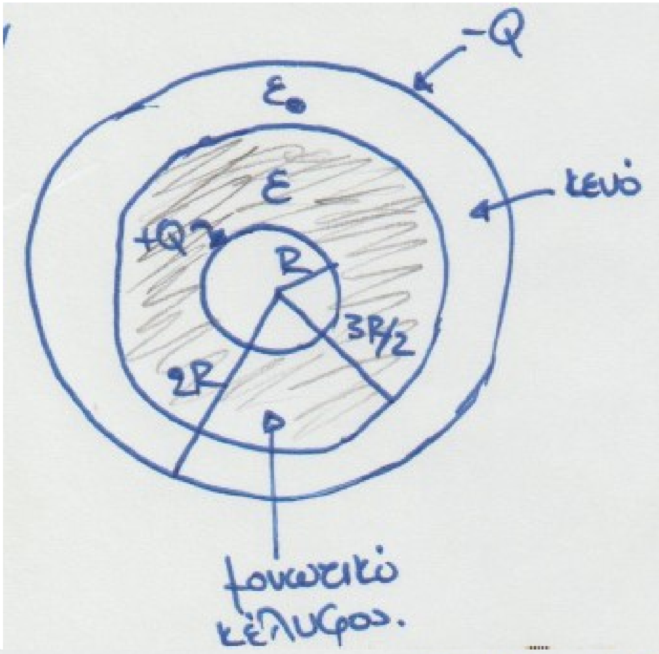
ΑΣΚΗΣΗ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΑΓΩΓΟΥ

Μεταλλική σφαίρα ακτίνας R περιβάλλεται από ομόκεντρο μονωτικό κέλυφος ακτίνων R και $3R/2$. Το σύστημα περιβάλλεται από ομόκεντρο μεταλλικό κέλυφος ακτίνας $2R$, αμελητέου πάχους. Πόση είναι η χωρητικότητα του συστήματος; Η διηλεκτρική σταθερά του μονωτικού κελύφους είναι ε.



Έστω ότι ο εσωτερικός οπλισμός φέρει φορτίο $+Q$ και ο εξωτερικός $-Q$, τα οποία είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα στις αντίστοιχες επιφάνειες.
Λόγω σφαιρικής συμμετρίας επιλέγοντας σφαιρική επιφάνεια κι εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι:

Για $R<r<3R/2$: $E_1 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$

και για $3R/2<r<2R$: $E_2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών είναι:

$$E = -\frac{dV}{dr} \rightarrow \int_{V_-}^{V_+} dV = -\int_{2R}^{R} E\,dr \rightarrow \Delta V = V_+ - V_- = \int_{R}^{2R} E\,dr =$$

$$= \int_{R}^{3R/2} E_1\,dr + \int_{3R/2}^{2R} E_2\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_{R}^{3R/2}\frac{dr}{r^2} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{3R/2}^{2R}\frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R} - \frac{2}{3R}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{3R} - \frac{1}{2R}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{3R} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{6R} \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta V = \frac{Q}{12\pi R}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon_0}\right) \quad (1)$$

Άρα η χωρητικότητα του συστήματος είναι:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \overset{(1)}{=} \frac{Q}{\frac{Q}{12\pi R}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon_0}\right)} \rightarrow \boxed{C = \frac{12\pi R}{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon_0}}}$$

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

EMC²

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com