ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 1

Σώμα κινείται υπό την επίδραση της δύναμης $F = F_o - k\upsilon$, όπου υ η ταχύτητα και F_o, k σταθερές. Αν για t = 0 είναι $\upsilon_o=0$ και $x_o=0$, να υπολογιστεί η ταχύτητα και η θέση του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου και η θέση ως συνάρτηση της ταχύτητας.

(Τμήμα Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α.)

Λύση

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow F_o - k\upsilon = m\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow \int_0^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{F_o - k\upsilon} = \frac{1}{m}\int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{k}\ell n(F_o - k\upsilon)\Big|_0^{\upsilon} = \frac{t}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell n\frac{F_o - k\upsilon}{F_o} = -\frac{k}{m}t \Rightarrow 1 - \frac{k}{F_o}\upsilon = e^{-\frac{k}{m}t} \Rightarrow \upsilon(t) = \frac{F_o}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

Επίσης: $$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^x dx = \frac{F_o}{k}\int_0^t\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)dt \Rightarrow x = \frac{F_o}{k}\left(t - \frac{e^{-\frac{k}{m}t}}{-k/m}\right)\Bigg|_0^t =$$

$$= \frac{F_o}{k}\left[t + \frac{m}{k}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - e^0\right)\right] \Rightarrow x(t) = \frac{F_o}{k}t + \frac{F_o m}{k^2}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right)$$

Από το 2ο νόμο του Newton εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσιδωτής παραγώγισης θα υπολογιστεί η συνάρτηση x(υ). Δηλαδή:

$$F_o - k\upsilon = m\frac{d\upsilon}{dt} = m\frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow F_o - k\upsilon = m\frac{d\upsilon}{dx}\upsilon \Rightarrow \int_0^{\upsilon}\frac{\upsilon d\upsilon}{F_o - k\upsilon} = \frac{1}{m}\int_0^x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{k}\int_0^{\upsilon}\frac{-k\upsilon + F_o - F_o}{F_o - k\upsilon}d\upsilon = \frac{x}{m} \Rightarrow x = -\frac{m}{k}\int_0^{\upsilon}\left(1 - \frac{F_o}{F_o - k\upsilon}\right)d\upsilon =$$

$$= -\frac{m}{k}\left[\upsilon + \frac{F_o}{k}\ell n(F_o - k\upsilon)\right]_0^{\upsilon} = -\frac{m}{k}\left[\upsilon + \frac{F_o}{k}\ell n\left(\frac{F_o - k\upsilon}{F_o}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(\upsilon) = \frac{mF_o}{k^2}\ell n\left(\frac{F_o}{F_o - k\upsilon}\right) - \frac{m\upsilon}{k}$$

ΘΕΜΑ 2

Ένα αυτοκίνητο μάζας m κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα υ_o όταν κάποια στιγμή σβήνει η μηχανή του και αρχίζει να επιβραδύνεται υπό την επίδραση δύναμης αντίστασης που υπακούει στη σχέση $F = -c\upsilon^2$, όπου c θετική σταθερά. Να υπολογιστούν:

α) η ταχύτητα του αυτοκινήτου ως συνάρτηση του χρόνου t και

β) ως συνάρτηση του διαστήματος s που έχει διανύσει το αυτοκίνητο από τη στιγμή που σβήνει η μηχανή του (t = 0) ,καθώς και

γ) το διάστημα s ως συνάρτηση του χρόνου.

(Τμήμα Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση

α) $$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -c\upsilon^2 = m\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow \int_{\upsilon_o}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon^2} = -\frac{c}{m}\int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{\upsilon}\Big|_{\upsilon_o}^{\upsilon} = -\frac{c}{m}t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\upsilon} - \frac{1}{\upsilon_o} = \frac{c}{m}t \Rightarrow \frac{1}{\upsilon} = \frac{1}{\upsilon_o} + \frac{c}{m}t = \frac{m + c\upsilon_o t}{m\upsilon_o} \Rightarrow \upsilon(t) = \frac{m\upsilon_o}{m + c\upsilon_o t}$$

β) Όπως πριν από το 2^o νόμο του Newton προκύπτει :

$$-c\upsilon^2 = m\frac{d\upsilon}{dt} = m\frac{d\upsilon}{ds}\frac{ds}{dt} \Rightarrow -c\upsilon^2 = m\frac{d\upsilon}{ds}\upsilon \Rightarrow \int_{\upsilon_o}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{c}{m}\int_0^s ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell n\upsilon\Big|_{\upsilon_o}^{\upsilon} = -\frac{c}{m}s \Rightarrow \ell n\upsilon - \ell n\upsilon_o = \ell n\frac{\upsilon}{\upsilon_o} = -\frac{c}{m}s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\upsilon}{\upsilon_o} = e^{-\frac{c}{m}s} \Rightarrow \upsilon(s) = \upsilon_o e^{-\frac{c}{m}s}$$

γ) $$\upsilon(t) = \frac{ds}{dt} \Rightarrow \int_0^s ds = \int_0^t \frac{m\upsilon_o}{m + c\upsilon_o t}dt \Rightarrow s = \frac{m\upsilon_o}{c\upsilon_o}\ell n(m + c\upsilon_o t)\Big|_0^t =$$

$$= \frac{m}{c}\ell n\left(\frac{m + c\upsilon_o t}{m}\right) \Rightarrow s(t) = \frac{m}{c}\ell n(1 + \frac{c\upsilon_o t}{m})$$

ή $$\upsilon(s)=\frac{ds}{dt}\Rightarrow \upsilon_o e^{-\frac{c}{m}s}=\frac{ds}{dt}\Rightarrow \int_0^s \frac{ds}{e^{-\frac{c}{m}s}}=\int_0^s e^{\frac{c}{m}s}ds=\upsilon_o\int_0^t dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\frac{e^{\frac{c}{m}s}}{c/m}\right|_0^s=\upsilon_o t\Rightarrow e^{\frac{c}{m}s}-e^0=\frac{c\upsilon_o}{m}t\Rightarrow e^{\frac{c}{m}s}=1+\frac{c\upsilon_o}{m}t\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{c}{m}s=\ell n\left(1+\frac{c\upsilon_o}{m}t\right)\Rightarrow s(t)=\frac{m}{c}\ell n\left(1+\frac{c\upsilon_o}{m}t\right)$$

ΘΕΜΑ 3

Μια σφαίρα μάζας m προσκρούει κάθετα σε ακλόνητα στερεωμένη ξύλινη δοκό πάχους d με ταχύτητα υ_o και τη διαπερνά. Αν η δύναμη τριβής στο εσωτερικό της δοκού είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας, δηλαδή $F = -c\,\upsilon^2$, να υπολογιστούν:

α) η ταχύτητα της σφαίρας ως συνάρτηση του χρόνου t και

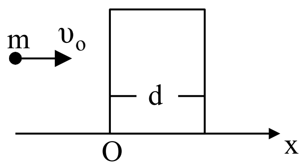
β) ως συνάρτηση της απόστασης x

γ) η θέση x του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου

δ) ο συνολικός χρόνος που χρειάζεται η σφαίρα να περάσει μέσα από τη δοκό και η ταχύτητα της σφαίρας στην έξοδο.

(Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.)

Λύση



α) Κατά την κίνηση της σφαίρας στο εσωτερικό της δοκού, ο 2[ος] νόμος του Newton δίνει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -c\upsilon^2 = m\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow \int_{\upsilon_o}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon^2} =$$

$$= -\frac{c}{m}\int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{\upsilon} + \frac{1}{\upsilon_o} = -\frac{c}{m}t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\upsilon} = \frac{1}{\upsilon_o} + \frac{ct}{m} \Rightarrow \upsilon(t) = \frac{m\upsilon_o}{m + \upsilon_o ct}$$

β) $$-c\upsilon^2 = m\frac{d\upsilon}{dt} = m\frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow -c\upsilon^2 = m\frac{d\upsilon}{dx}\upsilon \Rightarrow \int_{\upsilon_o}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{c}{m}\int_0^x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell n\frac{\upsilon}{\upsilon_o} = -\frac{c}{m}x \Rightarrow \upsilon(x) = \upsilon_o e^{-\frac{c}{m}x}$$

γ) Ομοίως με το ερώτημα **(γ)** του θέματος 2.3 προκύπτει:

$$x(t) = \frac{m}{c}\ell n\left(1 + \frac{c\upsilon_o}{m}t\right)$$

δ) Για τον ολικό χρόνο κίνησης της σφαίρας τ είναι x = d και η παραπάνω δίνει:

$$d = \frac{m}{c}\ell n\left(1 + \frac{c\upsilon_o}{m}\tau\right) \Rightarrow \ell n\left(1 + \frac{c\upsilon_o}{m}\tau\right) = \frac{cd}{m} \Rightarrow 1 + \frac{c\upsilon_o}{m}\tau = e^{\frac{c}{m}d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{m}{c\upsilon_o}\left(e^{\frac{c}{m}d} - 1\right)$$

Η ταχύτητα εξόδου της σφαίρας υπολογίζεται εύκολα από τη συνάρτηση υ(x) για x=d.

Δηλαδή: $\upsilon_{\varepsilon\xi} = \upsilon_o e^{-\frac{c}{m}d}$

ΘΕΜΑ 4

Σωματίδιο μάζας m βάλλεται κατά μήκος οριζόντιας επιφάνειας με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_o. Το σωματίδιο υπόκειται σε ολική αντίσταση μέτρου $mk\upsilon^2 + mk\alpha\upsilon$, όπου υ το μέτρο της ταχύτητάς του σε τυχούσα χρονική στιγμή και k, α θετικές σταθερές.

α) Υπολογίστε την απόσταση s, που διανύει το σωματίδιο μέχρις ότου ηρεμήσει.

β) Υπολογίστε το χρόνο $t_{1/2}$, που απαιτείται ώστε η ταχύτητα του σωματιδίου να γίνει $\upsilon_o/2$.

(Τμήμα Μηχανικών Μεταλλείων – Μεταλλουργών Ε.Μ.Π.)

Λύση

α) $$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow -(mk\upsilon^2 + mk\alpha\upsilon) = m\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow -k\upsilon^2 - k\alpha\upsilon = \frac{d\upsilon}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\upsilon}{ds}\upsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ds = \frac{\upsilon d\upsilon}{-k\upsilon^2 - k\alpha\upsilon} \Rightarrow \int_0^s ds = -\frac{1}{k}\int_{\upsilon_o}^{0}\frac{d\upsilon}{\upsilon+\alpha} \Rightarrow s = -\frac{1}{k}\ell n(\upsilon+\alpha)\Big|_{\upsilon_o}^{0} =$$

$$= -\frac{1}{k}\ell n\left(\frac{\alpha}{\upsilon_o - \alpha}\right) = \frac{1}{k}\ell n\left(\frac{\upsilon_o+\alpha}{\alpha}\right) \Rightarrow s = \frac{1}{k}\ell n\left(1+\frac{\upsilon_o}{\alpha}\right)$$

β) $$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow -mk\upsilon^2 - mk\alpha\upsilon = m\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow \int_{\upsilon_o}^{\upsilon_o/2}\frac{d\upsilon}{-k(\upsilon^2+\alpha\upsilon)} = \int_0^{t_{1/2}} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1/2} = -\frac{1}{k}\int_{\upsilon_o}^{\upsilon_o/2}\frac{d\upsilon}{\upsilon(\upsilon+\alpha)} = -\frac{1}{k}\frac{1}{\alpha}\int_{\upsilon_o}^{\upsilon_o/2}\left(\frac{1}{\upsilon} - \frac{1}{\upsilon+\alpha}\right)d\upsilon =$$

$$= -\frac{1}{k\alpha}\left[\ell n\upsilon - \ell n(\upsilon+\alpha)\right]_{\upsilon_o}^{\upsilon_o/2} = -\frac{1}{k\alpha}\left[\ell n\left(\frac{\upsilon_o/2}{\upsilon_o}\right) - \ell n\left(\frac{\upsilon_o/2+\alpha}{\upsilon_o+\alpha}\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{k\alpha}\left[\ell n\frac{1}{2} - \ell n\left(\frac{\upsilon_o/2+\alpha}{\upsilon_o+\alpha}\right)\right] = -\frac{1}{k\alpha}\ell n\left(\frac{\frac{1/2}{\upsilon_o/2+\alpha}}{\upsilon_o+\alpha}\right) = -\frac{1}{k\alpha}\ell n\left(\frac{\upsilon_o+\alpha}{\upsilon_o+2\alpha}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1/2} = \frac{1}{k\alpha}\ell n\left(\frac{\upsilon_o+2\alpha}{\upsilon_o+\alpha}\right)$$

Θέμα 5

Σώμα μάζας m αφήνεται μέσα σε ρευστό και κινείται μονοδιάστατα υπό την επίδραση του βάρους του, ενώ μια ανθιστάμενη δύναμη $F=-k\upsilon^2$ αντιδρά στην κίνησή του.

α) Υπολογίστε την οριακή ταχύτητα υ_L του σώματος.

β) Υπολογίστε την ταχύτητα του σώματος συναρτήσει του διαστήματος x που διανύει.

γ) Παραστήστε γραφικά την μεταβολή του υ^2 συναρτήσει του x.

(Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση

α) Οριακή ταχύτητα υ_L λέγεται η ταχύτητα την οποία όταν αποκτήσει το σώμα σταματά να επιταχύνεται δηλαδή είναι η μέγιστη ταχύτητα του σώματος. Οπότε όταν $\upsilon=\upsilon_L$ είναι α=0 και ο 2ος νόμος του Newton δίνει:

$$\Sigma\vec{F}=0 \Rightarrow B-F=0 \Rightarrow mg-k\upsilon_L^2=0 \Rightarrow \upsilon_L=\sqrt{mg/k}$$

β) Κατά την κίνηση του σώματος ο 2ος νόμος του Newton δίνει:

$$\Sigma F=m\alpha \Rightarrow mg-k\upsilon^2=m\frac{d\upsilon}{dt}=m\frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt}=m\frac{d\upsilon}{dx}\upsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\int_0^{\upsilon}\frac{\upsilon d\upsilon}{mg-k\upsilon^2}=\int_0^x dx \qquad \textbf{(1)}$$

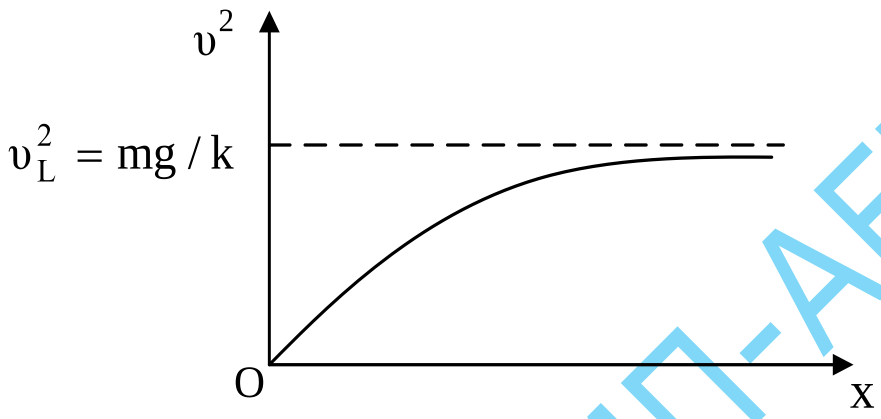
Θέτοντας : $z=mg-k\upsilon^2 \Rightarrow dz=-2k\upsilon d\upsilon \Rightarrow \upsilon d\upsilon=-\dfrac{dz}{2k}$ (αλλαγή μεταβλητής) τα όρια αλλάζουν : Για $\upsilon=0 \Rightarrow z=mg$ και για $\upsilon=\upsilon \Rightarrow z=mg-k\upsilon^2$ και η **(1)** γίνεται :

$$-\frac{m}{2k}\int_{mg}^{mg-k\upsilon^2}\frac{dz}{z}=x \Rightarrow \ln z\Big|_{mg}^{mg-k\upsilon^2}=-\frac{2kx}{m} \Rightarrow \ln\frac{mg-k\upsilon^2}{mg}=$$

$$=-\frac{2kx}{m} \Rightarrow \frac{mg-k\upsilon^2}{mg}=e^{\frac{-2kx}{m}} \Rightarrow \upsilon_{(x)}^2=\frac{mg}{k}\left(1-e^{\frac{-2kx}{m}}\right)$$

γ) Για x=0 είναι $e^o = 1$ οπότε $\upsilon^2 = 0$ και για $x \to \infty$ είναι $e^{-\infty} \to 0$ οπότε $\upsilon^2 \to mg / k = \upsilon_L^2$.

Συνεπώς η γραφική παράσταση υ^2=f(x) είναι η ακόλουθη:

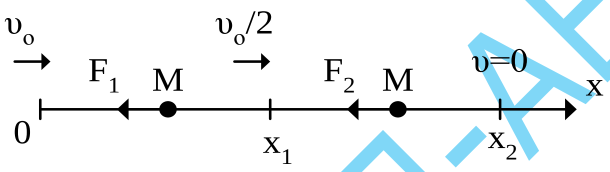


ΘΕΜΑ 6

Μια βενζινάκατος με μάζα M κινείται σε ευθεία γραμμή με μεγάλη ταχύτητα υ_o στο νερό. Κάποια στιγμή η μηχανή σβήνει. Αρχικά, η δύναμη αντίστασης του νερού είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας, $F_1 = -k\upsilon^2$. Όταν η ταχύτητα μειωθεί κάτω από $\upsilon_o/2$, τότε η δύναμη της αντίστασης του νερού γίνεται ανάλογη της ταχύτητας, $F_2 = -\lambda\upsilon$. Να υπολογίσετε το συνολικό διάστημα που θα διανύσει η βενζινάκατος μέσα στο νερό ώσπου να σταματήσει.

(Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Το διάστημα x_1 που διανύει η βενζινάκατος μέχρι να υποδιπλασιαστεί η ταχύτητά της είναι:

$$F_1 = M\alpha \Rightarrow -k\upsilon^2 = M\frac{d\upsilon}{dt} = M\frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow -k\upsilon^2 = M\frac{d\upsilon}{dx}\upsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{x_1} dx = -\frac{M}{k}\int_{\upsilon_o}^{\upsilon_o/2}\frac{d\upsilon}{\upsilon} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{M}{k}\ell n\upsilon\Big|_{\upsilon_o}^{\upsilon_o/2} = -\frac{M}{k}\ell n\frac{\upsilon_o/2}{\upsilon_o} = -\frac{M}{k}\ell n\frac{1}{2} = -\frac{M}{k}(\ell n1 - \ell n2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{M}{k}\ell n2 \qquad \textbf{(1)}$$

Ενώ το ολικό διάστημα x_2 που διανύει η βενζινάκατος μέχρι να σταματήσει είναι:

$$F_2 = M\alpha \Rightarrow -\lambda\upsilon = M\frac{d\upsilon}{dt} = M\frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow -\lambda\upsilon = M\frac{d\upsilon}{dx}\upsilon \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} dx = -\frac{M}{\lambda}\int_{\upsilon_o/2}^{0} d\upsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 - x_1 = -\frac{M}{\lambda}\left(0 - \frac{\upsilon_o}{2}\right) \overset{(1)}{\Rightarrow} x_2 = \frac{M}{k}\ell n2 + \frac{M\upsilon_o}{2\lambda}$$

ΘΕΜΑ 7

Μια βάρκα μάζας m κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα υ_o και βρίσκεται στη θέση x=0 όταν τη χρονική στιγμή t = 0 σβήνει η μηχανή της. Η αντίσταση του νερού είναι τέτοια ώστε η δύναμη της τριβής που ασκείται πάνω στη βάρκα να είναι ίση με –bυ, όπου υ είναι η ταχύτητα της βάρκας και b μια θετική σταθερά. Να υπολογιστούν:

α) Η ταχύτητα της βάρκας υ ως συνάρτηση του χρόνου.
β) Η θέση της βάρκας x ως συνάρτηση του χρόνου.
γ) Η απόσταση α που θα διανύσει η βάρκα μέχρις ότου σταματήσει να κινείται.
δ) Ο ρυθμός απώλειας ενέργειας από τη βάρκα και να χρησιμοποιηθεί για να δειχθεί ότι η ολική απώλεια ενέργειας ισούται με την αρχική κινητική ενέργεια της βάρκας.

(Τμήμα Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση

α) $$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -b\upsilon = m\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow \int_{\upsilon_o}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{b}{m}\int_0^t dt \Rightarrow \ell n\frac{\upsilon}{\upsilon_o} = -\frac{b}{m}t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon(t) = \upsilon_o e^{-\frac{b}{m}t} \qquad \textbf{(1)}$$

β) $$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} \overset{(1)}{\Rightarrow} \upsilon_o e^{-\frac{b}{m}t} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^x dx = \upsilon_o\int_0^t e^{-\frac{b}{m}t}dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \upsilon_o\left[\frac{e^{-\frac{b}{m}t}}{-b/m}\right]_0^t = -\frac{m\upsilon_o}{b}\left(e^{-\frac{b}{m}t} - e^0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{m\upsilon_o}{b}(1 - e^{-\frac{b}{m}t})$$

γ) $$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -b\upsilon = m\frac{d\upsilon}{dt} = m\frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -b\upsilon = m\frac{d\upsilon}{dx}\upsilon \Rightarrow \int_0^{\alpha} dx = -\frac{m}{b}\int_{\upsilon_o}^{0} d\upsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{m}{b}(0 - \upsilon_o) \Rightarrow \alpha = \frac{m\upsilon_o}{b}$$

δ) Ο ρυθμός απώλειας ενέργειας της βάρκας εκφράζει την ισχύ της δύναμης τριβής. Δηλαδή: $P = F\upsilon = b\upsilon^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} P(t) = b\upsilon_o^2 e^{-\frac{2b}{m}t}$

Αλλά:

$$P = \frac{dE}{dt} \Rightarrow \int_0^E dE = b\upsilon_o^2 \int_0^t e^{-\frac{2b}{m}t} dt \Rightarrow E = b\upsilon_o^2 \left[\frac{e^{-\frac{2b}{m}t}}{-2b/m} \right]_0^t =$$

$$= \frac{m\upsilon_o^2}{2}(-e^{-\frac{2b}{m}t} + e^0) \Rightarrow E(t) = \frac{m\upsilon_o^2}{2}(1 - e^{-\frac{2b}{m}t}) \qquad \textbf{(2)}$$

Η παραπάνω σχέση εκφράζει την απώλεια ενέργειας της βάρκας συναρτήσει του χρόνου. Επειδή όπως συμπεραίνεται από τη σχέση **(1)** η ταχύτητα υ της βάρκας μηδενίζεται για $t \to \infty$, η ολική απώλεια ενέργειας προσδιορίζεται αν αντικαταστήσουμε στη **(2)** το χρόνο $t \to \infty$ κι επομένως $e^{\frac{-2b}{m}t} \to 0$. Άρα:

$$E_{o\lambda} = \frac{1}{2} m\upsilon_o^2 = K_{\alpha\rho\chi}$$

ΘΕΜΑ 8

Ένα σώμα μάζας m αφήνεται με μηδενική αρχική ταχύτητα στην επιφάνεια μιας λίμνης (πολύ μεγάλου βάθους) και στη συνέχεια βυθίζεται κατακόρυφα προς τον πυθμένα της λίμνης. Στο σώμα εξασκούνται οι ακόλουθες δυνάμεις: το βάρος του $\vec{B} = mg\hat{z}$, η άνωση $\vec{A} = -A\hat{z}$ και μια δύναμη αντίστασης $-\gamma\vec{\upsilon}$, όπου γ σταθερά και $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητα του σώματος. Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{z}$ έχει διεύθυνση κατακόρυφη προς τον πυθμένα της λίμνης. Υποθέτουμε ότι $A < mg$.

α) Βρείτε την εξίσωση κίνησης του σώματος για $t > 0$.

β) Βρείτε τη θέση του σώματος (δηλαδή την απόσταση από την επιφάνεια της λίμνης) για $t > 0$.

γ) Βρείτε την κινητική ενέργεια του σώματος για $t >> 1/\lambda$, όπου $\lambda = \gamma/m$.

δ) Βρείτε το έργο του βάρους $\vec{B} = mg\hat{z}$ μέχρι τη χρονική στιγμή t, υποθέτοντας ότι $t >> 1/\lambda$

Σχολιάστε τα αποτελέσματα των ερωτήσεων **(γ)** και **(δ)** σχετικά με τη διατήρηση της ολικής ενέργειας.

(Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση

α) Ο 2[ος] νόμος του Newton για την κίνηση του σώματος δίνει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow mg - A - \gamma\upsilon = m\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{mg - A - \gamma\upsilon}{m} \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = f - \lambda\upsilon$$

όπου $f = g - \frac{A}{m}$ και $\lambda = \frac{\gamma}{m}$

Χωρίζοντας μεταβλητές και ολοκληρώνοντας την παραπάνω προκύπτει:

$$\frac{d\upsilon}{f - \lambda\upsilon} = dt \Rightarrow \int_0^{\upsilon} \frac{d\upsilon}{f - \lambda\upsilon} = \int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{\lambda}\ell n(f - \lambda\upsilon)\Big|_0^{\upsilon} = -\frac{1}{\lambda}\ell n\frac{f - \lambda\upsilon}{f} = t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell n\left(1 - \frac{\lambda}{f}\upsilon\right) = -\lambda t \Rightarrow 1 - \frac{\lambda}{f}\upsilon = e^{-\lambda t} \Rightarrow \upsilon = \frac{f}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}) \qquad \textbf{(1)}$$

ή $$\upsilon(t) = \frac{mg - A}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)$$

β) $$\upsilon(t) = \frac{dz}{dt} \Rightarrow \int_0^z dz = \frac{f}{\lambda}\int_0^t (1 - e^{-\lambda t})dt \Rightarrow z = \frac{f}{\lambda}\left[t - \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\right]_0^t =$$

$$=\frac{f}{\lambda}\left(t+\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\right)\Rightarrow z(t)=\frac{f}{\lambda}\left[t+\frac{1}{\lambda}(e^{-\lambda t}-1)\right] \qquad \textbf{(2)}$$

ή $$z(t)=\frac{mg-A}{\gamma}\left[t+\frac{m}{\gamma}\left(e^{-\frac{\gamma}{m}t}-1\right)\right]$$

γ) Για $t>>\frac{1}{\lambda}\Rightarrow \lambda t>>1\Rightarrow e^{-\lambda t}<<1$ κι επομένως $1-e^{-\lambda t}\cong 1$ και η **(1)** δίνει:

$$\upsilon(t)\cong\frac{f}{\lambda}$$

Άρα η κινητική ενέργεια του σώματος είναι:

$$K=\frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{f}{\lambda}\right)^2\Rightarrow K=\frac{1}{2}m\left(\frac{mg-A}{\gamma}\right)^2$$

δ) Λόγω της παραπάνω προσέγγισης η **(2)** γίνεται: $z(t)\cong\frac{f}{\lambda}\left(t-\frac{1}{\lambda}\right)$

Κι επειδή $t>>\frac{1}{\lambda}$ είναι $t-\frac{1}{\lambda}\cong t$ οπότε: $z(t)\cong\frac{f}{\lambda}t$

Άρα το έργο του βάρους μέχρι τη χρονική στιγμή t είναι:

$$W=mgz(t)=mg\frac{f}{\lambda}t\Rightarrow W=mg\left(\frac{mg-A}{\gamma}\right)t$$

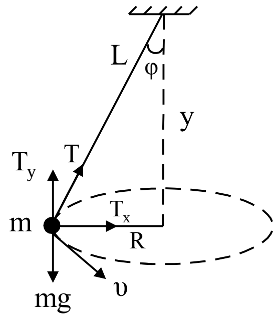
Παρατηρείται ότι η κινητική ενέργεια είναι σταθερή, ενώ το έργο του βάρους αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο. Αυτό οφείλεται στην ύπαρξη επιπλέον των δυνάμεων της άνωσης και της αντίστασης, όπου σύμφωνα με τη διατήρηση της ολικής ενέργειας (ΣW=ΔΚ) κι επειδή Κ=σταθ.$\Rightarrow$ΔΚ=0 είναι $\Sigma W=W_{\beta\acute{\alpha}\rho o \upsilon\varsigma}+W_{\acute{\alpha}\nu\omega\sigma\eta\varsigma}+W_{\alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau\alpha\sigma\eta\varsigma}=0$ Δηλαδή το άθροισμα των έργων του βάρους και της άνωσης ισούται με αυτό της αντίστασης, το οποίο μετατρέπεται σε θερμότητα.

ΘΕΜΑ 9

Ένα μικρό σώμα μάζας m είναι αναρτημένο από μια αβαρή ράβδο μήκους L και περιστρέφεται πάνω σ' ένα οριζόντιο κύκλο ακτίνας R με σταθερή ταχύτητα. Βρείτε την ταχύτητα περιστροφής και το χρόνο μιας πλήρους περιστροφής σαν συνάρτηση των R, L και της επιτάχυνσης της βαρύτητας g.

(Τμήμα Μηχανικών Μεταλλείων – Μεταλλουργών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Το σώμα κινείται υπό την επίδραση του βάρους του mg και της τάσης του νήματος T, η οποία αναλύεται στις συνιστώσες $T_x = T\sin\varphi$ και $T_y = T\cos\varphi$.

Λόγω ισορροπίας στον κατακόρυφο άξονα y ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_y - mg = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T\cos\varphi = mg \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\varphi} \qquad \textbf{(1)}$$

Επίσης η συνιστώσα T_x παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης της κυκλικής τροχιάς του σώματος. Δηλαδή:

$$T_x = m\alpha_\kappa \Rightarrow T\sin\varphi = m\frac{\upsilon^2}{R} \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{mg}{\cos\varphi}\sin\varphi = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon^2 = gR\tan\varphi \Rightarrow \upsilon = \sqrt{gR\tan\varphi} \qquad \textbf{(2)}$$

Αλλά: $\tan\varphi = \frac{R}{y}$ κι επειδή $L^2 = R^2 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{L^2 - R^2}$ είναι :

$$\tan\varphi = \frac{R}{\sqrt{L^2 - R^2}}$$

Άρα η **(2)** δίνει: $\upsilon = \sqrt{\frac{gR^2}{\sqrt{L^2 - R^2}}} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{g}{\sqrt{L^2 - R^2}}}R \qquad \textbf{(3)}$

Ο χρόνος μιας πλήρους περιστροφής του σώματος εκφράζει την περίοδο αυτού και είναι:

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ κι αφού $\upsilon = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon}{R}$ είναι:

$$T = \frac{2\pi R}{\upsilon} \overset{(3)}{\Rightarrow} T = \frac{2\pi}{\sqrt{g/\sqrt{L^2 - R^2}}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{L^2 - R^2}}{g}}$$

Θέμα 10

Η κινητική ενέργεια ενός σώματος μάζας m που κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας R είναι ανάλογη του διαστήματος (τόξου) s που διανύει το σώμα: K=cs, όπου c γνωστή θετική σταθερά.
α) Να υπολογιστεί το μέτρο της συνολικής δύναμης F που ασκείται στο σώμα ως συνάρτηση του διαστήματος s.
β) Να βρεθούν το διάστημα s και το μέτρο της ταχύτητας υ του σώματος ως συναρτήσεις του χρόνου αν για t=0 είναι $s_o = 0$ και $υ_o = 0$.

(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.ΠΑ..)

Λύση

α) Η κινητική ενέργεια ορίζεται ως: $K=\frac{1}{2}mυ^2$.

Οπότε: $$\frac{1}{2}mυ^2 = cs \Rightarrow υ(s) = \sqrt{\frac{2cs}{m}} \qquad \textbf{(1)}$$

Αφού το σώμα κάνει κυκλική κίνηση η κεντρομόλος δύναμη είναι:

$$F_κ = mα_κ = m\frac{υ^2}{R} \overset{(1)}{=} \frac{2cs}{R}$$

ενώ η εφαπτομενική δύναμη είναι:

$$F_ε = mα_ε = m\frac{dυ}{dt} = m\frac{dυ}{ds}\frac{ds}{dt} = m\frac{dυ}{ds}υ \overset{(1)}{=} m\sqrt{\frac{2c}{m}}\frac{1}{2}s^{-1/2}\sqrt{\frac{2cs}{m}} =$$

$$= \frac{m}{2}\frac{2c}{m} = c$$

Άρα το μέτρο της ολικής δύναμης είναι:

$$F = \sqrt{F_κ^2 + F_ε^2} = \sqrt{\frac{4c^2s^2}{R^2} + c^2} \Rightarrow F = c\sqrt{\frac{4s^2}{R^2} + 1}$$

β) Είναι:

$$\upsilon(s)=\frac{ds}{dt}\overset{(1)}{\Rightarrow}\frac{ds}{dt}=\sqrt{\frac{2cs}{m}}\Rightarrow\int_0^s\frac{ds}{\sqrt{s}}=\sqrt{\frac{2c}{m}}\int_0^t dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{s}=\sqrt{\frac{2c}{m}}\,t\Rightarrow s(t)=\frac{c}{2m}t^2$$

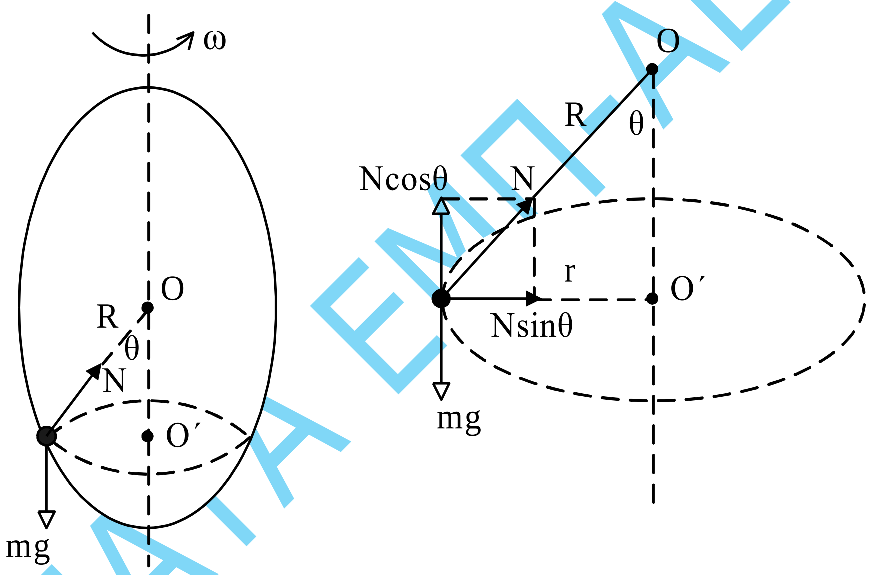
και $\upsilon(t)=\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{c}{2m}2t\Rightarrow\upsilon(t)=\dfrac{c}{m}t$

Θέμα 11

Μια χάντρα έχει περαστεί σ' ένα κατακόρυφο συρμάτινο στεφάνι ακτίνας R χωρίς τριβές. Το στεφάνι περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο του. Να βρείτε σαν συνάρτηση της μάζας m της χάντρας, της ακτίνας R και της περιόδου περιστροφής του στεφανιού Τ :
α) την κάθετη δύναμη Ν που ασκείται στη χάντρα από το στεφάνι,
β) τη γωνία μεταξύ της κάθετης δύναμης και του άξονα περιστροφής.

(Τμήμα Χημείας Ε.Κ.ΠΑ..)

Λύση



α) Οι δυνάμεις που ασκούνται στη χάντρα είναι το βάρος της mg και η κάθετη αντίδραση Ν από το στεφάνι, η οποία αναλύεται στις συνιστώσες Nsinθ και Ncosθ.
Λόγω της περιστροφής του στεφανιού η χάντρα διαγράφει κυκλική τροχιά με ακτίνα r και κέντρο το Ο΄. Η συνιστώσα Nsinθ παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης οποτε ισχύει:

$$F_\kappa = m\alpha_\kappa \Rightarrow N\sin\theta = m\omega^2 r \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά: $r = R\sin\theta$ και $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ οπότε η **(1)** γίνεται:

$$N\sin\theta = m\frac{4\pi^2}{T^2}R\sin\theta \Rightarrow N = \frac{4\pi^2 mR}{T^2} \qquad \textbf{(2)}$$

β) Επειδή η χάντρα δεν κινείται κατά μήκος της περιφέρειας της στεφάνης ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N\cos\theta - mg = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{mg}{N} \overset{(2)}{\Rightarrow} \cos\theta = \frac{T^2 g}{4\pi^2 R}$$

Δηλαδή: $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{T^2 g}{4\pi^2 R}\right)$