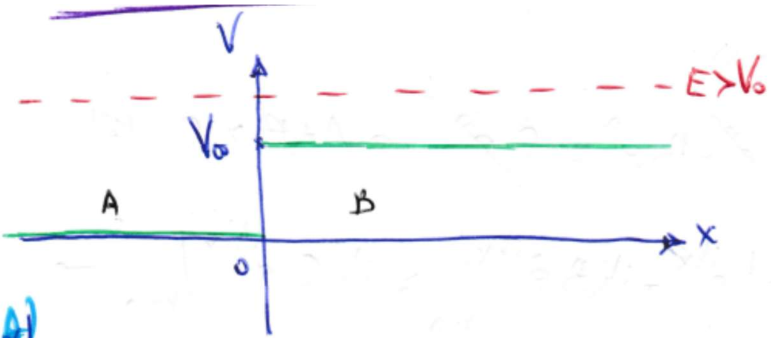
ΒΗΜΑ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ή ΣΚΑΛΟΠΑΤΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ ΜΗΚΟΥΣ



$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{για } x<0 \\ V_0, & \text{για } x>0 \end{cases}$$

α)

• **Αν $E>V_0$:**

Περιοχή Α: Για $x<0$ είναι $V(x)=0$ οπότε η εξίσ. Schrödinger είναι:

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E-\cancel{V(x)}^{\,0}\right)\psi_1 = 0 \rightarrow \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{k^2>0}\psi_1 = 0$$

Γεν. λύση: $\psi_1(x) = \underbrace{A e^{ikx}}_{\text{προσπίπτον}} + \underbrace{B e^{-ikx}}_{\text{ανακλώμενο}}$ (1)

Περιοχή Β: Για $x>0$ είναι $V(x)=V_0$ οπότε:

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E-V(x)\right)\psi_2 = 0 \rightarrow \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-V_0\right)}_{k'^2>0}\psi_2 = 0$$

(επειδή $E>V_0 \rightarrow E-V_0>0$)

Γεν. λύση: $\psi_2(x) = C e^{ik'x} + D e^{-ik'x}$

Επειδή δεν υπάρχει αίτιο ανάκλασης στην περιοχή Β είναι $D=0$.

Οπότε: $\psi_2(x) = \underbrace{C}_{\text{διαδ.}} e^{ik'x}$ ②

Β) Ρεύμα πυκνότητας πιθανότητας: $J = \frac{\hbar k}{m}|A|^2$ ← πλάτος; k ← κυματάριθμος περιοχής

Οπότε ο συντελεστής ανάκλασης είναι:

$$R = \frac{J_R}{J_I} = \frac{\frac{\hbar k}{m}|B|^2}{\frac{\hbar k}{m}|A|^2} \rightarrow R = \frac{|B|^2}{|A|^2} \quad (3)$$

και ο συντελεστής διάδοσης είναι:

$$T = \frac{J_T}{J_I} = \frac{\frac{\hbar k'}{m}|C|^2}{\frac{\hbar k}{m}|A|^2} \rightarrow T = \frac{k'}{k}\frac{|C|^2}{|A|^2} \quad (4)$$

Οριακές συνθήκες στο $x=0$:

$$\psi_1(x=0) = \psi_2(x=0) \xrightarrow{(1,2)} A\cancel{e^0}^{1} + B\cancel{e^0}^{1} = C\cancel{e^0}^{1} \rightarrow A+B=C \quad (5)$$

$$\left.\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right|_{x=0} \xrightarrow{(1,2)} \left. ikAe^{ikx} - ikBe^{-ikx}\right|_{x=0} = \left. ik'Ce^{ik'x}\right|_{x=0} \rightarrow$$

$$\rightarrow \cancel{i}kA\cancel{e^0}^{1} - \cancel{i}kB\cancel{e^0}^{1} = \cancel{i}k'C\cancel{e^0}^{1} \rightarrow kA - kB = k'C \xrightarrow{(5)}$$

$$\rightarrow kA - kB = k'(A+B) \rightarrow (k-k')A = (k+k')B \rightarrow \frac{B}{A} = \frac{k-k'}{k+k'} \quad (6)$$

και $(5) \rightarrow 1 + \frac{B}{A} = \frac{C}{A} \xrightarrow{(6)} \frac{C}{A} = 1 + \frac{k-k'}{k+k'} = \frac{k+\cancel{k'}+k-\cancel{k'}}{k+k'} \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{C}{A} = \frac{2k}{k+k'} \quad (7)$$

Άρα: $|3| \xrightarrow{(6)} R = \left(\dfrac{k-k'}{k+k'}\right)^2 = \left(\dfrac{\frac{\sqrt{2mE}}{\cancel{\hbar}} - \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\cancel{\hbar}}}{\frac{\sqrt{2mE}}{\cancel{\hbar}} + \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\cancel{\hbar}}}\right)^2 \rightarrow$

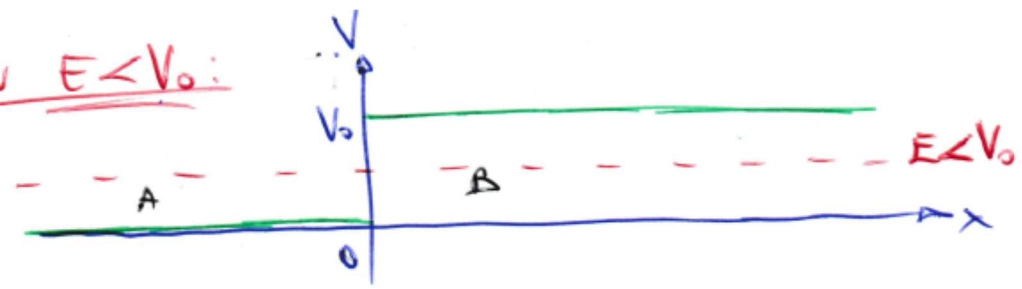
$$\rightarrow \boxed{R = \left(\frac{\sqrt{E}-\sqrt{E-V_0}}{\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0}}\right)^2}$$

και $|4| \xrightarrow{(7)} T = \dfrac{k'}{k}\left(\dfrac{2k}{k+k'}\right)^2 = \dfrac{k'}{\cancel{k}}\,\dfrac{4k^{\cancel{2}}}{(k+k')^2} \rightarrow T = \dfrac{4kk'}{(k+k')^2} =$

$$= \frac{4\,\frac{\sqrt{2mE}}{\cancel{\hbar}}\cdot\frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\cancel{\hbar}}}{\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\cancel{\hbar}} + \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\cancel{\hbar}}\right)^2} \rightarrow \boxed{T = \frac{4\sqrt{E}\cdot\sqrt{E-V_0}}{\left(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0}\right)^2}}$$

είναι: $R+T=1$.

• Αν $E<V_0$:



Περιοχή Α: Για $x<0$ είναι $V(x)=0$ οπότε: $k^2>0$

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-\cancel{V(x)})\psi_1=0 \to \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\,\psi_1=0$$

Γεν. Λύση: $\psi_1(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}$ (1)

Περιοχή Β: Για $x>0$ είναι $V(x)=V_0$ οπότε: $k'^2<0$

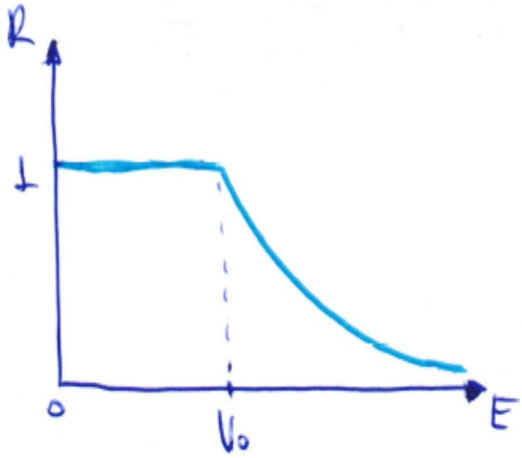
$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V(x))\psi_2=0 \to \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)\psi_2=0$$

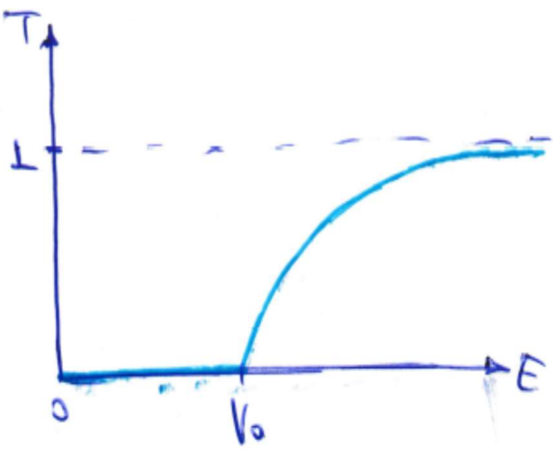
επειδή $E<V_0 \to E-V_0<0$

Επειδή $k'^2<0$ θεωρώ ως $k'=i\gamma \to k'^2=(i\gamma)^2=i^2\gamma^2=-\gamma^2$.
οπότε αντικαθιστούμε όπου $k'\to i\gamma$ στα τελικά αποτελέσματα της περίπτωσης (Α). Δηλαδή τώρα:

$$R=\left|\frac{k-i\gamma}{k+i\gamma}\right|^2=\frac{(k-i\gamma)(k+i\gamma)}{(k+i\gamma)(k-i\gamma)} \to \boxed{R=1}$$

και επειδή $R+T=1$ θα είναι $\boxed{T=0}$





Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ☎6932 946778
www.pmoiras.weebly.com