ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΣΥΝΘΗΚΗ ΚΒΑΝΤΩΣΗΣ SOMMERFELD-BOHR-WILSON

Η θεωρία του Bohr με τη συνθήκη κβάντωσης, ερμήνευσε τις κυκλικές τροχιές των ηλεκτρονίων γύρω από τον πυρήνα των υδρογονοειδών ατόμων.
Η αναζήτηση μιας γενικότερης συνθήκης, που θα ήταν εφαρμόσιμη και για διαφορετικού τύπου περιοδικές κινήσεις (όπως ελλειπτικές τροχιές ή απλές αρμονικές ταλαντώσεις) οδήγησε στην ακόλουθη **γενικευμένη συνθήκη κβάντωσης του Bohr** (Sommerfeld-Bohr-Wilson 1915-1916):

- **Επιτρεπόμενες** είναι μόνο εκείνες οι περιοδικές τροχιές που η δράση τους είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της σταθεράς του Planck h. Η δράση μιας περιοδικής τροχιάς είναι το φασικό ολοκλήρωμα $\oint \mathrm{pdq}$, όπου q είναι μια γενικευμένη συντεταγμένη της κίνησης και p η αντίστοιχη γενικευμένη ορμή.

Δηλαδή: $$\oint \mathrm{pdq} = \mathrm{nh}, \qquad \mathrm{n} = 1,2,\ldots$$

Για μια μονοδιάστατη ταλαντωτική κίνηση μέσα σε ένα δυναμικό V(x) τη γενικευμένη θέση q αποτελεί η θέση x και την αντίστοιχη γενικευμένη ορμή p η γραμμική ορμή.
Επίσης το ολοκλήρωμα της δράσης μπορούμε να το περιορίσουμε στο μισό της περιόδου, αφού στο άλλο μισό επαναλαμβάνεται η ίδια ακριβώς κίνηση χρονικά αντεστραμμένη.Δηλαδή:

$$\oint p_{(x)} dx = 2\int_{-x_o}^{x_o} p_{(x)} dx$$

όπου η ορμή εκφράζεται ως συνάρτηση της θέσης x από τη σχέση:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V_{(x)} \Rightarrow \ldots \Rightarrow p_{(x)} = \sqrt{2m}\sqrt{E - V_{(x)}}$$

και οι ακραίες θέσεις $\pm x_o$ χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι εκεί μηδενίζεται η ταχύτητα (σημεία αναστροφής κίνησης):

$$p = 0 \Rightarrow E = V_{(\pm x_o)}$$

Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε τις ενέργειες των δέσμιων καταστάσεων ενός μονοδιάστατου δυναμικού $V_{(x)}$.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Χρησιμοποιείστε τις συνθήκες κβάντωσης Bohr για να υπολογίσετε τις ενέργειες των δέσμιων καταστάσεων του δυναμικού:

$$V(x) = gx^4$$

Υπόδειξη: $\int_{-1}^{+1} dx\,\sqrt{1-x^{2k}} = \dfrac{k\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(1+\dfrac{1}{2k}\right)}{(1+k)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2k}\right)}$ όπου η συνάρτηση $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ και $\Gamma(1) = 1$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Χρησιμοποιείστε τις συνθήκες κβάντωσης Bohr για να υπολογίσετε τις ενέργειες των δέσμιων κατστάσεων του δυναμικού:

$$V(x) = V_0\left(\frac{x^2}{a^2}\right)^k$$

στο όριο των μεγάλων k. Σχολιάστε.

Υπόδειξη: $\int_{-1}^{+1} dx\,\sqrt{1-x^{2k}} = \dfrac{k\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(1+\dfrac{1}{2k}\right)}{(1+k)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2k}\right)}$ όπου η συνάρτηση $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ και $\Gamma(1) = 1$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Χρησιμοποιείστε τις συνθήκες κβάντωσης Bohr για να υπολογίσετε τις ενέργειες των δέσμιων καταστάσεων του μονοδιάστατου δυναμικού: $V(x) = -\dfrac{V_0}{\cosh^2 \lambda x}$ $V_0 > 0$.

Δίνεται ότι $\int_0^{x_0} dx \sqrt{\left(\dfrac{1}{\cosh^2(x)}\right) - \left(\dfrac{1}{\cosh^2(x_0)}\right)} = \dfrac{\pi}{2}\left(1 - \dfrac{1}{\cosh(x_0)}\right)$

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας