνώση των εσωτερικών μηχανισμών.

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

7. Σύστημα –Μικροκατάσταση - Μακροκατάσταση

Σύστημα

Σύστημα είναι μια περιοχή του χώρου μαζί με τα φυσικά αντικείμενα που περιλαμβάνει. Τα όρια του συστήματος μπορούν να είναι υλικά (τοιχώματα) ή νοητά, κινητά ή ακίνητα, διαπερατά (για υλικά και ενέργεια) ή αδιαπέραστα.

Μακροσκοπική κατάσταση - μακροκατάσταση

Ένα σύστημα (σωματιδίων – Ιδανικό αέριο) με δεδομένο όγκο V (συγκέντρωση n), πίεση p και θερμοκρασία T.

Μικροσκοπική κατάσταση - μικροκατάσταση

Ένα σύστημα σωματιδίων, το καθένα από τα οποία χαρακτηρίζεται από συγκεκριμένες συντεταγμένες x, y, z και συγκεκριμένες συνιστώσες των ταχυτήτων $υ_x$, $υ_y$, $υ_z$.

Κατάσταση Θερμοδυναμικής Ισορροπίας

Η κατάσταση ισορροπίας είναι η κατάσταση απομονωμένου συστήματος με μεγάλο αριθμό σωματιδίων, κατά την οποία τα p, V (δηλαδή n) και T είναι διαρκώς και σε όλες τις περιοχές σταθερά.

Παρατηρήσεις

Στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας η μακροσκοπική κατάτασταση παραμένει σταθερή χωρίς όμως να σημαίνει ότι και η μικροσκοπική κατάσταση είναι σταθερή. Διότι κάθε μακροκατάσταση μπορεί να προκύψει από ένα πλήθος διαφορετικών μικροκαταστάσεων.

Όταν ένα σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, η στατιστική μέθοδος επιτρέπει τον καθορισμό μίας **μακροκατάστασης** χωρίς να απαιτείται λεπτομερής γνώση των μικροκαταστάσεων του συστήματος, δηλαδή χωρίς να απαιτείται η γνώση των συντεταγμένων τις θέσης αλλά και των συνιστωσών της ταχύτητας.

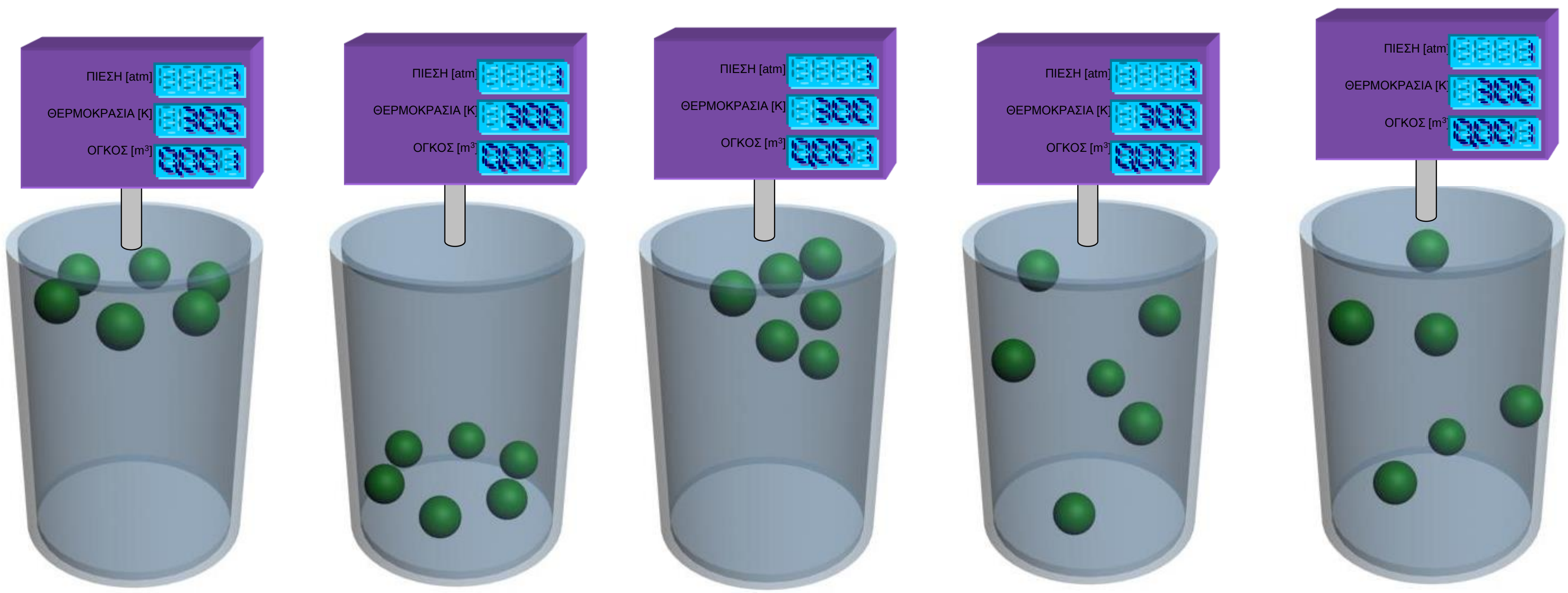
☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

8. Το αξίωμα των ίσων πιθανοτήτων

Όλες οι μικροκαταστάσεις ενός συστήματος που είναι συμβατές με τη δεδομένη μακροκατάστασης είναι εξ' ίσου πιθανές να πραγματοποιηθούν.

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα ιδανικό αέριο το οποίο αποτελείται από 6 μόρια μόνο και βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας. Δηλαδή έχει μία συγκεκριμένη μακροκατάσταση (p,V,T) κάποιες από τις ισοπίθανες μικροκταστάσεις του είναι:

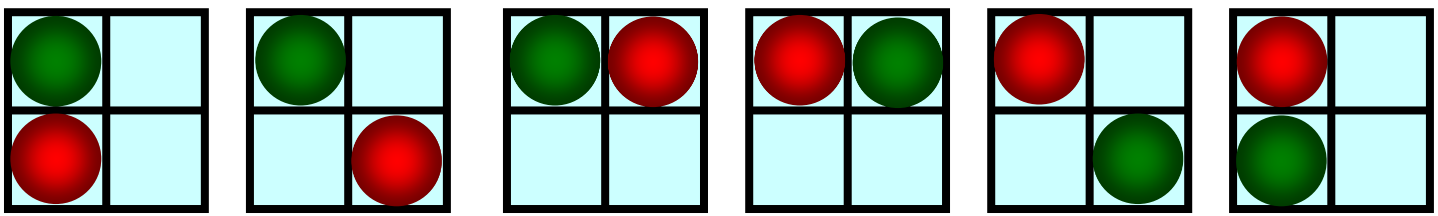


☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Το αξίωμα των ίσων πιθανοτήτων

Παρατήρηση
Στην κλασική στατιστική θεωρούνται όλα τα σωματίδια διαφορετικά, δηλαδή είναι διακρίσιμα και μπορούμε να τα ξεχωρίσουμε.

Παράδειγμα μερικές ισοπίθανες μικροκαταστάσεις



9. Εργοδοτική Υπόθεση

Η μέση τιμή ενός μεγέθους, για παράδειγμα της ενέργειας, ενός συστήματος που βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας μπορεί να υπολογιστεί είτε:

Α. Παρατηρώντας το σύστημα για ένα μεγάλο σχετικά χρονικό διάστημα και εξάγοντας τη μέση τιμή του μεγέθους ως προς το χρόνο παρατήρησης.

Β. Μετρώντας την ίδια χρονική στιγμή τις ενέργειες μίας πολύ μεγάλης συλλογής πανομοιώτυπων συστημάτων και εξάγοντας τη μέση τιμή του μεγέθους ως προς τη συλλογή.

Η εργοδοτική υπόθεση λέει ότι το αποτέλεσμα των δύο διαδικασιών υπολογισμού της μέση τιμής είναι το ίδιο.

Παράδειγμα

Πείραμα τύχης:
Ρίψη νομίσματος και καταγραφή της άνω όψης του.

Υλοποίηση Πειράματος

Ρίψη ενός νομίσματος πολλές φορές

Ρίψη πολλών νομισμάτων μία φορά

10. Χρήσιμοι Υπολογισμοί

- Η διάμετρος ενός ατόμου είναι d ($d \approx 10^{-10}$m)
- Ο **όγκος των ατόμων** $V_{atom} \approx d^3$ ($d \approx 10^{-30} m^3$)
- Οι **δυνατές θέσεις** (N) του ατόμου στον όγκο V είναι $N = \frac{V}{V_{atom}} \approx \frac{V}{d^3}$

  Σε όγκο V = 1 m^3 (ατμ. αέρα) θα υπάρχουν N = 1 /10^{-30} = 10^{30} θέσεις

- **Αριθμός σωματιδίων n**

  Σε κανονικές συνθήκες, σε 1 m^3 αέρα περιέχονται $n = 2.7 \cdot 10^{25}$ μόρια.

- **Αριθμός θέσεων ανά σωματίδιο**

  $N/n \approx 4 \cdot 10^4 = 40.000$ θέσεις $\Rightarrow$

  σε ένα άτομο αναλογεί κύβος που περιέχει 40000 θέσεις

- **Μέση απόσταση μεταξύ δύο ατόμων**

  η ακμή του κύβου θα έχει $(40000)^{1/3} \approx 30$ θέσεις

  άρα, δύο γειτονικά άτομα θα έχουν **μέση απόσταση** ίση με 30 θέσεις

✓Στην ίδια θέση απαγορεύεται να συνυπάρχουν δύο η περισσότερα άτομα.

✓Αν τα άτομα θεωρηθούν σημειακά τότε θεωρούμε ότι η κίνηση τους γίνεται με άλματα από τη μία θέση στην άλλη.

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

11. Πιθανότητα Μακροκατάστασης Δυωνυμική Κατανομή

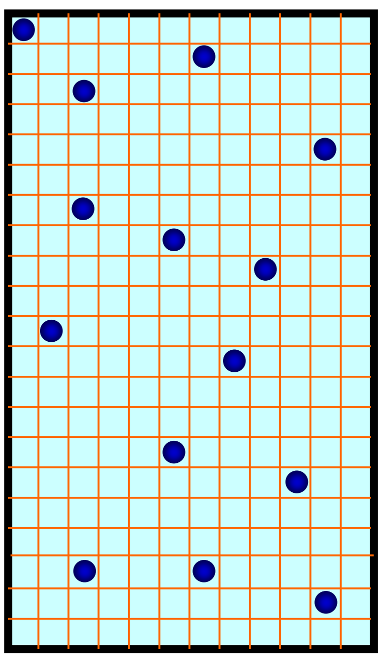
Θα υποθέσουμε ότι έχουμε ένα αέριο n (διακρίσιμων) ατόμων που καταλαμβάνει όγκο V και έχει N θέσεις.
Το σύστημα αυτό έχει σταθερά p,V,T δηλαδή βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη μακροκατάσταση (α) όσον αφορά την κατανομή των σωματιδίων μέσα στον όγκο.

Η πιθανότητα της μακροκατάστασης (α) θα είναι:

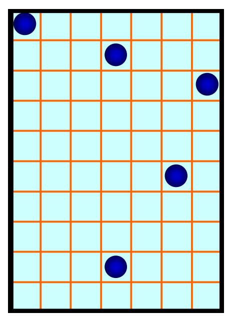
$$P_a = \frac{\text{Το σύνολο των μικροκαταστάσεων που υλοποιούν τη μακροκατάσταση α}}{\text{Το σύνολο όλων των δυνατών μικροκαταστάσεων του συστήματος.}} = \frac{\Gamma_a}{\Gamma_o}$$

Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα σε ένα συγκεκριμένο όγκο V_1 να περιέχονται m σωματίδια $P(V_1,m)$

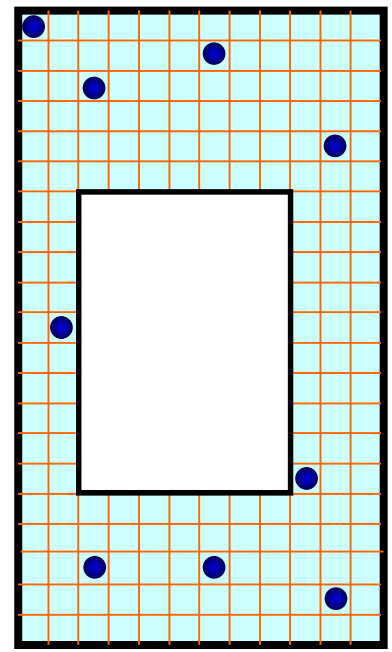
Αέριο
Όγκος V
Αριθμός θέσεων N
Αριθμός ατόμων n



Όγκος V_1
Αριθμός θέσεων N_1
Αριθμός ατόμων m



Όγκος $V – V_1$
Αριθμός θέσεων $N – N_1$
Αριθμός ατόμων n – m



EMC²

$$P(V_1, m) = \frac{\Gamma_\alpha}{\Gamma_o}$$

Το σύνολο των **μικροκαταστάσεων που υλοποιούν τη μακροκατάσταση** είναι:

α) Με πόσους τρόπους επιλέγουμε m σωματίδια από *n* διαφορετικά.

$$C(n, m) = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

β) Με πόσους τρόπους τοποθετούμε σε *N*1 θέσεις m σωματίδια

$$\gamma(V_1, m) = \frac{N_1!}{(N_1 - m)!}$$

γ) Πως μπορούμε να τοποθετήσουμε σε *N*-*N*1 θέσεις *n-m τα υπόλοιπα* σωματίδια.

$$\gamma(V - V_1, n - m) = \frac{(N - N_1)!}{[(N - N_1) - (n - m)]!}$$

Άρα,

$$\Gamma_\alpha \equiv C(n, m)\gamma(V_1, m)\gamma(V - V_1, n - m) = \frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{N_1!}{(N_1 - m)!}\frac{(N - N_1)!}{[(N - N_1) - (n - m)]!}$$

Το **σύνολο** όλων **των** δυνατών **μικροκαταστάσεων** του συστήματος είναι ίσος με τον αριθμό των τρόπων που μπορούμε να τοποθετήσουμε n σωματίδια σε N θέσεις.

$$\Rightarrow \Gamma_o = \Gamma(N, n) = \frac{N!}{(N - n)!}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Άρα, $P(V_1, m) = \frac{\Gamma_\alpha}{\Gamma_0} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \frac{N_1!(N-N_1)!(N-n)!}{N!(N_1-m)![(N-N_1)-(n-m)]!}$

Όταν N >> 1 ισχύει $N! \approx \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N$ (τύπος Striling)

Μετατρέποντας τα παραγοντικά με βάση τον τύπο του Striling
και χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$\left(1-\frac{m}{n}\right)^n = e^{-m} \quad \text{Για } n \to \infty$$

Προκύπτει η ζητούμενη πιθανότητα: $P(V_1, m) = \frac{n!}{m!(n-m)!}\left(\frac{N_1}{N}\right)^m \left(1-\frac{N_1}{N}\right)^{n-m}$

Αν η πιθανότητα ένα σωματίδιο να βρίσκεται στον V_1 είναι: $p = \frac{N_1}{N} = \frac{V_1}{V}$

Αν η πιθανότητα ένα σωματίδιο να μη βρίσκεται στον V_1 $1-\frac{N_1}{N} = 1-\frac{V_1}{V} = 1-p = q$
(δηλαδή βρίσκεται στον V-V_1).

Τότε $P(V_1, m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$

Δυωνυμική Κατανομή

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Ο πιθανότερος αριθμός σωματιδίων στον όγκο V_1

Ο όρος $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ χρησιμοποιώντας την προσέγγιση Strilling $N! \approx \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N$

θεωρώντας n >> ½, m >> ½ και n >> m – ½ και $\left(1-\frac{m}{n}\right)^n = e^{-m}$ για $n \to \infty$

μπορεί να γραφεί μετά από αλγεβρικές πράξεις και τις προσεγγίσεις που θεωρήσαμε: $\frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{ne}{m}\right)^m$

Έτσι η δυωνυμική κατανομή μπορεί να γραφεί

$$P(V_1, m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{ne}{m}\right)^m p^m q^{n-m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{nep}{mq}\right)^m q^n$$

Επειδή 0 < m < n η κατανομή θα έχει ένα τουλάχιστον μέγιστο, το σημείο που αντιστοιχεί στο μέγιστο θα είναι και ο πιθανότερος αριθμός σωματιδίων $m_{\pi\iota\theta}$ $\left.\frac{dP}{dm}\right|_{m=m_{\pi\iota\theta}} = 0 \Rightarrow m_{\pi\iota\theta} = \frac{np}{q} \overset{q\approx 1}{\approx} np \Rightarrow$

$$\boxed{\underbrace{m_{\pi\iota\theta}}_{\text{Ο πιθανότερος αριθμός σωματιδίων στον όγκο } V_1} = \underbrace{n}_{\text{Αριθμός σωματιδίων του όγκου V}}\underbrace{p}_{\text{Η πιθανότητα ένα σωματίδιο να βρίσκεται στον } V_1}}$$

Ο μέσος αριθμός σωματιδίων στον όγκο V_1

Ο μέσος αριθμός σωματιδίων στον όγκο V_1 θα είναι:

$$\langle m \rangle = \sum_{n=0}^{n} m P(V_1, m) = \sum_{n=0}^{n} m P \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$$

Που ύστερα από πράξεις προκύπτει: $\langle m \rangle = np$

Η μέση τιμή προέκυψε να είναι ίση με τον πιθανότερο αριθμό σωματιδίων $m_{\pi\iota\theta} \approx \langle m \rangle = np$

Η **διασπορά** των σωματιδίων στο όγκο V_1 είναι: $\left\langle (\Delta m)^2 \right\rangle = \langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2 = npq$

Η **τυπική απόκλιση** (δηλαδή το μέτρο της διακύμανσης από τη μέση τιμή) είναι:

$$\sigma = \sqrt{\left\langle (\Delta m)^2 \right\rangle} = \sqrt{npq}$$

Η **σχετική διακύμανση** των σωματιδίων (V/V_1>>1) είναι:

$$\frac{\sqrt{\left\langle (\Delta m)^2 \right\rangle}}{\langle m \rangle} = \frac{1}{\sqrt{\langle m \rangle}}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

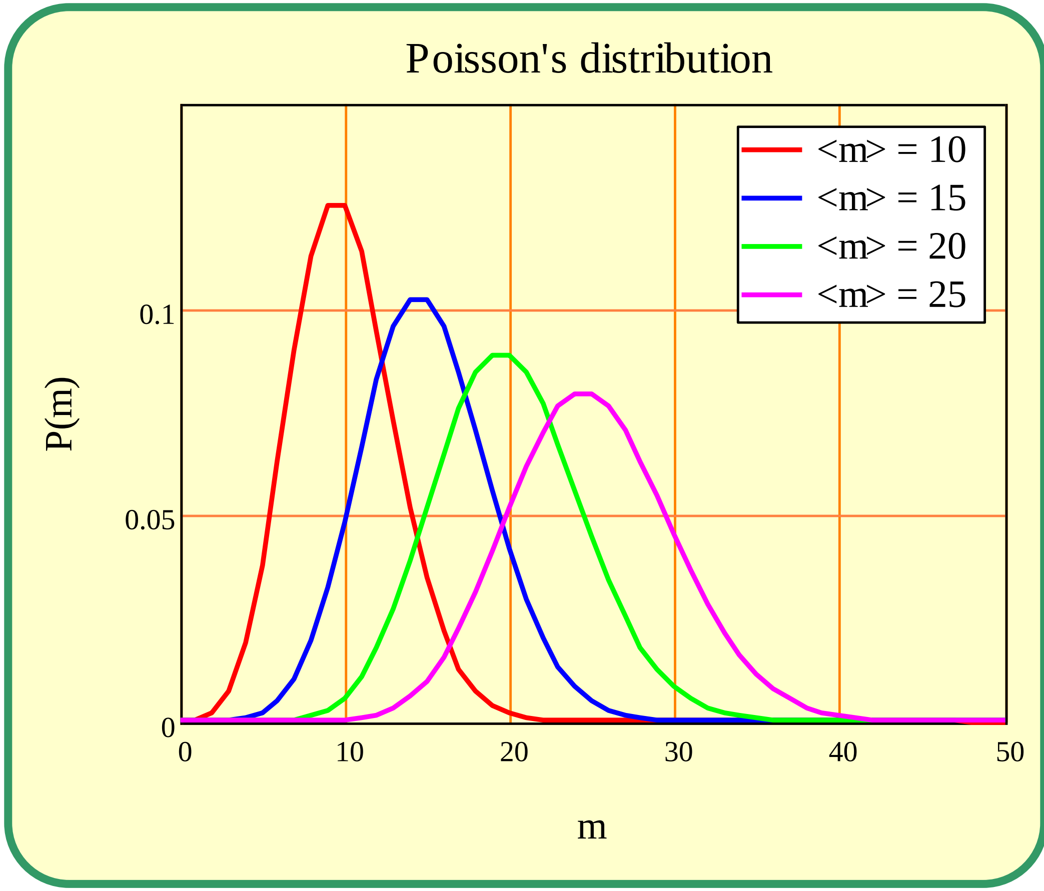
12. Οριακοί τύποι της διωνυμικής κατανομής

α) Όταν $n \to \infty$ και $np = const.$

τότε παίρνουμε την κατανομή Poisson :

$$P(m) = \frac{\langle m \rangle^m}{m!} e^{-\langle m \rangle}$$

Το πλεονέκτημα της κατανομής αυτής είναι ότι μας δίνει την πιθανότητα να πάρουμε m γεγονότα και είναι ανεξάρτητη από τον αριθμό των δοκιμών αρκεί, λοιπόν, να γνωρίζουμε, το <m>.



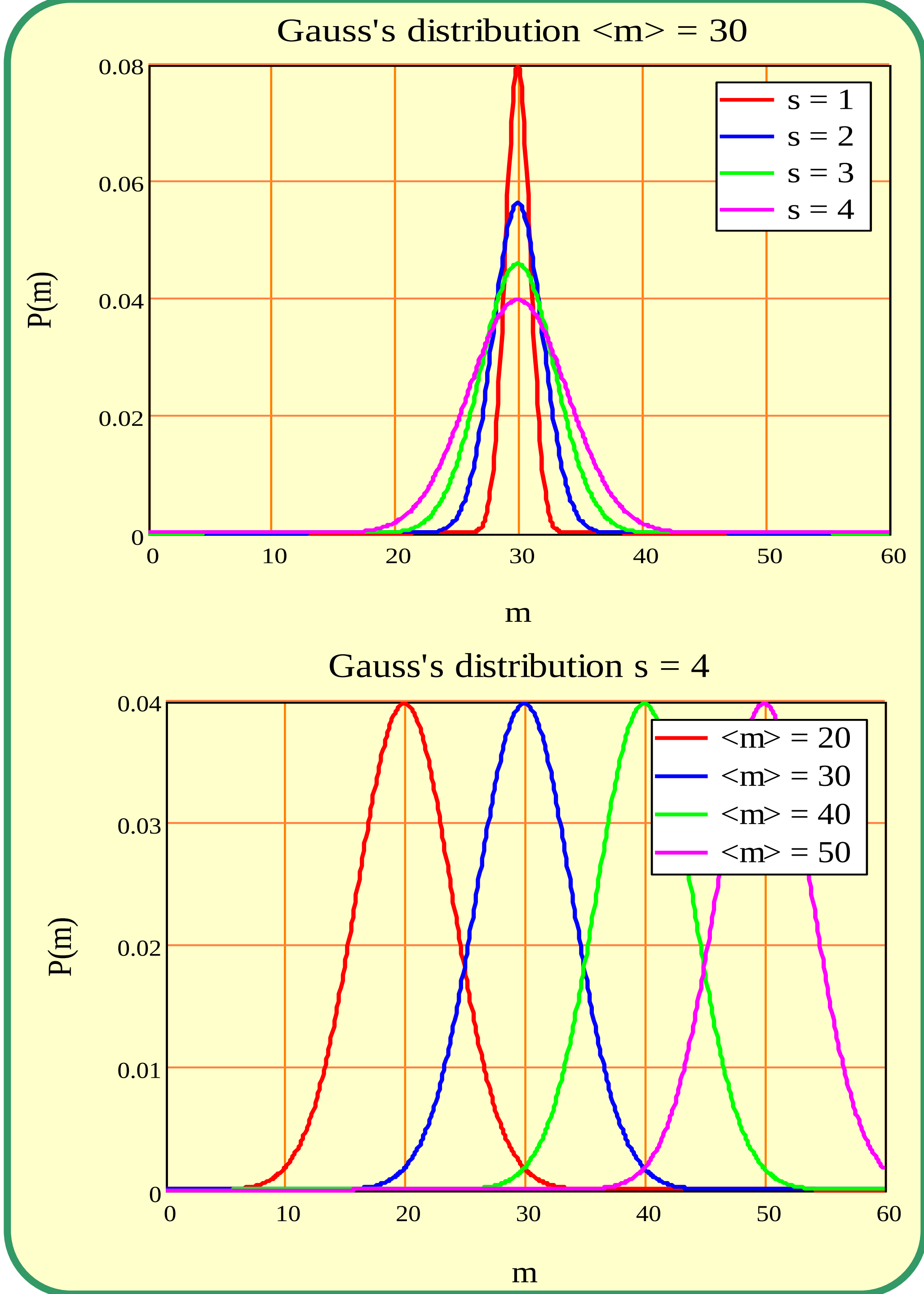
α) Όταν n →∞ και p = const.

τότε παίρνουμε κανονική κατανομή ή κατανομή Gauss με τύπο :

$$P(m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m - <m>)^2}{2\sigma^2}}$$

Όπου σ η μέση τετραγωνική απόκλιση :

$$\sigma = \sqrt{\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2}$$



☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

13. Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 1

α) Προσδιορίστε τον όγκο V ιδανικού αερίου, στον οποίο η σχετική διακύμανση είναι $\alpha = 10^{-6}$ και η συγκέντρωση των σωματιδίων είναι $n = 2{,}7\cdot 10^{19}\ cm^{-3}$.
β) Προσδιορίστε επίσης το μέσο αριθμό των σωματιδίων σε αυτόν τον όγκο.

Η πιθανότητα ένα σωματίδιο να βρίσκεται στον V είναι: $p = \dfrac{V}{V_{TOT}}$

Ο μέσος αριθμός σωματιδίων στον όγκο αυτό αν το πλήθος των σωματιδίων είναι N_{TOT} θα είναι:

$$\langle m \rangle = N_{TOT}\,p = N_{TOT}\frac{V}{V_{TOT}} = nV$$

Η σχετική διακύμανση των σωματιδίων στον όγκο V θα είναι: $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{\langle m \rangle}} \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{nV}}$

Άρα $V = \dfrac{1}{n\alpha^2} = 3.7\cdot 10^{-8}\,cm^3$

Ενώ ο Μέσος αριθμός των σωματιδίων θα είναι $\langle m \rangle = nV = \dfrac{1}{\alpha^2} = 10^{12}$