ΑΣΚΗΣΗ: ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΙΔΩΛΩΝ

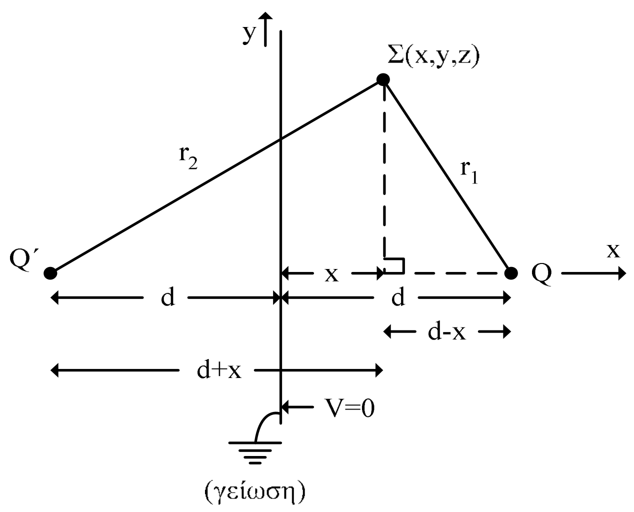
Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Φορτίο Q ευρίσκεται σε απόσταση d από άπειρη επίπεδη αγώγιμη και γειωμένη πλάκα (αμελητέου πάχους). Να υπολογιστούν:
α. Το ηλεκτρικό πεδίο και το δυναμικό σε όλο τον χώρο.
β. Η επαγόμενη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στην αγώγιμη επιφάνεια καθώς και το συνολικό φορτίο.
γ. Η δύναμη η οποία ασκείται στο φορτίο Q.

(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)

ΛΥΣΗ



α. Σύμφωνα με τη μέθοδο των ειδώλων το άπειρο αγώγιμο γειωμένο επίπεδο αντικαθίσταται από ένα φορτίο είδωλο $Q' = -Q$ συμμετρικά τοποθετημένο σε απόσταση d ως προς το επίπεδο.

Επομένως, ο υπολογισμός του δυναμικού και της έντασης ανάγεται στον υπολογισμό των μεγεθών αυτών, που οφείλονται στα σημειακά φορτία Q και Q'.

Έστω ένα τυχαίο σημείο Σ(x,y,z) του χώρου. Το δυναμικό στο σημείο Σ είναι:

$$V_\Sigma = V_Q + V_{Q'} = K\frac{Q}{r_1} + K\frac{Q'}{r_2} = K\frac{Q}{\sqrt{(d-x)^2+y^2+z^2}} + K\frac{(-Q)}{\sqrt{(d+x)^2+y^2+z^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V_\Sigma = KQ\left[\frac{1}{\sqrt{(d-x)^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(d+x)^2+y^2+z^2}}\right]} \quad \textbf{(1)}$$

Ενώ η ένταση στο σημείο Σ είναι:

$$\vec{E}_\Sigma = -\vec{\nabla} V_\Sigma = -\left(\frac{\partial V_\Sigma}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V_\Sigma}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V_\Sigma}{\partial z}\hat{z}\right) =$$

$$= -KQ\left[\left(\frac{-2(d-x)\cdot(-1)}{2\left[(d-x)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} - \frac{-2(d+x)}{2\left[(d+x)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}\right)\hat{x} + \right.$$

$$+\left(\frac{-2y}{2\left[(d-x)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} - \frac{-2y}{2\left[(d+x)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}\right)\hat{y} +$$

$$\left. +\left(\frac{-2z}{2\left[(d-x)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} - \frac{-2z}{2\left[(d+x)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}\right)\hat{z}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}_\Sigma = KQ\left[\left(\frac{-(d-x)}{\left[(d-x)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} - \frac{d+x}{\left[(d+x)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}\right)\hat{x} + \right.$$

$$+\left(\frac{y}{\left[(d-x)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} - \frac{y}{\left[(d+x)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}\right)\hat{y} +$$

$$\left. +\left(\frac{z}{\left[(d-x)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} - \frac{z}{\left[(d+x)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}\right)\hat{z}\right]$$

(2)

β. Ως γνωστόν σε κάθε σημείο πάνω στο αγώγιμο επίπεδο η ένταση είναι κάθετη και έχει μέτρο $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Άρα για $x = 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0$ η (2) γίνεται:

$$\vec{E} = KQ\left[\left(\frac{-d}{(d^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{d}{(d^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)\hat{x} + 0\,\hat{y} + 0\,\hat{z}\right] \Rightarrow \vec{E} = -\frac{Q\,2d}{4\pi\varepsilon_0\left(d^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\hat{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{-Qd}{2\pi\varepsilon_0\left(d^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\hat{x} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{x} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{-Qd}{2\pi\left(d^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}}\ \textbf{(3)}$$

Το ολικό φορτίο του αγώγιμου επιπέδου υπολογίζεται από την πυκνότητα φορτίου ως:

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} \Rightarrow dQ = \sigma\, dS \overset{(3)}{\Rightarrow} dQ = \frac{-Qd}{2\pi}\frac{dS}{\left(d^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

Αντικαθιστώντας σε πολικές συντεταγμένες $r=\sqrt{y^2+z^2}$, φ στο επίπεδο yz είναι:
$dS = r\,dr\,d\varphi$ με
$0<r<\infty$ και $0<\varphi<2\pi$.

Άρα:

$$\int_0^{Q_{o\lambda}} dQ = -\frac{Qd}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{r\,dr}{(d^2+r^2)^{3/2}}\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{-Qd}{2\pi}\left[-\frac{1}{\sqrt{d^2+r^2}}\right]_0^{\infty}[\varphi]_0^{2\pi} \Rightarrow Q_{o\lambda} = \frac{-Qd}{2\pi}\left(0+\frac{1}{d}\right)\cdot 2\pi \Rightarrow$$

$$\boxed{Q_{o\lambda} = -Q}$$

Δηλαδή το επαγόμενο φορτίο ισούται με –Q υποδηλώνοντας το βαθύτερο περιεχόμενο της μεθόδου των ειδώλων.

γ. Η ηλεκτροστατική δύναμη που ασκείται στο φορτίο Q οφείλεται στο φορτίο είδωλο Q' και σύμφωνα με το νόμο του Coulomb είναι:

$$\vec{F} = K\frac{QQ'}{(2d)^2}\hat{x} = K\frac{Q(-Q)}{4d^2}\hat{x} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\frac{KQ^2}{4d^2}\hat{x}}$$