ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778

www.pmoiras.weebly.com

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ

1. Δείκτης διάθλασης - Διασκεδασμός

Η θεμελιώδης εξίσωση που συνδέει τις ιδιότητες της πηγής (συχνότητα κύματος ν) με τις ιδιότητες του μέσου (ταχύτητα διάδοσης κύματος υ) εκφράζονται από τη σχέση:

$$\upsilon=\lambda\nu \qquad \textbf{(1–1)}$$

Η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος είναι χαρακτηριστικό μέγεθος του μέσου. Έτσι η ταχύτητα του φωτός στο κενό έχει πάντα την τιμή c και είναι ανεξάρτητη της συχνότητάς του, ενώ μέσα στην ύλη η ταχύτητα του φωτός είναι μικρότερη από την τιμή c και εξαρτάται από τη συχνότητά του.

Κατά την μετάβαση μιας φωτεινής ακτίνας από ένα οπτικό μέσο σε άλλο (π.χ. από το κενό στο νερό) η συχνότητα παραμένει αμετάβλητη, αφού εξαρτάται από την πηγή που παράγει το κύμα αυτό και επειδή ο αριθμός των κυμάτων που προσπίπτουν στη διαχωριστική επιφάνεια μέσα σε κάποιο χρόνο πρέπει να είναι ίσος με τον αριθμό των κυμάτων που διέρχονται.

Το **μήκος κύματος λ** εκφράζει την απόσταση που διανύει το κύμα σε χρόνο ίσο με την περίοδο Τ του κύματος και από την **(1–1)** εξάγεται εύκολα το συμπέρασμα ότι ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα έχει διαφορετικά μήκη κύματος σε διαφορετικά μέσα διάδοσης, αφού η συχνότητά του σε αυτά παραμένει σταθερή και η ταχύτητά του μεταβάλλεται.

Επομένως εφαρμόζοντας την **(1–1)** για μια φωτεινή ακτίνα που διαδίδεται στο κενό $c = \lambda_o\nu$ και σε ένα άλλο οπτικό μέσο $\upsilon = \lambda\nu$ προκύπτει:

$$\frac{c}{\upsilon}=\frac{\lambda_o}{\lambda} \qquad \textbf{(1–2)}$$

Ο λόγος της ταχύτητας του φωτός c στο κενό προς την ταχύτητά του υ μέσα σε ένα υλικό ονομάζεται **δείκτης διάθλασης n** ενός οπτικού υλικού. Δηλαδή:

$$\boxed{n=\frac{c}{\upsilon}} \qquad \textbf{(1–3)}$$

🗐 Παρατηρήσεις

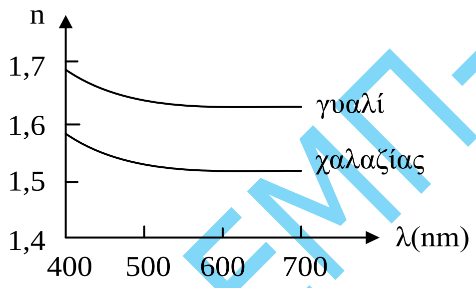
1) Ο δείκτης διάθλασης ενός οπτικού υλικού είναι ένα αδιάστατο μέγεθος και είναι πάντα μεγαλύτερο της μονάδας ($n > 1$), αφού η ταχύτητα του φωτός μέσα σε ένα υλικό είναι πάντα μικρότερη από την ταχύτητά του στο κενό.
Για το κενό είναι $n = 1$.

2) Όταν θα αναφέρεται ο αέρας ως μέσο διάδοσης θα λαμβάνεται ότι ο δείκτης διάθλασης του είναι $n = 1$, δηλαδή ως κενό.

3) Συνδυάζοντας τις **(1-2)** και **(1-3)** προκύπτει η εξάρτηση του δείκτη διάθλασης ενός οπτικού μέσου από το μήκος κύματος:

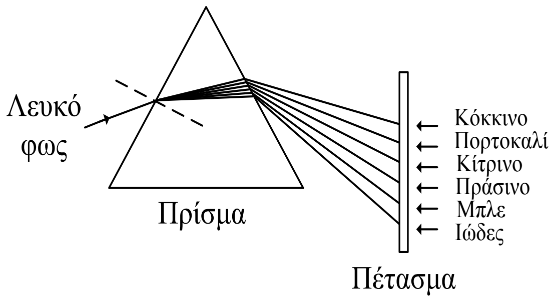
$$n = \frac{\lambda_o}{\lambda} \qquad \textbf{(1–4)}$$

Δηλαδή το μήκος κύματος λ του φωτός σε ένα υλικό είναι μικρότερο από το μήκος κύματος λ_o του ίδιου φωτός στο κενό.
Όταν δυο φωτεινές ακτίνες διαφορετικών συχνοτήτων άρα και μηκών κύματος στο κενό διαδίδονται σε ένα οπτικό υλικό, αποδεικνύεται πειραματικά ότι το υλικό δεν παρουσιάζει τον ίδιο δείκτη διάθλασης για τις δυο ακτίνες.
Συγκεκριμένα ο δείκτης διάθλασης ενός οπτικού μέσου είναι αντιστρόφως ανάλογος του μήκους κύματος κι επομένως όσο αυξάνεται το μήκος κύματος η τιμή του n μειώνεται. Το φαινόμενο της εξάρτησης της ταχύτητας του φωτός σε ένα οπτικό υλικό και του δείκτη διάθλασης του υλικού από το μήκος κύματος του φωτός λέγεται **διασκεδασμός**.
Στο ακόλουθο σχήμα δείχνεται η μεταβολή του δείκτη διάθλασης με το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας για δύο διαφορετικά υλικά (γυαλί, χαλαζίας).



Σχήμα 1.1

Λόγω του διασκεδασμού, μια δέσμη λευκού φωτός (το οποίο δεν είναι μονοχρωματικό, δηλαδή δεν έχει μία μόνο συχνότητα αλλά αποτελεί μίγμα όλων των χρωμάτων και έχει πολλές συχνότητες) καθώς προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια δύο υλικών (π.χ. ένα πρίσμα) θα αναλυθεί σε πολλές δέσμες κατά διάφορες διευθύνσεις. Αυτό οφείλεται στο ότι για κάθε μήκος κύματος (χρώμα) ο δείκτης διάθλασης του υλικού του πρίσματος είναι διαφορετικός και συνεπώς κάθε χρωματική ακτίνα του λευκού φωτός θα εκτραπεί διαφορετικά. Αν τέλος όλες αυτές οι ακτίνες προσπέσουν σε λευκό πέταμα δίνουν μία έγχρωμη ταινία που ονομάζεται **φάσμα του λευκού φωτός** και περιλαμβάνει όλα τα χρώματα που αντιστοιχούν στα μήκη κύματος του ορατού φάσματος από το ερυθρό (700nm) έως το ιώδες (400nm).
Στη συνέχεια δίνεται η σχηματική απεικόνιση του διασκεδασμού του λευκού φωτός που προκαλείται από ένα πρίσμα.



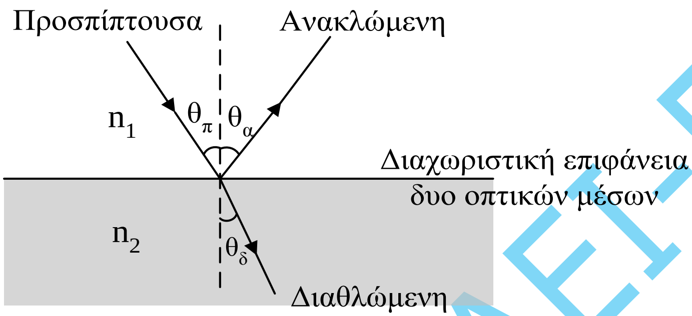
Σχήμα 1.2

Παρατήρηση

Στα επόμενα όταν θα δίνεται ο δείκτης διάθλασης κάποιου υλικού θα αναφέρεται πάντα σε μονοχρωματικό φως ενός συγκεκριμένου μήκους κύματος και συχνότητας.

2. Ανάκλαση – Διάθλαση

Όταν μία φωτεινή ακτίνα προσπίπτει στην επιφάνεια που διαχωρίζει δυο οπτικά μέσα (με δείκτες διάθλασης n_1 και n_2) παρατηρείται ότι αυτή εν μέρει ανακλάται και εν μέρει διαθλάται, δηλαδή διαδίδεται στο δεύτερο μέσο με ταυτόχρονη αλλαγή της διεύθυνσής της.



Σχήμα 1.3

Επομένως κατά την διέλευση μιας ακτίνας από ένα μέσο σε ένα άλλο παρατηρούνται τα φαινόμενα της ανάκλασης και της διάθλασης αυτής. Πειραματικές μελέτες για τις κατευθύνσεις της προσπίπτουσας, ανακλώμενης και διαθλώμενης ακτίνας στην διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ δυο οπτικών μέσων οδηγούν στα ακόλουθα συμπεράσματα:

1) Το επίπεδο που ορίζεται από την προσπίπτουσα, την ανακλώμενη και τη διαθλώμενη ακτίνα είναι κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια, δηλαδή όλες κείνται στο ίδιο επίπεδο στο οποίο κείται και η κάθετος προς την διαχωριστική επιφάνεια.

2) Η γωνία ανάκλασης θ_α είναι ίση με τη γωνία πρόσπτωσης θ_π για όλα τα μήκη κύματος και για οποιοδήποτε ζεύγος υλικών με κοινή διαχωριστική επιφάνεια. Δηλαδή:

$$\boxed{\theta_\alpha = \theta_\pi} \qquad \textbf{(1–5)}$$

Η σχέση αυτή, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η προσπίπτουσα, η ανακλώμενη ακτίνα και η κάθετος στη διαχωριστική επιφάνεια κείνται όλες στο ίδιο επίπεδο, αποτελεί το **νόμο της ανάκλασης**.

3) Για μονοχρωματικό φως και για ένα συγκεκριμένο ζεύγος οπτικών μέσων εκατέρωθεν της κοινής διαχωριστικής επιφάνειας, οι γωνίες πρόσπτωσης θ_π και διάθλασης θ_δ συνδέονται με τους δείκτες διάθλασης n_1 και n_2 των δύο μέσων μέσω της σχέσης :

$$\boxed{n_1 \sin\theta_\pi = n_2 \sin\theta_\delta} \qquad \textbf{(1–6)}$$

Η παραπάνω σχέση, η οποία καθορίζει τις διευθύνσεις της προσπίπτουσας και διαθλώμενης ακτίνας, σε συνδυασμό με το ότι αυτές και η κάθετος στην διαχωριστική επιφάνεια κείνται όλες στο ίδιο επίπεδο, αποτελεί το **νόμο της διάθλασης** ή **νόμο του Snell**.

Παρατηρήσεις

1) Προσέξτε ότι όλες οι γωνίες (θ_π, θ_α και θ_δ) ορίζονται ως προς την κάθετη στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων.

2) Το φαινόμενο της διάθλασης του φωτός συναντάται συχνά στην καθημερινή μας ζωή, όπως για παράδειγμα το μολύβι μέσα σε ένα ποτήρι νερό που φαίνεται σπασμένο ή ο πυθμένας της θάλασσας που φαίνεται ψηλότερα από ότι είναι στην πραγματικότητα.

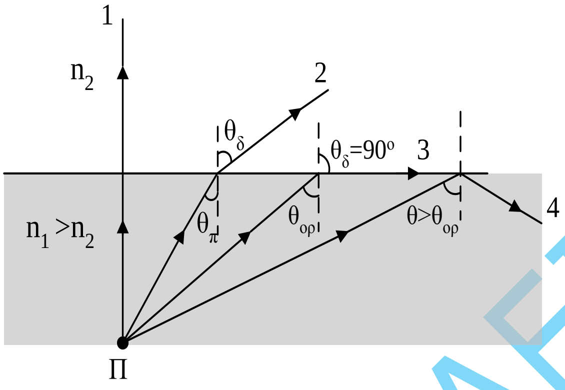
3) Σύμφωνα με το νόμο του Snell **(1–6)** όταν μία ακτίνα μεταβαίνει από ένα οπτικά αραιότερο σε ένα οπτικά πυκνότερο μέσο, δηλαδή όταν $n_1<n_2$ (π.χ. από αέρα σε γυαλί) ισχύει ότι:

$$n_1 \sin\theta_\pi = n_2 \sin\theta_\delta \Rightarrow \sin\theta_\delta = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_\pi$$

Κι επειδή $n_1/n_2<1$ (αφού $n_1 < n_2$) είναι $\sin\theta_\delta < \sin\theta_\pi$ ή $\theta_\delta < \theta_\pi$.
Δηλαδή τότε η γωνία διάθλασης είναι μικρότερη της γωνίας πρόσπτωσης και επομένως η διαθλώμενη ακτίνα κάμπτεται και συγκλίνει προς την κάθετη της διαχωριστικής επιφάνειας.
Αντίθετα όταν η ακτίνα διαδίδεται από οπτικώς πυκνότερο σε οπτικώς αραιότερο μέσο, δηλαδή αν $n_1>n_2$ (π.χ. από γυαλί σε αέρα) τότε από το νόμο του Snell ομοίως προκύπτει ότι επειδή $n_1/n_2>1$ είναι $\sin\theta_\delta > \sin\theta_\pi$ και $\theta_\delta > \theta_\pi$. Δηλαδή η διαθλώμενη ακτίνα κάμπτεται και αποκλίνει από την κάθετο.
Τέλος όταν η προσπίπτουσα ακτίνα είναι κάθετη προς τη διαχωριστική επιφάνεια, δηλαδή όταν $\theta_\pi=0$ είναι $\sin\theta_\pi = 0$ και ο νόμος του Snell δίνει $\sin\theta_\delta = 0$ ή αλλιώς $\theta_\delta = 0$. Δηλαδή η διαθλώμενη ακτίνα δεν κάμπτεται καθόλου.

Όλα τα παραπάνω συμπεράσματα βασίζονται στη **αρχή της αντιστρεπτής πορείας του φωτός**, σύμφωνα με την οποία η διαδρομή μιας φωτεινής ακτίνας που διαδίδεται σε διάφορα οπτικά μέσα δεν μεταβάλλεται αν αλλάξει η φορά της διάδοσης του φωτός.

3. Ολική Εσωτερική Ανάκλαση



Σχήμα 1.4

Έστω μια φωτεινή πηγή Π που βρίσκεται σε ένα μέσο με δείκτη διάθλασης n_1 και οι φωτεινές ακτίνες προσπίπτουν στη διαχωριστική επιφάνεια με ένα άλλο μέσο δείκτη διάθλασης n_2, όπου $n_1 > n_2$.

Όπως αποδείχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο επειδή κάθε ακτίνα διαδίδεται από οπτικώς πυκνότερο σε οπτικώς αραιότερο μέσο, οι διαθλώμενες ακτίνες τείνουν να απομακρύνονται από την κάθετο.

Επομένως πρέπει να υπάρχει μία γωνία πρόσπτωσης για την οποία η διαθλώμενη ακτίνα να αναδύεται εφαπτομενικά προς τη διαχωριστική επιφάνεια (ακτίνα 3 του σχήματος). Η γωνία αυτή ονομάζεται **κρίσιμη** ή **οριακή γωνία θ_{op}** και αντιστοιχεί σε γωνία διάθλασης $\theta_\delta = 90^o$. Έτσι μέσω του νόμου του Snell μπορεί να υπολογιστεί αυτή εύκολα:

$$n_1 \sin\theta_{op} = n_2 \sin 90^o \Rightarrow \sin\theta_{op} = \frac{n_2}{n_1} \qquad \textbf{(1–7)}$$

Παρατηρείται ότι η τιμή της οριακής γωνίας εξαρτάται από τους δείκτες διάθλασης των δύο μέσων.

Συνεπώς για γωνίες πρόσπτωσης μεγαλύτερες της θ_{op} η ακτίνα δεν μπορεί να εισχωρήσει στο δεύτερο μέσο, αλλά παγιδεύεται στο πρώτο μέσο και ανακλάται εξ ολοκλήρου εσωτερικά στη διαχωριστική επιφάνεια , δηλαδή δεν υπάρχει διαθλώμενη ακτίνα αλλά μόνο ανακλώμενη. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **ολική εσωτερική ανάκλαση** και εκδηλώνεται μόνο στην περίπτωση που η ακτίνα προσπίπτει από οπτικώς πυκνότερο σε οπτικώς αραιότερο μέσο και μόνο όταν η γωνία πρόσπτωσης υπερβεί την τιμή της οριακής γωνίας. Το φαινόμενο αυτό βρίσκει εφαρμογή σε πολλά οπτικά όργανα που χρησιμοποιούν πρίσματα ολικής ανάκλασης (π.χ. κυάλια) και στη σύγχρονη τεχνολογία με την ανάπτυξη των οπτικών ινών , που είναι αγωγοί μεταφοράς σημάτων.

Μεθοδολογία

Σε προβλήματα Γεωμετρικής Οπτικής όπου γίνεται διάδοση ακτίνας φωτός μεταξύ δύο οπτικών μέσων θα πρέπει να προσεχθεί η οπτική πυκνότητα των μέσων. Έτσι αν η ακτίνα διαδίδεται από οπτικώς αραιότερο σε οπτικώς πυκνότερο μέσο πάντα θα εμφανίζεται διάθλαση της ακτίνας. Ενώ αν η διάδοση της ακτίνας γίνεται από οπτικώς πυκνότερο σε οπτικώς αραιότερο μέσο θα πρέπει να υπολογίζεται η οριακή γωνία για να ελέγχεται αν παρουσιάζεται το φαινόμενο της ολικής εσωτερικής ανάκλασης.

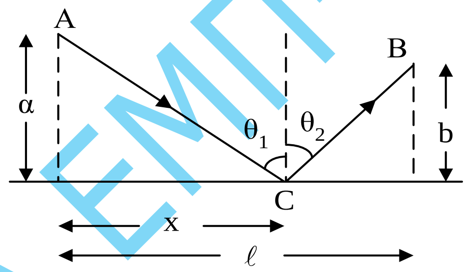
4. Αρχή του Fermat

Ο τρόπος με τον οποίο διαδίδεται το φως από ένα σημείο σε άλλο, καθώς και οι νόμοι της ανάκλασης και της διάθλασης μπορούν να μελετηθούν με τη βοήθεια της αρχής του Fermat. Η αρχή του Fermat διατυπώνεται ως εξής:

“Μια φωτεινή ακτίνα που διαδίδεται από ένα σημείο σε ένα άλλο, ακολουθεί, ανεξάρτητα από το μέσο που παρεμβάλλεται, εκείνη τη διαδρομή που αντιστοιχεί στον χρονικώς συντομότερο οπτικό δρόμο, δηλαδή ο οπτικός δρόμος είναι ελάχιστος.”

Η αρχή αυτή μπορεί να εφαρμοστεί για την απόδειξη των νόμων της ανάκλασης και της διάθλασης.

α) Νόμος της ανάκλασης



Σχήμα 1.5

Έστω η πορεία της ακτίνας του σχήματος, που ξεκινά από ένα σημείο A και αφού ανακλαστεί σε μία επίπεδη επιφάνεια στο σημείο C καταλήγει στο σημείο B.

Είναι φανερό ότι η συντομότερη πορεία της ακτίνας θα πρέπει να βρίσκεται σε ένα επίπεδο που περιέχει τα σημεία A, B, C και είναι κάθετο στην ανακλαστική επιφάνεια.

Η χρονική διάρκεια της διαδρομής AC είναι: $t_1 = \dfrac{AC}{\upsilon} = \dfrac{\sqrt{\alpha^2 + x^2}}{\upsilon}$

Ενώ της διαδρομής CB είναι : $t_2 = \dfrac{CB}{\upsilon} = \dfrac{\sqrt{b^2 + (\ell - x)^2}}{\upsilon}$

όπου α και b οι αντίστοιχες αποστάσεις των σημείων A και B από την ανακλαστική επιφάνεια και υ η ταχύτητα διάδοσης της ακτίνας, η οποία είναι ίδια καθόλη την πορεία της δέσμης ACB , αφού διαδίδεται στο ίδιο μέσο.

Άρα η χρονική διάρκεια της ολικής πορείας της ακτίνας ACB είναι:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{\alpha^2 + x^2}}{\upsilon} + \frac{\sqrt{b^2 + (\ell - x)^2}}{\upsilon}$$

Σύμφωνα όμως με την αρχή του Fermat η παραπάνω συνάρτηση t(x) θα πρέπει να είναι ελάχιστη. Δηλαδή πρέπει:

$$\frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\upsilon}\left[\frac{2x}{2\sqrt{\alpha^2 + x^2}} + \frac{2(\ell - x)(-1)}{2\sqrt{b^2 + (\ell - x)^2}}\right] = 0 \Rightarrow$$

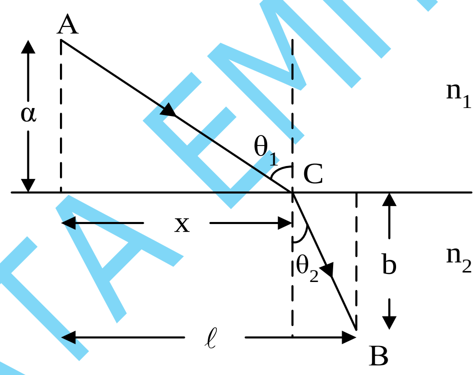
$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{\alpha^2 + x^2}} - \frac{\ell - x}{\sqrt{b^2 + (\ell - x^2)}} = 0$$

Η τελευταία σχέση εύκολα από το σχήμα ανάγεται τριγωνομετρικά στην :

$$\sin\theta_1 - \sin\theta_2 = 0 \Rightarrow \sin\theta_1 = \sin\theta_2 \Rightarrow \theta_1 = \theta_2$$

Δηλαδή προκύπτει ο γνωστός νόμος της ανάκλασης.

β) Νόμος της διάθλασης



Σχήμα 1.6

Έστω η πορεία της ακτίνας του σχήματος, που ξεκινά από ένα σημείο A και αφού διαθλαστεί στο σημείο C της διαχωριστικής επιφάνειας δύο οπτικών μέσων με δείκτες διάθλασης n_1 και n_2 καταλήγει στο σημείο B.
Είναι φανερό πάλι ότι η χρονικά συντομότερη διαδρομή θα πρέπει να βρίσκεται στο επίπεδο που περιέχει τα σημεία A,C,B και είναι κάθετο στη διαθλαστική επιφάνεια.
Η χρονική διάρκεια της διαδρομής AC είναι :

$$t_1 = \frac{AC}{\upsilon_1} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + x^2}}{\upsilon_1}$$

Ενώ της διαδρομής CB είναι:

$$t_2 = \frac{CB}{\upsilon_2} = \frac{\sqrt{b^2 + (\ell - x)^2}}{\upsilon_2}$$

όπου α και b οι αντίστοιχες αποστάσεις των σημείων A και B από τη διαθλαστική επιφάνεια και υ_1, υ_2 οι αντίστοιχες ταχύτητες διάδοσης της ακτίνας στα δύο μέσα.
Άρα η χρονική διάρκεια της ολικής πορείας της ακτίνας ACB είναι:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{\alpha^2 + x^2}}{\upsilon_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (\ell - x)^2}}{\upsilon_2}$$

Σύμφωνα όμως με την αρχή του Fermat η παραπάνω συνάρτηση t(x) θα πρέπει να είναι ελάχιστη. Δηλαδή πρέπει:

$$\frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\upsilon_1}\frac{x}{\sqrt{\alpha^2 + x^2}} - \frac{1}{\upsilon_2}\frac{\ell - x}{\sqrt{b^2 + (\ell - x)^2}} = 0$$

Με τη βοήθεια της τριγωνομετρίας του σχήματος η τελευταία εύκολα δίνει:

$$\frac{1}{\upsilon_1}\sin\theta_1 - \frac{1}{\upsilon_2}\sin\theta_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{\upsilon_1}\sin\theta_1 = \frac{1}{\upsilon_2}\sin\theta_2$$

Από τον ορισμό του δείκτη διάθλασης των δύο μέσων είναι :

$$n_1 = \frac{c}{\upsilon_1} \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{c}{n_1} \quad \text{και} \quad n_2 = \frac{c}{\upsilon_2} \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{c}{n_2}$$

Συνεπώς με αντικατάσταση αυτών στην προηγούμενη σχέση προκύπτει:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

Δηλαδή προκύπτει ο γνωστός νόμος της διάθλασης του Snell.