ΔΙΑΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

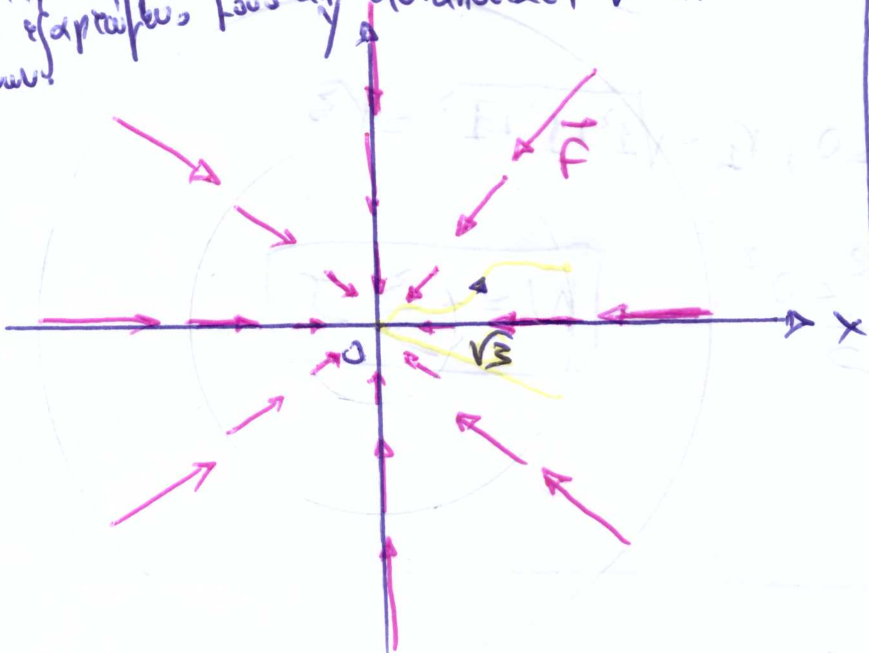
Άσκηση 3.1. (Κυλάφης).

$$\vec F(r) = \underbrace{-kr}_{= f(r)}\,\hat r \quad , \text{όπου } k = 1\,\frac{N}{m}$$

πεδίο δυνάμεων: διανυσματική εξίσωση όπου για κάθε (x,y,z) μας δίνει τη δύναμη $\vec F$ σε κάθε σημείο.

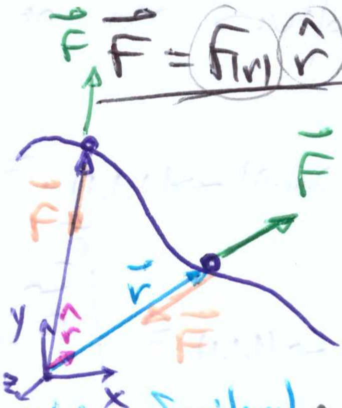
Για $k = 1\,\frac{N}{m}$ είναι: $\vec F(r) = -r\hat r = -\vec r$

δηλ. η δύναμη είναι κεντρική (ελκτική γιατί $f(r)<0$) με μέτρο εξαρτώμενο μόνο απ' την απόσταση r απ' την αρχή των αξόνων.



Κεντρικές δυνάμεις

$$\vec F = f(r)\,\hat r$$



O (κέντρο δυνάμεων).

Κάθε κεντρική δύναμη έχει τη διεύθυνση του $\vec r$ και φορά σύμφωνα με το πρόσημο της $f(r)$. Δηλαδή

- αν $f(r) > 0$ απωστικές
- αν $f(r) < 0$ ελκτικές

A) Για να είναι το πεδίο διατηρητικό πρέπει να είναι αστρόβιλο δηλαδή: $\vec\nabla \times \vec F = 0$. Επειδή: $\vec F(x,y,z) = -(x\vec i + y\vec j + z\vec k)$

Είναι:
$$\vec\nabla \times \vec F = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -x & -y & -z \end{vmatrix} = \vec i(0-0) - \vec j(0-0) + \vec k(0-0) \to$$

$\to \vec\nabla \times \vec F = 0$ δηλ. το πεδίο είναι διατηρητικό.

Από το σχήμα και μόνο βλέπουμε ότι αν ένα υλικό σημείο βρεθεί μέσα στο πεδίο δυνάμεων δεν τείνει να περιστραφεί και επομένως το πεδίο είναι αστρόβιλο άρα και διατηρητικό.

$\hat{r}\cdot\hat{r} = \cancel{|\hat{r}|}\,\cancel{|\hat{r}|}\,\cancel{\cos 0} = 1$

β) $W_{(0,0,0)\to(1,1,1)} = ?$

$$W_{(0,0,0)\to(1,1,1)} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} r\hat{r}\cdot dr\,\hat{r} \overset{\hat{r}\cdot\hat{r}=1}{=} -\int_{r_0}^{r_1} r\,dr =$$

$$= -\frac{r^2}{2}\Big|_{r_0}^{r_1} = -\frac{r_1^2-r_0^2}{2}$$

όπου $r_0=\sqrt{0^2+0^2+0^2}=0$, $r_1=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

$$\to W = -\frac{(\sqrt{3})^2-0^2}{2} \to \boxed{W=-\frac{3}{2}\,J}$$

$$\vec{r} = r\hat{r} \to d\vec{r} = dr\,\hat{r}$$

Έργο δύναμης:

$$W = \int_{\vec{r}_{αρχ}(x_1,y_1,z_1)}^{\vec{r}_{τελ}(x_2,y_2,z_2)} \vec{F}\cdot d\vec{r} =$$

αν $\vec{F} = F(r)\hat{r}$ (κεντρική): $\displaystyle = \int F(r)\,\hat{r}\cdot dr\,\hat{r} \overset{\hat{r}\cdot\hat{r}=1}{=} \int_{r_1}^{r_2} F(r)\,dr$

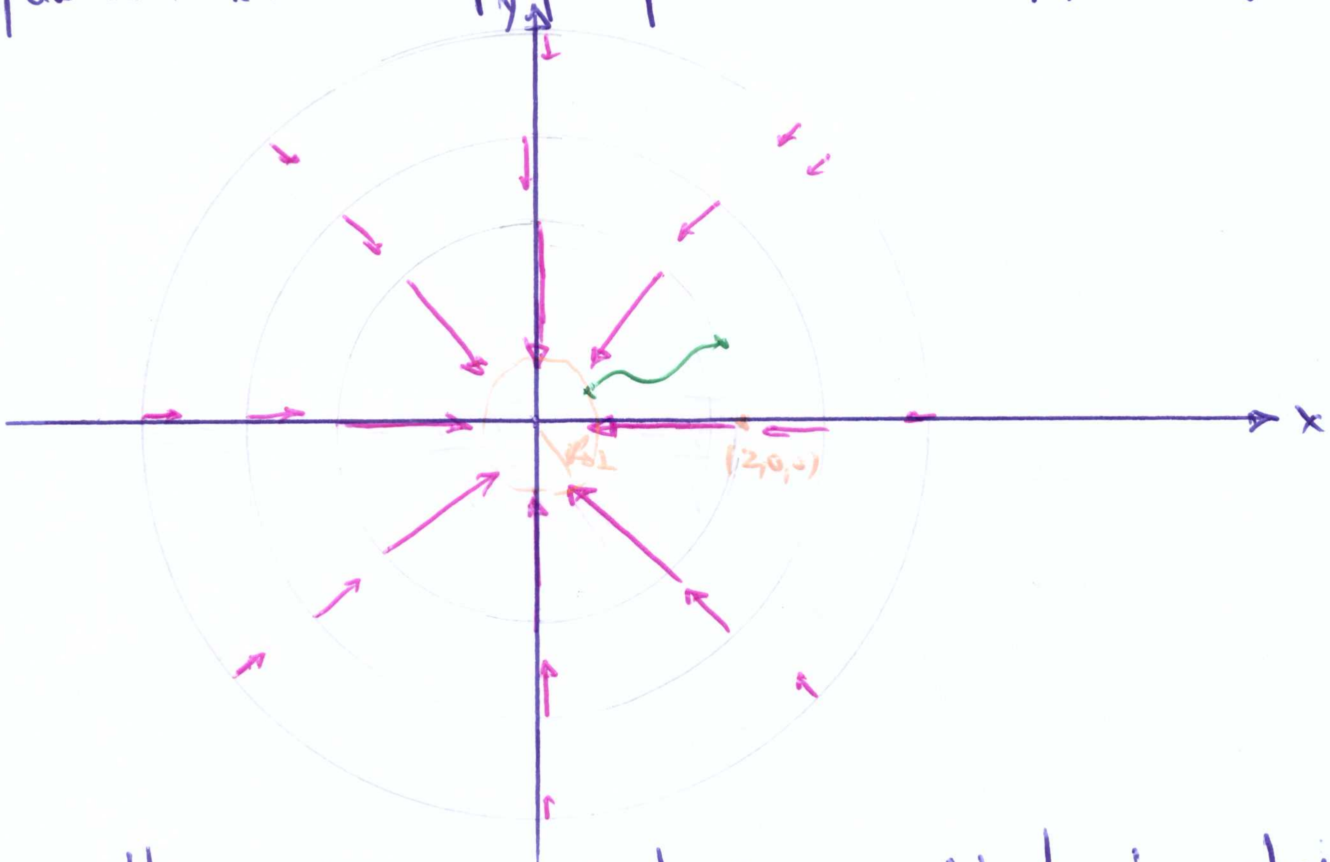
αν $\vec{F} = F_x\hat{x}+F_y\hat{y}+F_z\hat{z}$: $\displaystyle = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} (F_x\hat{x}+F_y\hat{y}+F_z\hat{z})\cdot(dx\,\hat{x}+dy\,\hat{y}+dz\,\hat{z}) =$

$$= \int F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

Άσκηση 3.3 (Κυλάφης)

$$\vec F(r) = -G\frac{Mm}{r^2}\hat r \qquad GMm = 1$$

Είναι: $\vec F(r) = -\frac{\hat r}{r^2}$ κεντρική ελκτική δύναμη με το μέτρο της να μειώνεται καθώς απομακρυνόμαστε απ' την αρχή των αξόνων.



A) Από το σχήμα και μόνο παρατηρούμε ότι αν αφήσουμε ένα υλικό σημείο μέσα στο πεδίο αυτό δεν τείνει να περιστραφεί (στροβιλιστεί) κι επομένως είναι αστρόβιλο άρα και διατηρητικό.

B) $W_{(0,0,1)\to(2,0,0)} = ?$

$$W = \int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec F \cdot d\vec r = \int_{\vec r_1}^{\vec r_2} -\frac{\hat r}{r^2}\cdot dr\,\hat r \overset{\hat r\cdot\hat r = 1}{=} -\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = -\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \quad (1)$$

όπου $r_1 = \sqrt{0^2+0^2+1^2} = 1$, $r_2 = \sqrt{2^2+0^2+0^2} = 2$ (2)

Οπότε: $(1) \overset{(2)}{\leadsto} W_{(0,0,1)\to(2,0,0)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1} = -\frac{1}{2}\,J.$

Homework: Άσκ. 3.5.