ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 1

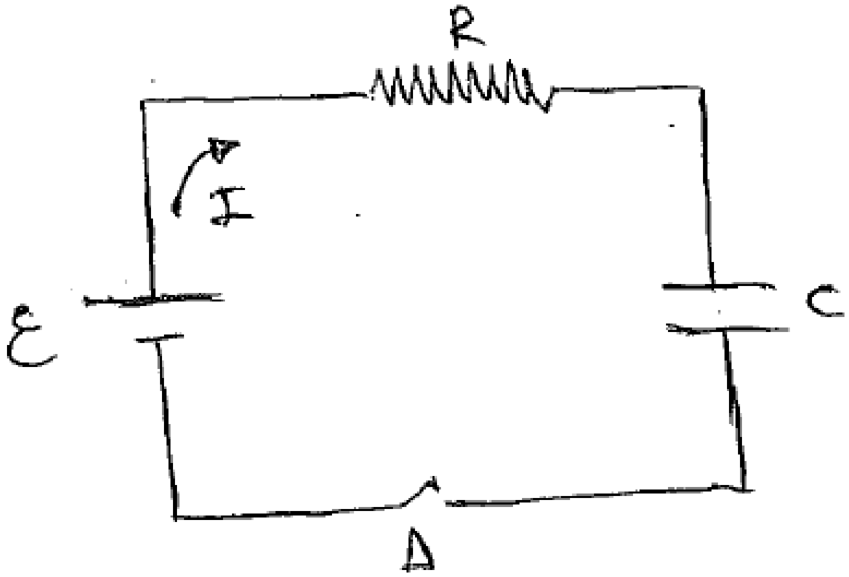
Ας θεωρήσομε τη φόρτιση πυκνωτή μέσω αντίστασης

Α) Σε σύγκριση με πυκνωτή χωρητικότητας C, πυκνωτής με χωρητικότητα $2C$ φορτίζεται γρηγορότερα ή αργότερα;

Β) Τι συμβαίνει στον χρόνο φόρτισης αν αντί αντίστασης R πάρομε $R/2$;

Γ) Πόσος χρόνος απαιτείται κατά τη φόρτιση πυκνωτή χωρητικότητας $C = 10\,\mu F$ μέσω αντίστασης $R = 10\ \Omega$ για να φθάσει το φορτίο του πυκνωτή α) στο 90%, β) στο 99%, γ) στο 99,9% της τελικής τιμής του;

ΛΥΣΗ



Σύμφωνα με την παράγραφο 5.4.1 του βιβλίου στη φόρτιση πυκνωτή μέσω αντίστασης, το φορτίο του πυκνωτή μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου σύμφωνα με τη σχέση:

$$q(t) = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-t/RC}\right) \qquad (1)$$

όπου $C\mathcal{E}$ είναι το μέγιστο φορτίο που αποκτά ο πυκνωτής.

Η σταθερά χρόνου $\tau = RC$ καθορίζει το πόσο γρήγορα φορτίζεται ο πυκνωτής.

Α) Επομένως ένας πυκνωτής με χωρητικότητα $2C$ έχει σταθερά χρόνου $\tau' = R2C = 2RC \rightarrow \tau' = 2\tau$, δηλαδή ο χρόνος φόρτισης αυξάνει κι έτσι φορτίζεται αργότερα από έναν πυκνωτή χωρητικότητας C.

Β) Αν αντί της αντίστασης R τοποθετηθεί $R/2$ τότε η σταθερά χρόνου του κυκλώματος γίνεται:

$$\tau'' = \frac{R}{2}C = \frac{1}{2}RC \rightarrow \tau'' = \frac{1}{2}\tau$$

δηλαδή ο χρόνος φόρτισης του πυκνωτή μειώνεται.

Γ) α) Για να φτάσει το φορτίο του πυκνωτή στο 90% της μέγιστης τιμής του σύμφωνα με την (1) είναι:

$$0{,}9C\mathcal{E} = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-t/RC}\right) \rightarrow 0{,}9 = 1 - e^{-t/RC} \rightarrow$$

$$\rightarrow e^{-t/RC} = 1 - 0{,}9 = 0{,}1 \rightarrow -\frac{t}{RC} = \ln 0{,}1 \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{t}{RC} = -2{,}3 \rightarrow t = 2{,}3RC = 2{,}3 \cdot 10\Omega \cdot 10 \cdot 10^{-6}F \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{t = 0{,}23 \cdot 10^{-3}\,\text{sec} \text{ ή } 0{,}23\,\text{msec}}$$

β/ Για $q = 0{,}99\,c\mathcal{E}$ η (1) δίνει:

$$0{,}99\,c\mathcal{E} = c\mathcal{E}\left(1 - e^{-t/RC}\right) \rightarrow 0{,}99 = 1 - e^{-t/RC} \rightarrow$$

$$\rightarrow e^{-t/RC} = 1 - 0{,}99 = 0{,}01 \rightarrow -\frac{t}{RC} = \ln 0{,}01 \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{t}{RC} = -4{,}6 \rightarrow t = 4{,}6\,RC = 4{,}6 \cdot 10\,\Omega \cdot 10 \cdot 10^{-6}\,F \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{t = 0{,}46 \cdot 10^{-3}\,\text{sec} \text{ ή } 0{,}46\,\text{msec}}$$

γ/ Για $q = 0{,}999\,c\mathcal{E}$ η (1) δίνει:

$$0{,}999\,c\mathcal{E} = c\mathcal{E}\left(1 - e^{-t/RC}\right) \rightarrow 0{,}999 = 1 - e^{-t/RC} \rightarrow$$

$$\rightarrow e^{-t/RC} = 1 - 0{,}999 = 0{,}001 \rightarrow -\frac{t}{RC} = \ln 0{,}001 \rightarrow$$

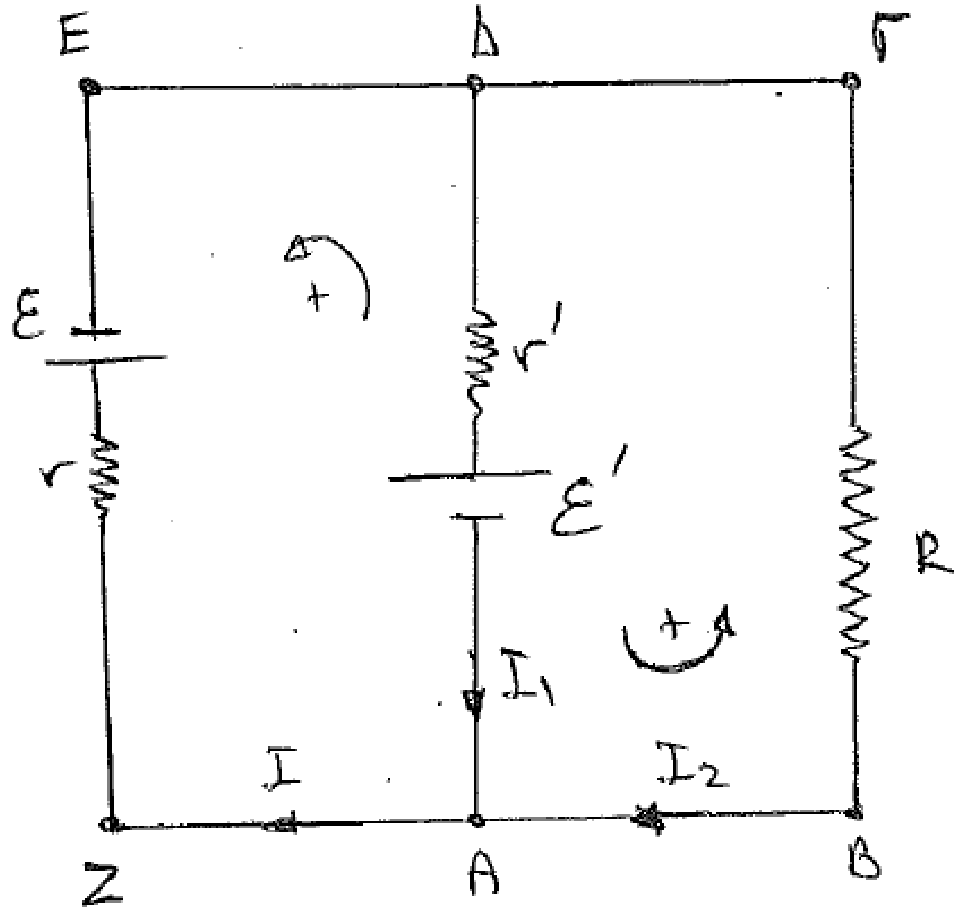
$$\rightarrow -\frac{t}{RC} = -6{,}9 \rightarrow t = 6{,}9\,RC = 6{,}9 \cdot 10\,\Omega \cdot 10 \cdot 10^{-6}\,F \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{t = 0{,}69 \cdot 10^{-3}\,\text{sec} \text{ ή } 0{,}69\,\text{msec}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να γραφούν οι νόμοι του Kirchhoff για το κύκλωμα και να βρεθούν τα ρεύματα I, I_1, I_2.

ΛΥΣΗ



Εφαρμόζοντας τον 1ο κανόνα του Kirchhoff στον κόμβο Α προκύπτει:

$$\Sigma I = 0 \rightarrow I_1 + I_2 = I \qquad (1)$$

Εφαρμόζουμε τον 2^o κανόνα του Kirchhoff στο βρόγχο ΑΔΕΖΑ : $\Sigma V = 0 \rightarrow \mathcal{E}' + I_1 r' + \mathcal{E} + I r = 0$ (2)

Ενώ στο βρόγχο ΑΒΓΔΑ δίνει:

$\Sigma V = 0 \rightarrow I_2 R - I_1 r' - \mathcal{E}' = 0$ (3)

Το σύστημα των τριών παραπάνω εξισώσεων γράφεται σε μορφή πινάκων ως :

$$\left.\begin{array}{l}(1) \rightsquigarrow -1 \cdot I + 1 \cdot I_1 + 1 \cdot I_2 = 0 \\ (2) \rightsquigarrow r \cdot I + r' I_1 + 0 \cdot I_2 = -(\mathcal{E} + \mathcal{E}') \\ (3) \rightsquigarrow 0 \cdot I - r' I_1 + R I_2 = \mathcal{E}'\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ r & r' & 0 \\ 0 & -r' & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\mathcal{E} + \mathcal{E}') \\ \mathcal{E}' \end{bmatrix}$$

και έχει λύση:

$$I = -\frac{(\mathcal{E}+\mathcal{E}')(R+r') - \mathcal{E}'r'}{r(R+r') + Rr'}$$

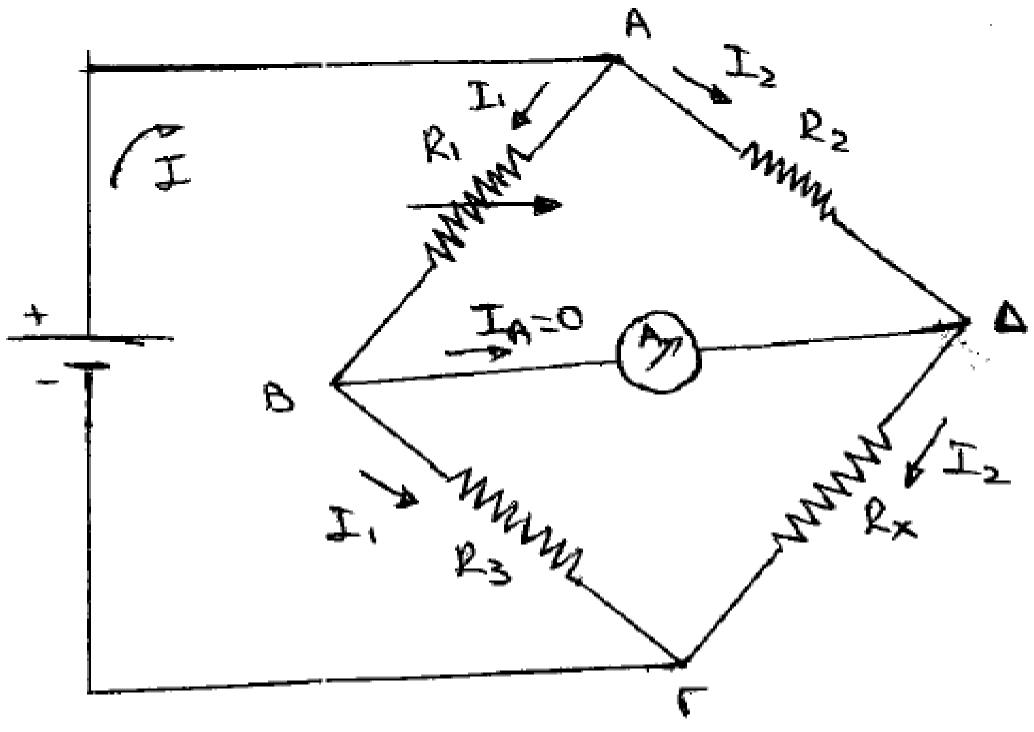
$$I_1 = -\frac{(\mathcal{E}+\mathcal{E}')R + \mathcal{E}'r}{r(R+r') + Rr'}$$

$$I_2 = -\frac{(\mathcal{E}+\mathcal{E}')r' - \mathcal{E}'(r+r')}{r(R+r') + Rr'}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Θεωρείστε ένα τετράγωνο πλαίσιο ΑΒΓΔ που περιέχει τέσσερις αντιστάσεις, μία σε κάθε πλευρά. Στην πλευρά ΑΒ υπάρχει μια <u>μεταβλητή</u> αλλά <u>βαθμονομημένη</u> αντίσταση R_1, δηλαδή το R_1 είναι μεταβλητό, αλλά κάθε φορά ξέρομε πόσο είναι. Στην πλευρά ΑΔ υπάρχει μια γνωστή αντίσταση R_2. Στην πλευρά ΒΓ υπάρχει μια γνωστή αντίσταση R_3. Στην πλευρά ΓΔ υπάρχει μια <u>άγνωστη</u> αντίσταση R_x. Η κορυφή Α είναι συνδεμένη με τον θετικό πόλο μιας μπαταρίας και η κορυφή Γ με τον αρνητικό της. Μεταξύ των κορυφών Β και Δ βάζομε ένα αμπερόμετρο, δηλαδή ένα όργανο που μετράει το διερχόμενο ρεύμα. Μεταβάλλοντας την αντίσταση R_1, επιτυγχάνομε κάποια στιγμή να μη διέρχεται ρεύμα από το αμπερόμετρο. Δείξτε ότι τότε ισχύει $R_x = (R_2 / R_1)R_3$. Αυτή η συσκευή λέγεται γέφυρα Wheatstone και χρησιμοποιείται για τη μέτρηση άγνωστων αντιστάσεων.

ΛΥΣΗ



Η αρχή λειτουργίας της γέφυρας Wheatstone είναι η εξής:
Μεταβάλλουμε τη μεταβλητή αντίσταση R_1 έως ότου το αμπερόμετρο δείξει μηδέν, δηλαδή έως ότου δεν θα διέρχεται πλέον ρεύμα από το B στο Δ. Τότε το δυναμικό του B ισούται με το δυναμικό του Δ και λέμε ότι η γέφυρα έχει ισορροπήσει.
Επίσης τότε η αντίσταση R_3 θα διαρρέεται από ρεύμα I_1 και η R_x από ρεύμα I_2.
Εφαρμόζουμε το 2° κανόνα του Kirchhoff στους βρόχους ΑΒΔΑ και ΒΓΔΒ οπότε προκύπτει:

ΑΒΔΑ: $\Sigma V = 0 \rightarrow -I_1R_1 + I_2R_2 = 0 \rightarrow I_1R_1 = I_2R_2 \quad (1)$

ΒΓΔΒ: $\Sigma V = 0 \rightarrow -I_1R_3 + I_2R_x = 0 \rightarrow I_1R_3 = I_2R_x \quad (2)$

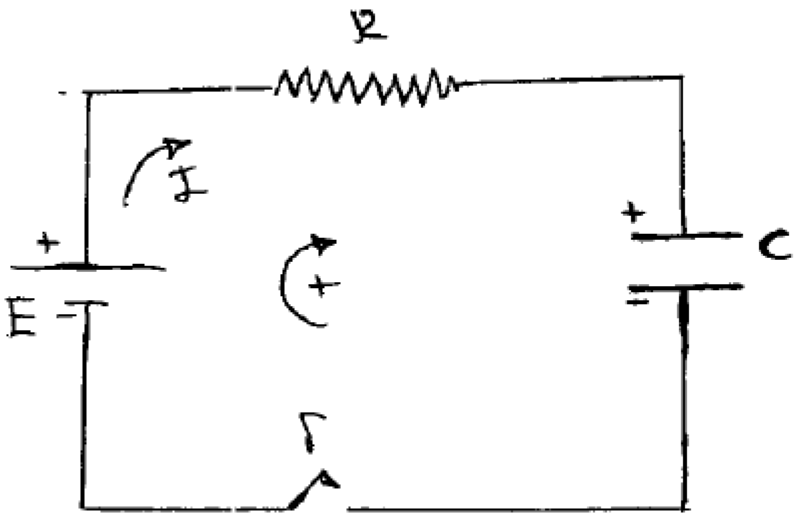
Διαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2) τελικά προκύπτει:

$$\frac{\cancel{I_1}R_1}{\cancel{I_1}R_3} = \frac{\cancel{I_2}R_2}{\cancel{I_2}R_x} \rightarrow \frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_x} \rightarrow \boxed{R_x = \frac{R_2R_3}{R_1}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Θεωρείστε την φόρτιση πυκνωτή χωρητικότητας C μέσω αντίστασης R με μπαταρία που έχει ΗΕΔ E . Πόσος χρόνος απαιτείται για να φορτιστεί ο πυκνωτής στο 99% της τελικής τιμής του φορτίου του;

ΛΥΣΗ



Σε τυχαία χρονική στιγμή t κλείνει ο διακόπτης δ του κυκλώματος, οπότε αυτό διαρρέεται από ρεύμα I.

Εφαρμόζοντας τον 2ο κανόνα του Kirchhoff προκύπτει:

$$\Sigma V = 0 \rightarrow E - IR - V_C = 0 \quad (1)$$

Απ' τον ορισμό της χωρητικότητας του πυκνωτή έχουμε:

$$C = \frac{Q}{V_C} \rightarrow V_C = \frac{Q}{C} \quad (2)$$

και η ένταση του ρεύματος είναι: $I = \frac{dQ}{dt}$ (3)

Οπότε η (1) λόγω των (2) και (3) δίνει:

$$E - R\frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \rightarrow E - \frac{Q}{C} = R\frac{dQ}{dt} \rightarrow CE - Q = RC\frac{dQ}{dt} \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_{0}^{Q} \frac{dQ}{CE-Q} = \frac{1}{RC}\int_{0}^{t} dt \rightarrow -\ln(CE-Q)\Big|_0^Q = \frac{1}{RC}\, t\Big|_0^t \rightarrow$$

(αρχικά αφόρτιστος πυκνωτής)

$$\rightarrow -\ln\left(\frac{CE-Q}{CE}\right) = \frac{t}{RC} \rightarrow \ln\left(\frac{CE-Q}{CE}\right) = -\frac{t}{RC} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{CE-Q}{CE} = e^{-t/RC} \rightarrow 1 - \frac{Q}{CE} = e^{-t/RC} \rightarrow \frac{Q}{CE} = 1 - e^{-t/RC} \rightarrow$$

$$\rightarrow Q(t) = CE\left(1 - e^{-t/RC}\right) \quad (4)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (4) η φόρτιση του πυκνωτή ακολουθεί μια εκθετική αύξηση με το χρόνο, με το φορτίο του να τείνει ασυμπτωτικά στη μέγιστη τιμή του $Q_{max} = CE$ που δύναται να αποθηκεύσει ο πυκνωτής.

Αν $t = t_1$ είναι ο χρόνος στον οποίο ο πυκνωτής έχει φορτιστεί με το 99% της τελικής τιμής του φορτίου του Q_{max} τότε για $t = t_1$ είναι $Q = 0{,}99\,Q_{max} = 0{,}99\,CE$.

Οπότε η (4) δίνει:

$$0{,}99\,\cancel{C\mathcal{E}} = \cancel{C\mathcal{E}}\left(1 - e^{-t_1/RC}\right) \rightarrow 0{,}99 = 1 - e^{-t_1/RC} \rightarrow$$

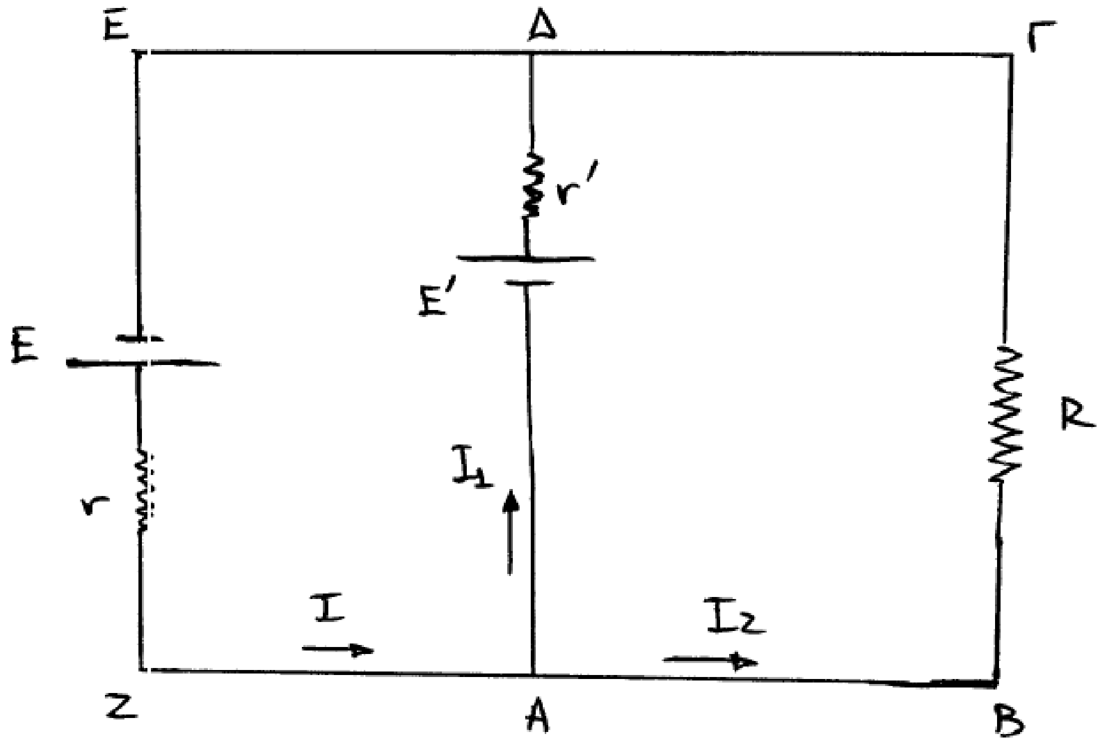
$$\rightarrow e^{-t_1/RC} = 1 - 0{,}99 \rightarrow e^{-t_1/RC} = 0{,}01 \rightarrow -\frac{t_1}{RC} = \ln 0{,}01 \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{t_1}{RC} = -4{,}6 \rightarrow \boxed{t_1 = 4{,}6\,RC}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος . Να γράψετε για όλους τους κόμβους την εξίσωση του νόμου των κόμβων και για όλους τους βρόχους την εξίσωση του νόμου των βρόχων. Θεωρήστε ως άγνωστες ποσότητες τις I_1, I_2 και E' και βρείτε τις.

ΛΥΣΗ



1^{ος} κανόνας Kirchhoff (νόμος κόμβων) :

Κόμβος Α : $\Sigma I = 0 \rightarrow I - I_1 - I_2 = 0 \rightarrow I = I_1 + I_2$ (1)

Κόμβος Δ : $\Sigma I = 0 \rightarrow I_1 + I_2 - I = 0 \rightarrow I = I_1 + I_2$ (2)

Παρατηρούμε ότι οι σχέσεις (1) και (2) ταυτοποιούνται γι' αυτό αρκεί να εφαρμόσουμε τον 1^ο νόμο σε ένα μόνο κόμβο.

2ος κανόνας Kirchhoff (νόμος βρόχων):

Βρόχος ΑΔΕΖΑ: $\Sigma V = 0 \rightarrow E' - I_1 r' + E - Ir = 0$ (3)

Βρόχος ΑΒΓΔΑ:

$\Sigma V = 0 \rightarrow -I_2 R + I_1 r' - E' = 0$ (4)

Βρόχος ΑΒΓΔΕΖΑ:

$\Sigma V = 0 \rightarrow -I_2 R + E - Ir = 0$ (5)

Θεωρώντας ως άγνωστες τις ποσότητες I_1, I_2 και E' η επίλυση των παραπάνω θα μας τις προσδιορίσει.

Η (1) δίνει: $I_1 = I - I_2$ (6)

Λύνοντας την (5) ως προς I_2 παίρνουμε:

$$I_2 R = E - Ir \rightarrow I_2 = \frac{E - Ir}{R} \quad (7)$$

Αντικαθιστώντας την (6) στην (4) προκύπτει:

$$-I_2R+(I-I_2)r'-E'=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -I_2(R+r')+Ir'-E'=0 \rightarrow I_2(R+r')=Ir'-E' \rightarrow$$

$$\rightarrow I_2=\frac{Ir'-E'}{R+r'} \qquad (8)$$

Εξισώνοντας τις (7) και (8) προκύπτει:

$$\frac{E-Ir}{R}=\frac{Ir'-E'}{R+r'} \rightarrow \frac{(E-Ir)(R+r')}{R}=Ir'-E' \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{E'=Ir'-\frac{(E-Ir)(R+r')}{R}} \qquad (9)$$

Η (8) λόγω της (9) δίνει:

$$I_2=\frac{\cancel{Ir'}-\cancel{Ir'}+\frac{(E-Ir)(R+r')}{R}}{R+r'} \rightarrow$$

$$\rightarrow I_2=\frac{(E-Ir)\cancel{(R+r')}}{\cancel{(R+r')}R} \rightarrow \boxed{I_2=\frac{E-Ir}{R}} \qquad (10)$$

Τέλος αντικαθιστώντας την (10) στην (6) προκύπτει:

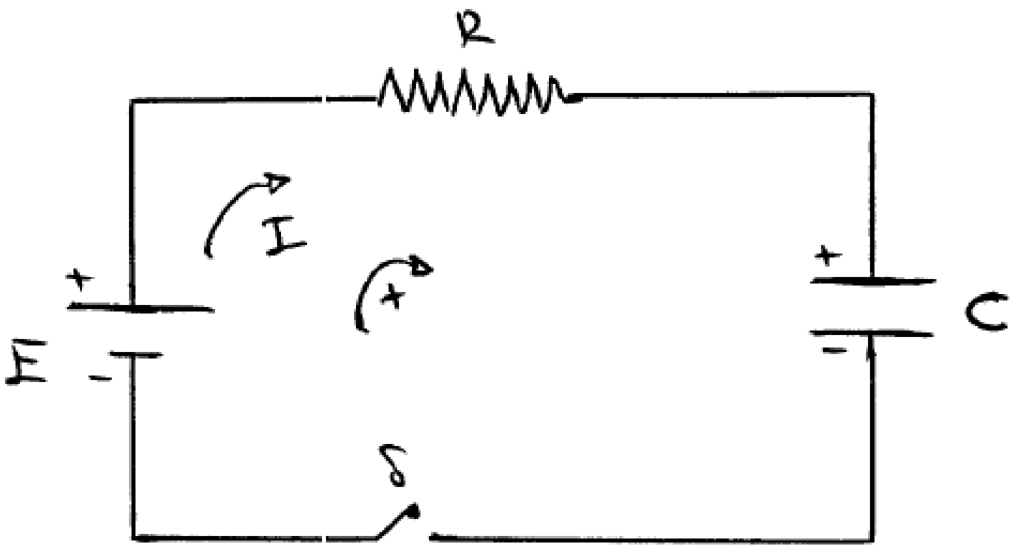
$$I_1 = I - \frac{E - Ir}{R} = \frac{IR - E + Ir}{R} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{I_1 = \frac{I(R+r) - E}{R}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Θεωρήστε τη φόρτιση πυκνωτή χωρητικότητας C μέσω αντίστασης R με μπαταρία ΗΕΔ E. Σε πόσο χρόνο ο πυκνωτής έχει αποκτήσει το 90% του τελικού φορτίου του;

ΛΥΣΗ



Σε τυχαία χρονική στιγμή t κλείνει ο διακόπτης δ του κυκλώματος, οπότε αυτό διαρρέεται από ρεύμα I.
Εφαρμόζοντας τον 2° κανόνα του Kirchhoff προκύπτει:

$$\Sigma V = 0 \rightarrow E - IR - V_c = 0 \qquad (1)$$

Από τον ορισμό της χωρητικότητας του πυκνωτή έχουμε:

$$C = \frac{Q}{V_c} \rightarrow V_c = \frac{Q}{C} \qquad (2)$$

και η ένταση ρεύματος I είναι: $I = \frac{dQ}{dt}$ (3)

Αντικαθιστώντας τις (2), (3) στην (1) προκύπτει:

$$E - R\frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \rightarrow E - \frac{Q}{C} = R\frac{dQ}{dt} \rightarrow$$

$$\rightarrow CE - Q = RC\frac{dQ}{dt} \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_0^Q \frac{dQ}{CE - Q} = \frac{1}{RC}\int_0^t dt \rightarrow$$

Για $t=0$: $Q=0$
αρχικά αφόρτιστος πυκνωτής

$$\rightarrow -\ln(CE - Q)\Big|_0^Q = \frac{1}{RC}\, t\Big|_0^t \rightarrow$$

$$\rightarrow -\ln\left(\frac{CE - Q}{CE}\right) = \frac{t}{RC} \rightarrow \ln\left(\frac{CE - Q}{CE}\right) = -\frac{t}{RC} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{CE - Q}{CE} = e^{-t/RC} \rightarrow 1 - \frac{Q}{CE} = e^{-t/RC} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{Q}{CE} = 1 - e^{-t/RC} \rightarrow Q(t) = CE\left(1 - e^{-t/RC}\right) \quad (4)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (4) η φόρτιση του πυκνωτή ακολουθεί μια εκθετική αύξηση με το φορτίο του να τείνει ασυμπτωτικά στην μέγιστη τιμή του $Q_{max} = CE$ που μπορεί να αποθηκεύσει ο πυκνωτής.

Αν $t = t_1$ είναι ο χρόνος στον οποίο ο πυκνωτής έχει φορτιστεί με το 90% του μέγιστου φορτίου Q_{max} τότε για $t = t_1$ είναι $Q = 0{,}9\,Q_{max} = 0{,}9\,CE$ οπότε η (4) δίνει:

$$0{,}9\,\cancel{CE} = \cancel{CE}\left(1 - e^{-t_1/RC}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow 0{,}9 = 1 - e^{-t_1/RC} \rightarrow$$

$$\rightarrow e^{-t_1/RC} = 1 - 0{,}9 \rightarrow e^{-t_1/RC} = 0{,}1 \rightarrow$$

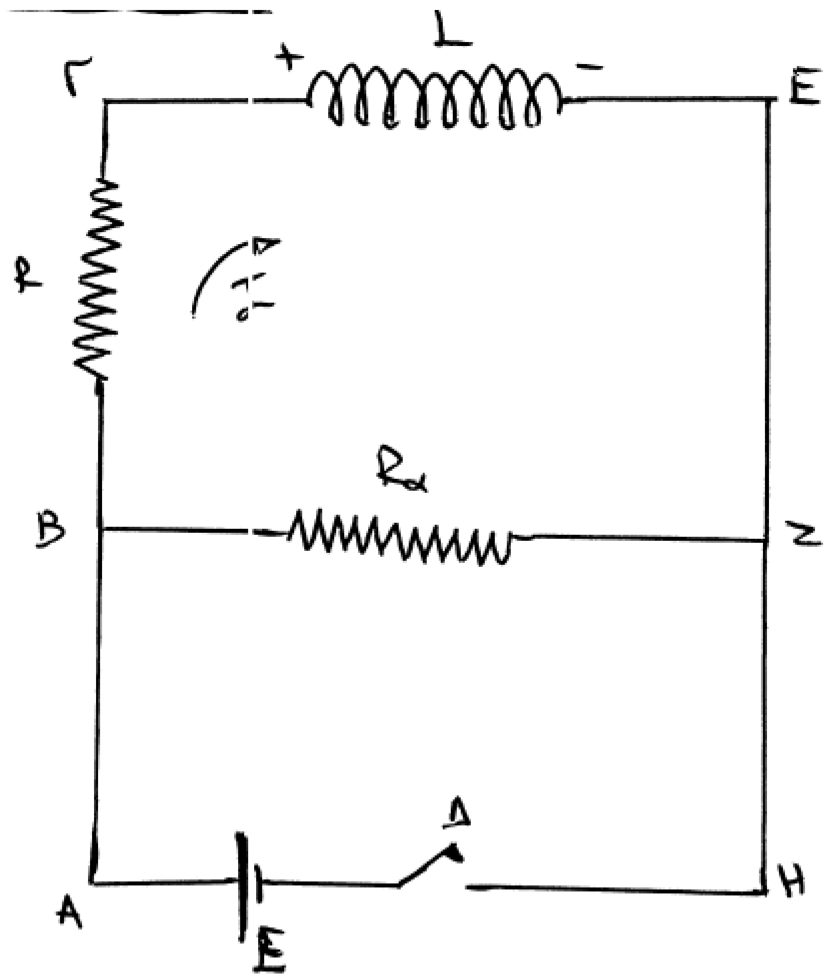
$$\rightarrow -\frac{t_1}{RC} = \ln 0{,}1 \rightarrow t_1 = -RC\ln 0{,}1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{t_1 = 2{,}3\,RC}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να λύσετε τις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τη σύνδεση και την αποσύνδεση κυκλώματος RL με μπαταρία

ΛΥΣΗ



Α) Σύνδεση κυκλώματος RL με πηγή (κλείσιμο διακόπτη)

Ο 2ος κανόνας του Kirchhoff στο βρόχο ΑΒΓΕΖΗΑ του κυκλώματος δίνει:

$$\Sigma V = 0 \rightarrow E - IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \rightarrow E - IR = L\frac{dI}{dt} \rightarrow$$

$$\rightarrow L\int_0^I \frac{dI}{E-IR} = \int_0^t dt \rightarrow -\frac{L}{R}\ln(E-IR)\Big|_0^I = t\Big|_0^t \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{L}{R}\ln\left(\frac{E-IR}{E}\right) = t \rightarrow \ln\left(\frac{E-IR}{E}\right) = -\frac{R}{L}t \rightarrow$$

$$\rightarrow \ln\left(1-\frac{IR}{E}\right) = -\frac{R}{L}t \rightarrow 1 - \frac{IR}{E} = e^{-\frac{R}{L}t} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{IR}{E} = 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \rightarrow \boxed{I_{(t)} = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)} \qquad (8.10)$$

Β) Αποσύνδεση κυκλώματος RL από πηγή (άνοιγμα διακόπτη)

Εφαρμόζοντας το 2^o κανόνα Kirchhoff στο βρόχο ΒΓΕΖΒ προκύπτει:

$$\Sigma V = 0 \rightarrow -IR_a - IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \rightarrow L\frac{dI}{dt} + IR' = 0 \rightarrow$$

όπου $R' = R + R_a$ λόγω της σύνδεσης σε σειρά των αντιστάσεων

$$\rightarrow L\frac{dI}{dt} = -IR' \rightarrow \frac{dI}{dt} = -I\frac{R'}{L} \rightarrow \int_{I_0}^{I}\frac{dI}{I} = -\frac{R'}{L}\int_0^t dt \rightarrow$$

$$\rightarrow \ln I\Big|_{I_0}^{I} = -\frac{R'}{L}\,t\Big|_0^t \rightarrow \ln\left|\frac{I}{I_0}\right| = -\frac{R'}{L}t \rightarrow \frac{I}{I_0} = e^{-\frac{R'}{L}t} \rightarrow$$

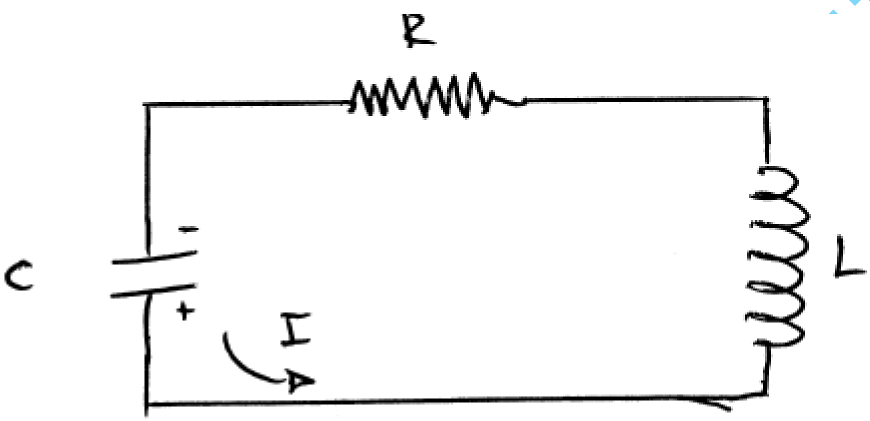
$$\rightarrow I = I_0 e^{-\frac{R'}{L}t} \rightarrow \boxed{I(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{R'}{L}t}} \quad (8.14)$$

όπου $I_0 = E/R$ το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα για $t=0$.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Α) Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση που περιγράφει κύκλωμα RLC
Να εξετάσετε **όλες** τις περιπτώσεις.
Β) Να γράψετε και να λύσετε τη διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση μάζας m στο άκρο ελατηρίου σταθεράς k υπό την επίδραση τριβής ανάλογης προς την ταχύτητα της μάζας με σταθερά αναλογίας b.
Γ) Παρατηρείτε ομοιότητες μεταξύ των δυο;

ΛΥΣΗ



Α)
Σύμφωνα με την εξίσ. 8.44 του βιβλίου η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το κύκλωμα RLC του σχήματος είναι:

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0 \rightarrow \frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{LC}q=0 \quad (1)$$

Θέτοντας $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ και $\frac{R}{L}=2\gamma$ η (1) γράφεται:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\gamma\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0 \qquad (2)$$

Η παραπάνω είναι διαφορική εξίσωση $2^{ης}$ τάξης ομογενής με σταθερούς συντελεστές.
Θεωρούμε λύσεις της μορφής $q(t) = e^{\lambda t}$ και αντικαθιστώντας στην (2) προκύπτει η χαρακτηριστική εξίσωση της :

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \qquad (3)$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 4\gamma^2 - 4\omega_0^2$ και ανάλογα με το πρόσημό της διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις :

1) Μικρή αντίσταση :

$$\Delta < 0 \rightarrow 4\gamma^2 - 4\omega_0^2 < 0 \rightarrow \gamma^2 < \omega_0^2 \rightarrow \gamma < \omega_0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow R < \frac{2L}{\sqrt{LC}} \rightarrow R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Στην περίπτωση αυτή είναι

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-|\Delta|} = i\sqrt{|\Delta|} = i\sqrt{4|\gamma^2-\omega_0^2|} = 2i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$$

οπότε οι λύσεις της (3) είναι οι συζυγείς μιγαδικές ρίζες

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\gamma \pm 2i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}{2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2} = -\gamma \pm i\omega$$

όπου $\omega = \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$

Επομένως η λύση της δ.ε. (2) έχει τη μορφή:

$$q(t) = e^{-\gamma t}(A\sin\omega t + B\cos\omega t)$$

ή ισοδύναμα $q(t) = Ce^{-\gamma t}\cos(\omega t+\varphi)$

Δηλαδή πρόκειται για φθίνουσα ταλάντωση συχνότητας $\omega = \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2} < \omega_0$ και πλάτος που φθίνει εκθετικά με το χρόνο ως $e^{-\gamma t}$.

2/ <u>Κρίσιμη αντίσταση</u>:

$$\Delta = 0 \rightarrow 4\gamma^2 - 4\omega_0^2 = 0 \rightarrow \gamma^2 = \omega_0^2 \rightarrow \gamma = \omega_0 \rightarrow \frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow$$

$$\rightarrow R = \frac{2L}{\sqrt{LC}} \rightarrow R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Στην περίπτωση αυτή η (3) έχει μια διπλή ρίζα

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\cancel{2}\gamma}{\cancel{2}} = -\gamma = -\frac{R}{2L}$$

οπότε η λύση της δ.ε. (2) είναι της μορφής:

$$q(t) = (A+Bt)\,e^{-\gamma t} \rightarrow q(t) = (A+Bt)\,e^{-\frac{Rt}{2L}}$$

όπου οι σταθερές A, B προσδιορίζονται απ' τις αρχικές συνθήκες

3) <u>Μεγάλη αντίσταση:</u>

$$\Delta > 0 \rightarrow 4\gamma^2 - 4\omega_0^2 > 0 \rightarrow \gamma^2 > \omega_0^2 \rightarrow \gamma > \omega_0 \rightarrow \frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow$$

$$\rightarrow R > \frac{2L}{\sqrt{LC}} \rightarrow R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}\,.$$

Στην περίπτωση αυτή η (3) έχει δύο πραγματικές και αρνητικές ρίζες:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\gamma \pm 2\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}{2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2-\omega_0^2} = -\gamma \pm \omega$$

όπου $\omega = \sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$

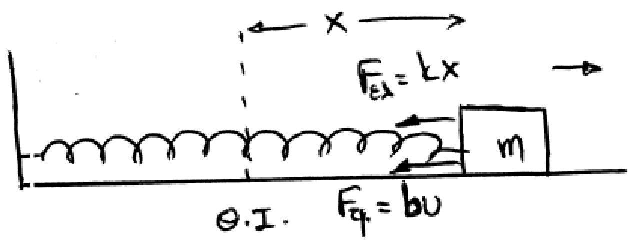
Οπότε η λύση της δ.ε. (2) έχει τη μορφή:

$$q(t) = e^{-\gamma t}\left(A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow q(t) = e^{-\frac{Rt}{2L}}\left(A\, e^{t\sqrt{\gamma^2-\omega^2}} + B\, e^{-t\sqrt{\gamma^2-\omega^2}}\right)$$

όπου οι σταθερές A, B προσδιορίζονται απ' τις αρχικές συνθήκες.

Β)



Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση της μάζας m υπό την επίδραση της δύναμης ελατηρίου και της δύναμης τριβής ανάλογης της ταχύτητας της μάζας με σταθερά αναλογίας b είναι:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow -kx - bu = m\frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (4)$$

Θέτοντας $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ και $\frac{b}{m} = 2\gamma$ η (4) γράφεται:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (5)$$

η χαρακτηριστική εξίσωση της οποίας είναι

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (6)$$

με διακρίνουσα $\Delta = 4\gamma^2 - 4\omega_0^2$ και ανάλογα με το πρόσημό της διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1/ Ασθενής απόσβεση:

$$\Delta<0 \rightarrow \gamma<\omega_0 \rightarrow \frac{b}{2m}<\sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow b<2\sqrt{km}$$

οπότε οι λύσεις της (6) είναι δυο συζυγείς μιγαδικές ρίζες

$$\lambda_{1,2}=\frac{-2\gamma\pm 2i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}{2}=-\gamma\pm i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}=-\gamma\pm i\omega \quad \left(\omega=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right)$$

Επομένως η λύση της δ.ε. (5) είναι της μορφής:

$$x(t)=e^{-\gamma t}(A\sin\omega t+B\cos\omega t) \text{ ή ισοδύναμα } x(t)=Ce^{-\gamma t}\cos(\omega t+\varphi).$$

2/ Κρίσιμη απόσβεση:

$$\Delta=0 \rightarrow \gamma=\omega_0 \rightarrow \frac{b}{2m}=\sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow b=2\sqrt{km}$$

οπότε η (6) έχει μια διπλή ρίζα: $\lambda_{1,2}=\frac{-2\gamma}{2}=-\gamma=-\frac{b}{2m}$

και η λύση της δ.ε. (5) έχει τη μορφή:

$$x(t)=(A+Bt)e^{-\gamma t} \rightarrow x(t)=(A+Bt)e^{-\frac{bt}{2m}}$$

3/ Ισχυρή απόσβεση:

$$\Delta>0 \rightarrow \gamma>\omega_0 \rightarrow \frac{b}{2m} > \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow b > 2\sqrt{km}.$$

οπότε η (6) έχει δυο πραγματικές κι αρνητικές ρίζες:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\gamma \pm 2\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}{2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2-\omega_0^2} = -\gamma \pm \omega \quad \left(\text{όπου } \omega = \sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)$$

και η λύση της δ.ε. (5) είναι της μορφής

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}\right).$$

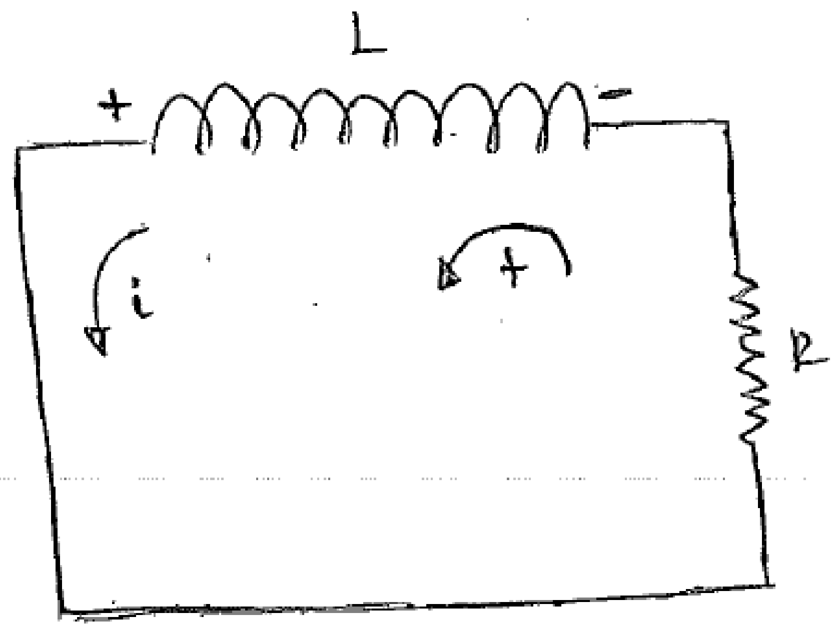
Γ) Παρατηρείτε μια πλήρη αντιστοιχία μεταξύ του ηλεκτρικού και μηχανικού αυτού συστήματος με πλήρη αντιστοίχιση μεγεθών:

Κύκλωμα RLC	Αρμονικός ταλαντωτής με απόσβεση
Πηνίο αυτεπαγωγής L	Μάζα m
Αντίστροφη χωρητικότητα $1/C$	Σταθερά ελατηρίου k
Αντίσταση R	Συντελεστής απόσβεσης b
Φορτίο: q	Θέση x
Ρεύμα I	Ταχύτητα u
Φυσική συχνότητα $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	Φυσική συχνότητα $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
Κυκλική συχνότητα φθίνουσας ταλάντωσης: $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$	$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$
Τάση αντίστασης IR	Απόσβεση bu
Ηλεκτρική ενέργεια $U_c = \frac{q^2}{2C}$	Δυναμική ενέργεια $U = \frac{1}{2}kx^2$
Μαγνητική ενέργεια $U_L = \frac{1}{2}LI^2$	Κινητική ενέργεια $K = \frac{1}{2}mu^2$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Να βρείτε την απόσβεση του ρεύματος $i(t)$ σε ένα κύκλωμα RL χωρίς μπαταρία αν η αρχική τιμή του ρεύματος είναι I .

ΛΥΣΗ



Εφαρμόζοντας τον 2ο κανόνα του Kirchhoff στο βρόγχο του κυκλώματος προκύπτει:

το πηνίο παρέχει το ρεύμα στο κύκλωμα

$$\Sigma V=0 \rightarrow V_L - V_R = 0 \rightarrow L\left(-\frac{di}{dt}\right) - iR = 0 \rightarrow iR + L\frac{di}{dt} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow L\frac{di}{dt} = -iR \rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i \rightarrow \int_I^i \frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt \rightarrow$$

$$\rightarrow \ln i \Big|_{I}^{i} = -\frac{R}{L} t \Big|_{0}^{t} \rightarrow \ln\left(\frac{i}{I}\right) = -\frac{R}{L} t \rightarrow$$

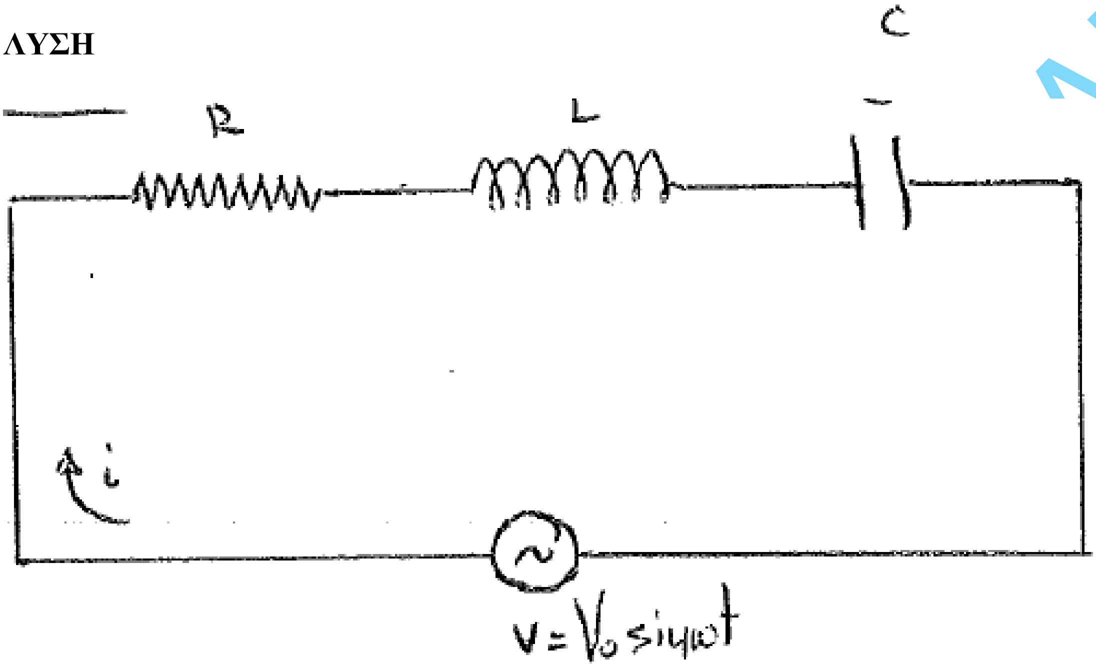
$$\rightarrow \frac{i}{I} = e^{-\frac{R}{L}t} \rightarrow \boxed{i(t) = I\, e^{-\frac{R}{L}t}}$$

όπου I το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα αρχικά για $t=0$.

ΑΣΚΗΣΗ 10

Να μελετήσετε κύκλωμα ac με *RLC* σε σειρά θεωρώντας ότι $v = V_0 \sin\omega t$ και $i = I_0 \sin(\omega t + \psi)$.

ΛΥΣΗ



Το ρεύμα i στο κύκλωμα είναι της μορφής $i = I_0 \sin(\omega t + \psi)$.
Επειδή το ρεύμα και η τάση στα άκρα της αντίστασης V_R έχουν την ίδια φάση είναι:

$$V_R = I_0 R \sin(\omega t + \psi) = V_R \sin(\omega t + \psi) \quad (1)$$

ενώ επειδή το ρεύμα υστερεί της τάσης στα άκρα του πηνίου V_L κατά $\pi/2$ είναι:

$$V_L = I_0 X_L \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right) = V_L \cos(\omega t + \psi) \quad (2)$$

και τέλος επειδή το ρεύμα προηγείται της τάσης στα άκρα του πυκνωτή V_C κατά $\pi/2$ είναι:

$$V_C = I_0 X_C \sin\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right) = -V_C \cos(\omega t + \psi) \quad (3)$$

Αλλά είναι:

$$V_R + V_L + V_C = V \xrightarrow{(1,2,3)} V_R \sin(\omega t + \psi) + V_L \cos(\omega t + \psi) - V_C \cos(\omega t + \psi) = V_0 \sin$$

$$\rightarrow V_R \sin(\omega t + \psi) + (V_L - V_C)\cos(\omega t + \psi) = V_0 \sin\omega t \quad (4)$$

Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\sin(\omega t + \psi) = \sin\omega t \cos\psi + \cos\omega t \sin\psi$$

$$\cos(\omega t + \psi) = \cos\omega t \cos\psi - \sin\omega t \sin\psi$$

η σχέση (4) γράφεται ως:

$$V_R \sin\omega t \cos\psi + V_R \cos\omega t \sin\psi + (V_L - V_C)\cos\omega t \cos\psi - (V_L - V_C)\sin\omega t \sin\psi = V_0 \sin\omega t$$

$$\rightarrow \left[V_R \cos\psi - (V_L - V_C)\sin\psi\right]\sin\omega t + \left[V_R \sin\psi + (V_L - V_C)\cos\psi\right]\cos\omega t =$$

$$= V_0 \sin\omega t \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} V_R \cos\psi - (V_L - V_C)\sin\psi = V_0 & (5) \\ V_R \sin\psi + (V_L - V_C)\cos\psi = 0 & (6) \end{cases}$$

Από την (6) προκύπτει: $V_R \sin\psi = (V_C - V_L)\cos\psi \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{\sin\psi}{\cos\psi} = \frac{V_C - V_L}{V_R} \rightarrow \tan\psi = \frac{V_C - V_L}{V_R} \quad (7)$$

Αλλά τα πλάτη των τάσεων είναι:

$V_0 = I_0 R$, $V_L = I_0 X_L = I_0 \omega L$, $V_C = I_0 X_C = \frac{I_0}{\omega C}$ οπότε η (7) δίνει:

$$\tan\psi = \frac{X_C - X_L}{R} \rightarrow \psi = \tan^{-1}\left(\frac{X_C - X_L}{R}\right) \quad (8)$$

Ενώ η (5) δίνει αν λάβουμε υπόψη ότι:

$$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\psi}} \quad \text{και} \quad \sin\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\psi}}}$$

$$(5) \rightsquigarrow V_0 = \frac{V_R}{\sqrt{1+\tan^2\psi}} - \frac{(V_L - V_C)}{\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\psi}}} \overset{(8)}{=}$$

$$= \frac{V_R}{\sqrt{1+\frac{(X_C-X_L)^2}{R^2}}} - \frac{(V_L-V_C)}{\sqrt{1+\frac{R^2}{(X_C-X_L)^2}}} =$$

$$= \frac{V_R R}{\sqrt{R^2+(X_C-X_L)^2}} - \frac{(V_L-V_C)(X_C-X_L)}{\sqrt{(X_C-X_L)^2+R^2}} =$$

$$= \frac{V_R R-(V_L-V_C)(X_C-X_L)}{\sqrt{R^2+(X_C-X_L)^2}} = \frac{I_0 R^2 - I_0(X_C-X_L)(X_C-X_L)}{\sqrt{R^2+(X_C-X_L)^2}} =$$

$$= I_0 \frac{R^2+(X_C-X_L)^2}{\sqrt{R^2+(X_C-X_L)^2}} \longrightarrow \boxed{V_0 = I_0\sqrt{R^2+(X_C-X_L)^2}}$$

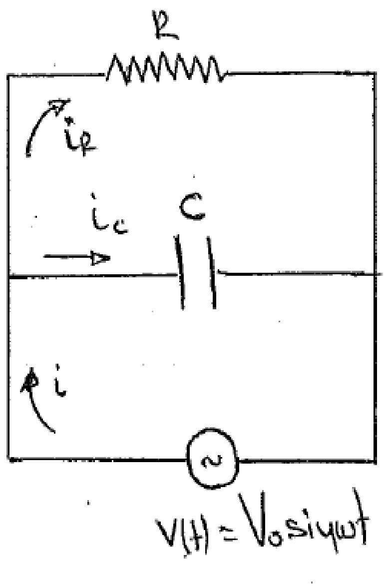
Δηλαδή η εμπέδηση του κυκλώματος επειδή $V_0 = I_0 Z$ είναι:

$$Z=\sqrt{R^2+(X_C-X_L)^2} = \sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Να μελετήσετε κύκλωμα ac που αποτελείται από μια γεννήτρια εναλλασσόμενης τάσης v στα άκρα της οποίας είναι συνδεμένα <u>παράλληλα</u> μια αντίσταση R και ένας πυκνωτής χωρητικότητας C.

ΛΥΣΗ



Η εναλλασσόμενη τάση του κυκλώματος είναι $V(t) = V_0 \sin\omega t$ και στα άκρα της είναι συνδεμένα παράλληλα αντίσταση R και πυκνωτής χωρητικότητας C

Θεωρούμε ότι το ρεύμα που παράγει στο κύκλωμα είναι της μορφής $i = I_0 \sin(\omega t + \psi)$ (1)

όπου I_0, ψ είναι σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν.

Το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση R είναι:

$$i_R = \frac{V}{R} = \frac{V_0 \sin\omega t}{R} \rightarrow i_R = I_R \sin\omega t \quad (2)$$

Ενώ το ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή είναι:

$$X_c = \frac{1}{C\omega}$$

$$i_c = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(CV) = C\frac{d}{dt}(V_0 \sin\omega t) = C\omega V_0 \cos\omega t =$$

$$= \frac{V_0}{X_c}\cos\omega t \rightarrow i_c = I_c \cos\omega t \quad (3)$$

Αλλά είναι:

$$i_R + i_c = i \xrightarrow{(1),(2),(3)} I_R \sin\omega t + I_c \cos\omega t = I_0 \sin(\omega t + \psi) \quad (4)$$

κι επειδή $\sin(\omega t+\psi) = \cos\psi \sin\omega t + \sin\psi \cos\omega t$

η (4) γίνεται:

$$I_R \sin\omega t + I_c \cos\omega t = I_0 \cos\psi \sin\omega t + I_c \sin\psi \cos\omega t \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} I_R = I_0 \cos\psi & (5) \\ I_c = I_0 \sin\psi & (6) \end{cases}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (6) και (5) προκύπτει:

$$\tan\psi = \frac{\sin\psi}{\cos\psi} = \frac{I_c}{I_R} = \frac{\frac{V_0}{X_c}}{\frac{V_0}{R}} = \frac{R}{X_c} = \frac{R}{1/C\omega} \rightarrow$$

$$\rightarrow \tan\psi = RC\omega \rightarrow \boxed{\psi = \tan^{-1}(RC\omega)}$$

Ενώ υψώνοντας τις (5), (6) στο τετράγωνο και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει:

$$I_R^2 + I_c^2 = I_0^2\cos^2\psi + I_0^2\sin^2\psi \rightarrow I_R^2 + I_c^2 = I_0^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow I_0 = \sqrt{I_R^2 + I_c^2} = \sqrt{\frac{V_0^2}{R^2} + \frac{V_0^2}{X_c^2}} = V_0\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_c^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{I_0 = V_0\sqrt{\frac{1}{R^2} + C^2\omega^2}}$$

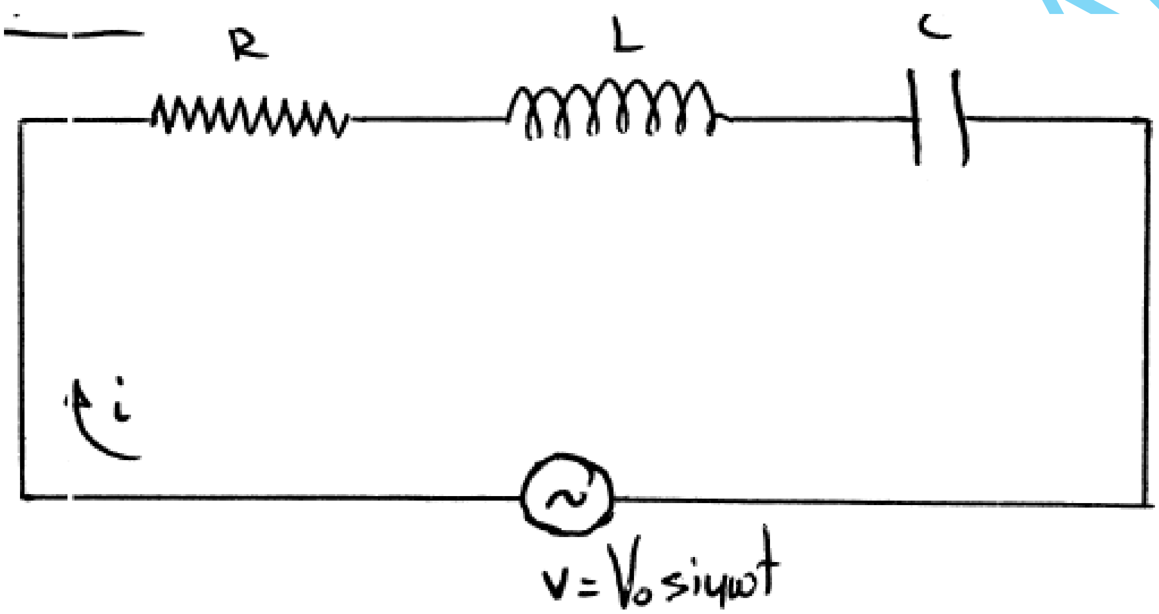
κι επειδή $I_0 = \frac{V_0}{Z}$, η εμπέδηση του κυκλώματος είν

$$Z = 1\Big/\sqrt{\frac{1}{R^2} + C^2\omega^2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 12

Να μελετήσετε κύκλωμα ac με RLC σε σειρά θεωρώντας ότι $v = V_0 \sin \omega t$ και $i = I_0 \sin(\omega t + \psi)$.

ΛΥΣΗ



Το ρεύμα i στο κύκλωμα είναι της μορφής $i = I_0 \sin(\omega t + \psi)$.
Επειδή το ρεύμα και η τάση στα άκρα της αντίστασης V_R έχουν την ίδια φάση είναι:

$$v_R = I_0 R \sin(\omega t + \psi) = V_R \sin(\omega t + \psi) \quad (1)$$

ενώ επειδή το ρεύμα υστερεί της τάσης στα άκρα του πηνίου V_L κατά $\pi/2$ είναι:

$$v_L = I_0 X_L \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right) = V_L \cos(\omega t + \psi) \quad (2)$$

-

και τέλος επειδή το ρεύμα προηγείται της τάσης στα άκρα του πυκνωτή V_c κατά $\pi/2$ είναι:

$$V_c = I_c X_c \sin\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right) = -V_c \cos(\omega t + \psi) \quad (3)$$

Αλλά είναι:

$$V_R + V_L + V_c = V \xrightarrow{(1,2,3)} V_R \sin(\omega t + \psi) + V_L \cos(\omega t + \psi) - V_c \cos(\omega t + \psi) = V_0 \sin\omega t \rightarrow$$

$$\rightarrow V_R \sin(\omega t + \psi) + (V_L - V_c)\cos(\omega t + \psi) = V_0 \sin\omega t \quad (4)$$

Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\sin(\omega t + \psi) = \sin\omega t \cos\psi + \cos\omega t \sin\psi$$

$$\cos(\omega t + \psi) = \cos\omega t \cos\psi - \sin\omega t \sin\psi$$

η σχέση (4) γράφεται ως:

$$V_R \sin\omega t \cos\psi + V_R \cos\omega t \sin\psi + (V_L - V_c)\cos\omega t \cos\psi - (V_L - V_c)\sin\omega t \sin\psi = V_0 \sin\omega t \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[V_R \cos\psi - (V_L - V_c)\sin\psi\right]\sin\omega t + \left[V_R \sin\psi + (V_L - V_c)\cos\psi\right]\cos\omega t =$$

$$= V_0 \sin\omega t \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} V_R \cos\psi - (V_L - V_c)\sin\psi = V_0 & (5) \\ V_R \sin\psi + (V_L - V_c)\cos\psi = 0 & (6) \end{cases}$$

Από την (6) προκύπτει: $V_R \sin\psi = (V_c - V_L)\cos\psi \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{\sin\psi}{\cos\psi} = \frac{V_c - V_L}{V_R} \rightarrow \tan\psi = \frac{V_c - V_L}{V_R} \quad (7)$$

Αλλά τα πλάτη των τάσεων είναι:

$V_R = I_0 R$, $V_L = I_0 X_L = I_0 \omega L$, $V_c = I_0 X_c = \frac{I_0}{\omega C}$ οπότε η (7) δίνει:

$$\tan\psi = \frac{X_c - X_L}{R} \rightarrow \psi = \tan^{-1}\left(\frac{X_c - X_L}{R}\right) \quad (8)$$

Ενώ η (5) δίνει αν λάβουμε υπόψη ότι:

$$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\psi}} \quad \text{και} \quad \sin\psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2\psi}}}$$

$$(5) \rightsquigarrow V_0 = \frac{V_R}{\sqrt{1+\tan^2\psi}} - \frac{(V_L-V_C)}{\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\psi}}} \overset{(8)}{=}$$

$$= \frac{V_R}{\sqrt{1+\frac{(X_C-X_L)^2}{R^2}}} - \frac{(V_L-V_C)}{\sqrt{1+\frac{R^2}{(X_C-X_L)^2}}} =$$

$$= \frac{V_R R}{\sqrt{R^2+(X_C-X_L)^2}} - \frac{(V_L-V_C)(X_C-X_L)}{\sqrt{(X_C-X_L)^2+R^2}} =$$

$$= \frac{V_R R-(V_L-V_C)(X_C-X_L)}{\sqrt{R^2+(X_C-X_L)^2}} = \frac{I_0 R^2 - I_0(X_C-X_L)(X_C-X_L)}{\sqrt{R^2+(X_C-X_L)^2}} =$$

$$= I_0 \frac{R^2+(X_C-X_L)^2}{\sqrt{R^2+(X_C-X_L)^2}} \longrightarrow \boxed{V_0 = I_0\sqrt{R^2+(X_C-X_L)^2}}$$

Δηλαδή η εμπέδηση του κυκλώματος επειδή $V_0 = I_0 Z$ είναι:

$$Z = \sqrt{R^2+(X_C-X_L)^2} = \sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2}.$$