

**ΑΕΡΙΟ VAN DER WAALS**  
**ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**ΑΣΚΗΣΗ 1**

Αέριο Van der Waals  $\nu$  moles συμπιέζεται ισόθερμα από όγκο  $V_1$  σε όγκο  $V_2$ . Να υπολογίσετε το έργο συμπίεσης και τη θερμότητα που παράγεται.

Η εξίσωση Van der Waals για  $\nu$  moles είναι:

$$\left( P + \nu^2 \frac{\alpha}{V^2} \right) (V - \nu b) = \nu RT \Rightarrow P = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \nu^2 \frac{\alpha}{V^2}$$

Το έργο συμπίεσης θα είναι:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P dV = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V - \nu b} - \nu^2 \alpha \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V^2} dV = \nu RT \ln \left( \frac{V_2 - \nu b}{V_1 - \nu b} \right) + \nu^2 \alpha \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right)$$

Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας είναι:

$$\Delta U = \nu C_V \int_{T_1}^{T_2} dT + \nu^2 \alpha \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^2} = \nu C_V (T_2 - T_1) - \nu^2 \alpha \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) = -\nu^2 \alpha \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right)$$

Από τον 1<sup>ο</sup> Θερμοδυναμικό Νόμο έχουμε:  $Q = \Delta U + W$

Η Θερμότητα που παράγεται είναι:

$$\begin{aligned} Q = \Delta U + W &= -\nu^2 \alpha \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) + \nu RT \ln \left( \frac{V_2 - \nu b}{V_1 - \nu b} \right) + \nu^2 \alpha \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) = \\ &= \nu RT \ln \left( \frac{V_2 - \nu b}{V_1 - \nu b} \right) \end{aligned}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 2**

Ποιες από τις επόμενες διαδικασίες α) ισόχωρη β) ισοβαρής γ) ισόθερμη δ) αδιαβατική, είναι πολυτροπικές για αέριο Van der Waals.

Σε μία πολυτροπική διαδικασία η θερμοχωρητικότητα παραμένει σταθερή, άρα πρέπει να ελέγξουμε αν στις διαδικασίες αυτές του αερίου Van der Waals η θερμοχωρητικότητα διατηρείται.

Η εσωτερική ενέργεια ενός αερίου Van der Waals είναι:  $U(T, V) = \nu C_V T - \nu^2 \frac{\alpha}{V}$

Ο δεύτερος όρος προκύπτει από την πρόσθετη πίεση που οφείλεται στις ελκτικές δυνάμεις μεταξύ των μορίων, ενώ η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας θα είναι:

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV = \nu C_V dT + \nu^2 \alpha \frac{dV}{V^2}$$

Από τον 1<sup>ο</sup> θερμοδυναμικό Νόμο θα έχουμε:  $\delta Q = dU + PdV \Rightarrow$

$$\delta Q = \nu C_V dT + \left( P + \frac{\nu^2 \alpha}{V^2} \right) dV$$

Από τον ορισμό της θερμοχωρητικότητας έχουμε:

$$nC = \frac{\delta Q}{dT} \Rightarrow nC = \frac{nC_V dT + \left( P + \frac{v^2 \alpha}{V^2} \right) dV}{dT} \Rightarrow C = C_V + \frac{1}{v} \left( P + \frac{v^2 \alpha}{V^2} \right) \frac{dV}{dT}$$

Η εξίσωση Van der Waals είναι:  $\left( P + v^2 \frac{\alpha}{V^2} \right) (V - vb) = vRT$

Άρα  $C = C_V + \frac{RT}{V - vb} \frac{dV}{dT}$

α) ισόχωρη  $dV = 0 \Rightarrow C = C_V$  είναι πολυτροπική

β) ισοβαρής

$$dP = 0 \Rightarrow d \left( \frac{vRT}{V - vb} - v^2 \frac{\alpha}{V^2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{vR}{V - vb} dT + \left( -\frac{vRT}{(V - vb)^2} + 2v^2 \frac{\alpha}{V^3} \right) dV = 0 \Rightarrow$$

Αντικαθιστώντας την θερμοκρασία ο όρος:  $\frac{RT}{V - vb} \frac{dV}{dT} = f(V, P)$

Άρα στην ισοβαρή διαδικασία το  $C_p$  δεν είναι σταθερό για αέριο Van der Waals, και κατά συνέπεια δεν είναι η μεταβολή πολυτροπική.

γ) ισόθερμη  $dT = 0$  άρα  $C = C_v + \frac{RT}{V - vb} \frac{dV}{dT} = \infty$  άρα είναι πολυτροπική

δ) αδιαβατική  $\delta Q = 0$  άρα  $C = 0$  άρα είναι πολυτροπική

**ΑΣΚΗΣΗ 3**

Να υπολογιστεί ο συντελεστής θερμικής διαστολής αέριου Van der Waals συναρτήσει των  $V, T, a$  και  $b$ .

Η εξίσωση Van der Waals είναι:  $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$

Ο **συντελεστής θερμικής διαστολής** ορίζεται ως η σχετική μεταβολή του όγκου ανά μονάδα θερμοκρασίας.

$$\alpha = \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_P$$

Όμως  $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{R}{\frac{RT}{V-b} - \frac{2a(V-b)}{V^3}}$  Λύνουμε ως προς  $T$  την εξίσωση VdW και παραγωγίζουμε ως προς  $V$  στη συνέχεια γράφουμε το αντίστροφο.

$$\text{Άρα } \alpha = \frac{R}{\frac{RTV}{V-b} - \frac{2a(V-b)}{V^2}} = \frac{V-b}{TV - \frac{2a(V-b)^2}{RV^2}}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 4**

Για αέριο Van der Waals να αποδειχθούν οι σχέσεις:

$$V_C = 3b \quad P_C = \frac{\alpha}{27b^2} \quad T_C = \frac{8\alpha}{27Rb}$$

Η εξίσωση Van der Waals για 1 mole είναι:

$$\left(P + \frac{\alpha}{V^2}\right)(V - b) = RT \Rightarrow (PV^2 + \alpha)(V - b) = RTV^2 \Rightarrow$$

$$PV^3 - bPV^2 + \alpha V - b\alpha - RTV^2 = 0 \Rightarrow V^3 - \left(b + \frac{RT}{P}\right)V^2 + \frac{\alpha}{P}V - \frac{\alpha b}{P} = 0$$

Για  $P = P_C$  και  $T = T_C$  η εξίσωση έχει μία τριπλή ρίζα  $V_C$  (στην θεωρητική αντιμετώπιση αναφέραμε ότι θα γράφεται ως τέλειο τετράγωνο, εδώ θα το λύσουμε με άλλο τρόπο).

$$\text{Θεωρούμε τη συνάρτηση } f(V) = V^3 - \left(b + \frac{RT_C}{P_C}\right)V^2 + \frac{\alpha}{P_C}V - \frac{\alpha b}{P_C}$$



Για να έχει μία τριπλή ρίζα  $V_C$  πρέπει να ισχύουν τα εξής:

$$f(V_C) = 0 \quad \left. \frac{\partial f(V)}{\partial V} \right|_{V=V_C} = 0 \quad \left. \frac{\partial^2 f(V)}{\partial V^2} \right|_{V=V_C} = 0$$

Όμως:

$$f(V) = V^3 - \left( b + \frac{RT_C}{P_C} \right) V^2 + \frac{\alpha}{P_C} V - \frac{\alpha b}{P_C}$$

$$\frac{\partial f(V)}{\partial V} = 3V^2 - 2 \left( b + \frac{RT_C}{P_C} \right) V + \frac{\alpha}{P_C}$$

$$\frac{\partial^2 f(V)}{\partial V^2} = 6V - 2 \left( b + \frac{RT_C}{P_C} \right)$$

Η σχέση  $\left. \frac{\partial^2 f(V)}{\partial V^2} \right|_{V=V_C} = 0$  δίνει  $6V_C - 2 \left( b + \frac{RT_C}{P_C} \right) = 0 \Rightarrow 3V_C = b + \frac{RT_C}{P_C}$  (1)

Η σχέση  $\left. \frac{\partial f(V)}{\partial V} \right|_{V=V_C} = 0$  δίνει  $3V_C^2 - 2 \left( b + \frac{RT_C}{P_C} \right) V_C + \frac{\alpha}{P_C} = 0$  (2)

Η σχέση  $f(V_C) = 0$  δίνει  $V_C^3 - \left( b + \frac{RT_C}{P_C} \right) V_C^2 + \frac{\alpha}{P_C} V_C - \frac{\alpha b}{P_C} = 0$  (3)

$$b + \frac{RT_C}{P_C} = 3V_C \quad (1)$$

$$3V_C^2 - 2\left(b + \frac{RT_C}{P_C}\right)V_C + \frac{\alpha}{P_C} = 0 \quad (2)$$

$$3V_C^2 - 2(3V_C)V_C + \frac{\alpha}{P_C} = 0 \Rightarrow 3V_C^2 - 6V_C^2 + \frac{\alpha}{P_C} = 0$$

$$3V_C^2 = \frac{\alpha}{P_C} \quad (4)$$

$$b + \frac{RT_C}{P_C} = 3V_C \quad (1)$$

$$V_C^3 - \left(b + \frac{RT_C}{P_C}\right)V_C^2 + \frac{\alpha}{P_C}V_C - \frac{\alpha b}{P_C} = 0 \quad (3)$$

$$V_C^3 - (3V_C)V_C^2 + \frac{\alpha}{P_C}V_C - \frac{\alpha b}{P_C} = 0 \Rightarrow$$

$$-2V_C^3 + \frac{\alpha}{P_C}(V_C - b) = 0 \stackrel{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow -2V_C^3 + 3V_C^2(V_C - b) = 0 \Rightarrow V_C = 3b$$

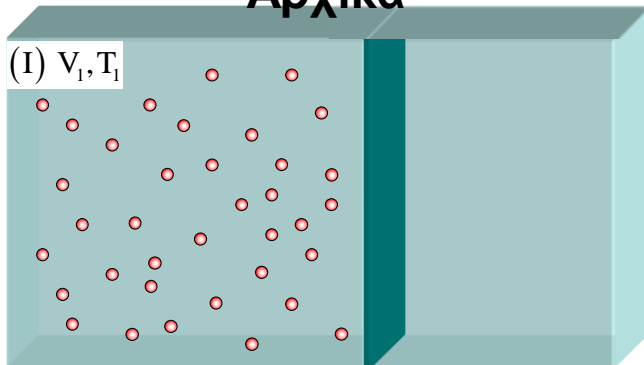
Άρα η σχέση (4) δίνει:  $P_C = \frac{\alpha}{27b^2}$  (1)

Οπότε προκύπτει:  $T_C = \frac{8\alpha}{27Rb}$

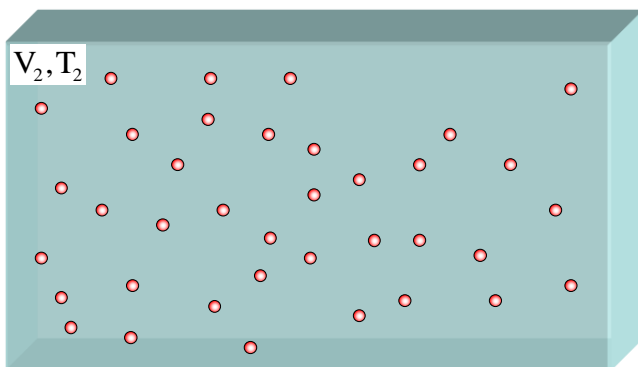
### ΑΣΚΗΣΗ 5

Αέριο Van der Waals ( $\nu$  moles) διαστέλλεται αδιαβατικά στο κενό από τον όγκο  $V_1$  στον όγκο  $V_2$ . Υπολογίστε τη μεταβολή της θερμοκρασίας  $\Delta T$  του αερίου. Γνωστά το  $a$  και  $C_V$ .

**Αρχικά**



**Τελικά**



Την διαδικασία της ελεύθερης εκτόνωσης την είχαμε μελετήσει και στην περίπτωση του ιδανικού αερίου όπου είχαμε εξηγήσει ότι η θερμοκρασία παραμένει σταθερή. Στα πραγματικά αέρια όμως η θερμοκρασία αλλάζει στην ελεύθερη εκτόνωση και αυτό οφείλεται ότι αλλάζουν οι μέσες αποστάσεις αλληλεπίδρασης των μορίων.

Η μεταβολή είναι αδιαβατική άρα  $\delta Q = 0$ , εφόσον το έμβολο είναι αβαρές δεν υπάρχει παραγωγή έργου  $\delta W = 0$ , επομένως, και  $dU = 0$ . Στο αέριο Van der Waals όμως ισχύει:

$$dU = \nu C_V dT + \nu^2 \alpha \frac{dV}{V^2}$$

Άρα:

$$vC_V dT + v^2 \alpha \frac{dV}{V^2} = 0 \Rightarrow dT = -v \frac{\alpha}{C_V} \frac{dV}{V^2} \Rightarrow \int_{T_1}^{T_2} dT = -v \frac{\alpha}{C_V} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^2} \Rightarrow$$

$$\underbrace{T_2 - T_1}_{\Delta T} = v \frac{\alpha}{C_V} \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right)$$

## Παρατηρήσεις

$$v = \frac{m}{M}$$

Επειδή  $V_2 > V_1$  έπεται, ότι  $T_2 < T_1$ , δηλαδή το αέριο ψύχεται και αυτό οφείλεται γιατί εκτελεί εσωτερικό έργο για την υπερνίκηση των ελκτικών δυνάμεων ανάμεσα στα μόρια. Για να γίνει αυτό ελαττώνεται η κινητική ενέργεια των μορίων.

Αν δεν ήταν γνωστή η σταθερά  $a$  και δίνονταν η κρίσιμη θερμοκρασία και πίεση τότε από τις σχέσεις:

$$P_C = \frac{\alpha}{27b^2} \text{ και } T_C = \frac{8\alpha}{27Rb}$$

$$\alpha = \frac{9}{8} RT_C P_C$$

**ΑΣΚΗΣΗ 6**

Τι ποσό θερμότητας πρέπει να προσφέρουμε σε Αέριο Van der Waals ( $\nu$  moles), ώστε κατά την διαστολή του στο κενό από όγκο  $V_1$  σε όγκο  $V_2$  να διατηρήσει την θερμοκρασία του σταθερή. Γνωστό το  $\alpha$ .

Εφόσον το έμβολο είναι αβαρές και εκτονώνεται στο κενό δεν υπάρχει παραγωγή έργου  $\delta W = 0$ , από τον 1<sup>ο</sup> θερμοδυναμικό νόμο θα έχουμε:

$$\delta Q = dU + \delta W \Rightarrow \delta Q = dU = \nu C_V dT + \nu^2 \alpha \frac{dV}{V^2}$$

Επειδή θέλουμε να διατηρηθεί η θερμοκρασία  $dT = 0$ , άρα:

$$\delta Q = \nu^2 \alpha \frac{dV}{V^2} \Rightarrow Q = \nu^2 \alpha \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^2} \Rightarrow Q = -\nu^2 \alpha \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right)$$

Επειδή  $V_2 > V_1$  έπεται  $Q > 0$ .

## ΑΣΚΗΣΗ 7

Τι ποσό θερμότητας πρέπει να προσφέρουμε σε Αέριο Van der Waals ( $\nu$  moles), ώστε κατά την διαστολή του στο κενό από όγκο  $V_1$  σε όγκο  $V_2$  να διατηρήσει την πίεση του σταθερή και ίση με  $P$ . Γνωστό το  $a, b, C_v$ .

Εφόσον το έμβολο είναι αβαρές και εκτονώνεται στο κενό δεν υπάρχει παραγωγή έργου  $\delta W = 0$ , από τον 1<sup>ο</sup> θερμοδυναμικό νόμο θα έχουμε:

$$\delta Q = dU + \delta W \Rightarrow \delta Q = dU = \nu C_v dT + \nu^2 \alpha \frac{dV}{V^2}$$

$$\text{Άρα, } Q = \nu C_v \int_{T_1}^{T_2} dT + \nu^2 \alpha \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^2} \Rightarrow Q = C_v (T_2 - T_1) - \nu^2 \alpha \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right)$$

Η εξίσωση Van der Waals για  $\nu$  moles είναι:

$$\left( P + \nu^2 \frac{\alpha}{V^2} \right) (V - \nu b) = \nu R T \Rightarrow$$

$$T_1 = \frac{V_1 - \nu b}{\nu R} \left( P + \nu^2 \frac{\alpha}{V_1^2} \right)$$

$$T_2 = \frac{V_2 - \nu b}{\nu R} \left( P + \nu^2 \frac{\alpha}{V_2^2} \right)$$

$$T_1 = \frac{V_1 - vb}{vR} \left( P + v^2 \frac{\alpha}{V_1^2} \right) \quad T_2 = \frac{V_2 - vb}{vR} \left( P + v^2 \frac{\alpha}{V_2^2} \right)$$

Αντικαθιστώντας στην προσφερόμενη θερμότητα θα έχουμε:

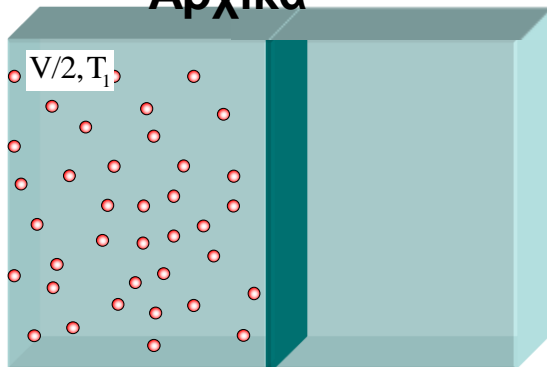
$$Q = C_v (T_2 - T_1) + v^2 \alpha \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) \Rightarrow$$

$$Q = \frac{C_v}{vR} \left[ (V_2 - vb) \left( P + v^2 \frac{\alpha}{V_2^2} \right) - (V_1 - vb) \left( P + v^2 \frac{\alpha}{V_1^2} \right) \right] + v^2 \alpha \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)$$

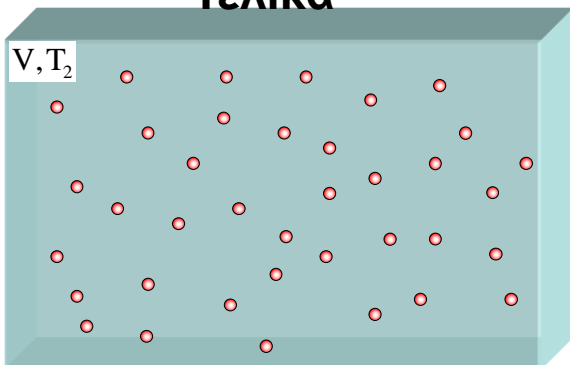
## ΑΣΚΗΣΗ 8

Ένα δοχείου όγκου  $V$  είναι χωρισμένο σε 2 ίσα μέρη από αβαρές διάφραγμα. Στο 1<sup>ο</sup> μέρος περιέχεται 1 mole αερίου Van der Waals θερμοκρασία  $T$ . Αφαιρούμε το διάφραγμα. Θεωρώντας τη διαδικασία αδιαβατική, υπολογίστε α) τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας  $\Delta U$  β) τη μεταβολή της θερμοκρασίας  $\Delta T$ , γ) το έργο των ελκτικών δυνάμεων ανάμεσα στα μόρια  $W_{ελ}$  δ) τη μεταβολή της εντροπίας  $\Delta S$ .

Αρχικά



Τελικά



**α)** Η μεταβολή είναι αδιαβατική άρα  $\delta Q = 0$ , εφόσον το έμβολο είναι αβαρές δεν υπάρχει παραγωγή έργου  $\delta W = 0$ , επομένως, και  $dU = 0$ .

**β)** Στο αέριο Van der Waals όμως ισχύει:

$$dU = \nu C_V dT + \nu^2 \alpha \frac{dV}{V^2}$$

$$\nu C_V dT + \nu^2 \alpha \frac{dV}{V^2} = 0 \Rightarrow dT = -\nu \frac{\alpha}{C_V} \frac{dV}{V^2} \Rightarrow$$

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = -\nu \frac{\alpha}{C_V} \int_{V/2}^V \frac{dV}{V^2} \Rightarrow \underbrace{T_2 - T_1}_{\Delta T} = \nu \frac{\alpha}{C_V} \left( \frac{1}{V} - \frac{2}{V} \right)$$



$$\underbrace{T_2 - T_1}_{\Delta T} = -v \frac{\alpha}{C_V V}$$

γ) Το παραγόμενο έργο του αερίου εφόσον το έμβολο είναι αβαρές είναι μηδέν. Υπάρχει όμως και ένα «εσωτερικό» έργο που είναι το έργο των ελκτικών δυνάμεων ανάμεσα στα μόρια  $W_{ελ}$  :

$$W_{ελ} = -\int P' dV = -\alpha \int_{V/2}^V \frac{dV}{V^2} = \alpha \left( \frac{1}{V} - \frac{1}{V/2} \right) = -\frac{\alpha}{V}$$

Το πρόσημο δηλώνει ότι δαπανάται (εσωτερικό) έργο για να υπερνικηθούν οι ελκτικές αλληλεπιδράσεις των μορίων.

$$\begin{aligned} \delta) \quad dS &= \frac{\delta Q}{T} \stackrel{\delta Q = dU + PdV}{=} \frac{dU + PdV}{T} = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T} dV = \\ &= \nu C_V \frac{dT}{T} + \nu^2 \alpha \frac{dV}{TV^2} + \frac{1}{T} \left( \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \nu^2 \frac{\alpha}{V^2} \right) dV = \\ &= \nu C_V \frac{dT}{T} + \nu R \frac{dV}{V - \nu b} \end{aligned}$$

Στην εντροπία αγνοούμε ότι  $\delta Q = 0$  γιατί θα αυξηθεί η εντροπία κατά την ελεύθερη εκτόνωση. Επίσης ισχύει:

$$\left( P + \nu^2 \frac{\alpha}{V^2} \right) (V - \nu b) = \nu RT$$

$$P = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \nu^2 \frac{\alpha}{V^2}$$

Ολοκληρώνοντας θα έχουμε:

$$\Delta S = \nu C_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \nu R \int_{V/2}^V \frac{dV}{V - \nu b} \Rightarrow \Delta S = \nu C_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \nu R \ln\left(\frac{V - \nu b}{V/2 - \nu b}\right) \Rightarrow$$

$$\Delta S = \nu C_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \nu R \ln\left(\frac{V - \nu b}{V/2 - \nu b}\right)$$

Επειδή

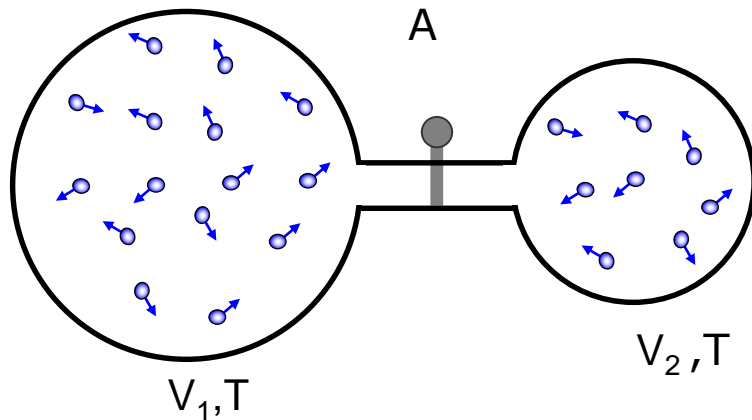
$$T_2 - T_1 = -\nu \frac{\alpha}{C_V V} \Rightarrow T_2 = T_1 - \nu \frac{\alpha}{C_V V} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = 1 - \nu \frac{\alpha}{C_V V T_1}$$

προκύπτει:

$$\Delta S = \nu C_V \ln\left(1 - \nu \frac{\alpha}{C_V V T_1}\right) + \nu R \ln\left(\frac{V - \nu b}{V/2 - \nu b}\right)$$

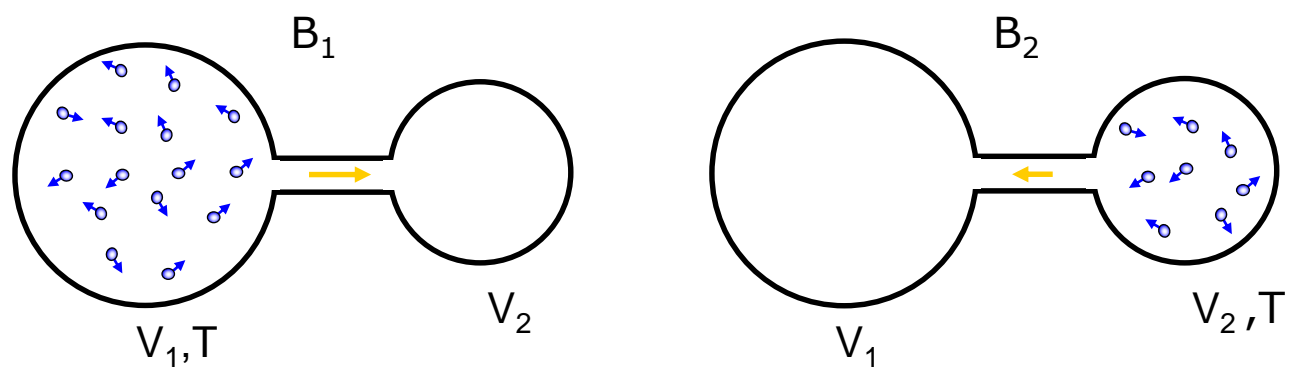
**ΑΣΚΗΣΗ 9**

Δύο δοχεία όγκων  $V_1$  και  $V_2$  συνδέονται με σωλήνα που έχει στρόφιγγα. Όσο η στρόφιγγα είναι κλειστή, σε κάθε δοχείο περιέχεται 1 γραμμομόριο του ίδιου αερίου που περιγράφεται από την εξίσωση Van der Waals. Η θερμοκρασία και στα 2 δοχεία είναι  $T$ . α) Θα ψυχθεί ή θα θερμανθεί το αέριο όταν ανοίξουμε την στρόφιγγα; β) Πόσο θα μεταβληθεί η θερμοκρασία του; γ) Υπολογίστε την πίεση που θα έχει το αέριο τότε. Τα δοχεία είναι θερμικά μονωμένα και δεδομένη είναι η  $C_V$  η οποία είναι ανεξάρτητη από τη θερμοκρασία.



Επειδή οι δύο όγκοι είναι διαφορετικοί όταν ανοίξουμε την στρόφιγγα θεωρώντας κάθε αέριο ξεχωριστά ότι εκτονώνεται ελεύθερα σε κάθε όγκο τελικά θα έχουμε διαφορετικές θερμοκρασίες.

Η **πρώτη** διαδικασία που θα θεωρήσουμε, επομένως, είναι ότι κάθε αέριο εκτονώνεται ελεύθερα.



Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε ελεύθερη εκτόνωση στο κενό, άρα η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας θα είναι μηδενική.

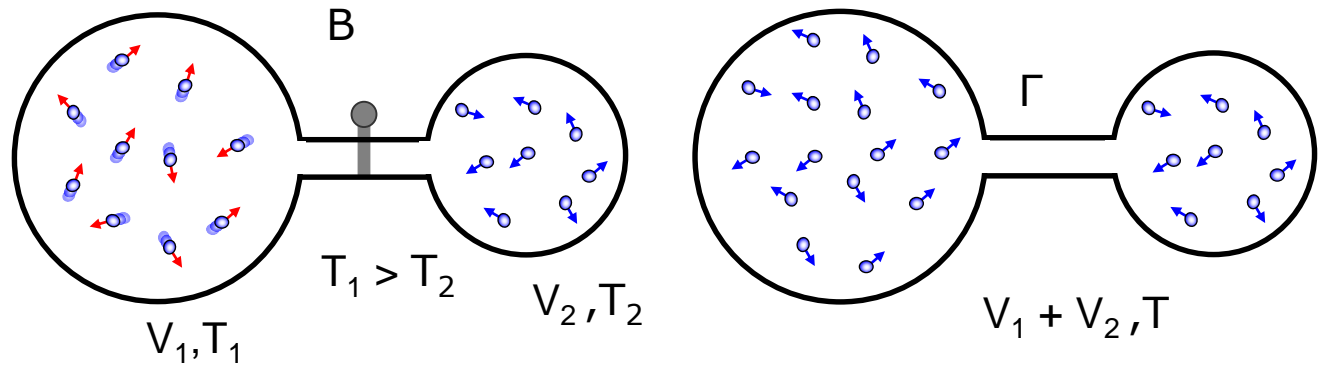
$$0 = dU = \nu C_V dT + \nu^2 \alpha \frac{dV}{V^2} \Rightarrow dT = -\nu \frac{\alpha}{C_V} \frac{dV}{V^2} \Rightarrow \int_T^{T_1} dT = -\nu \frac{\alpha}{C_V} \int_{V_1}^{V_2+V_1} \frac{dV}{V^2} \Rightarrow$$

$$T_1 - T = \nu \frac{\alpha}{C_V} \left( \frac{1}{V_1 + V_2} - \frac{1}{V_1} \right) \Rightarrow T_1 = T + \nu \frac{\alpha}{C_V} \left( \frac{1}{V_1 + V_2} - \frac{1}{V_1} \right)$$

Όμοια βρίσκουμε και για το 2<sup>ο</sup> αέριο που εκτονώνεται ελεύθερα από όγκο  $V_2$  σε όγκο  $V_1 + V_2$ :

$$T_2 = T + \nu \frac{\alpha}{C_V} \left( \frac{1}{V_1 + V_2} - \frac{1}{V_2} \right)$$

Επειδή  $V_1 > V_2$  έπεται, ότι  $T_1 > T_2$ .

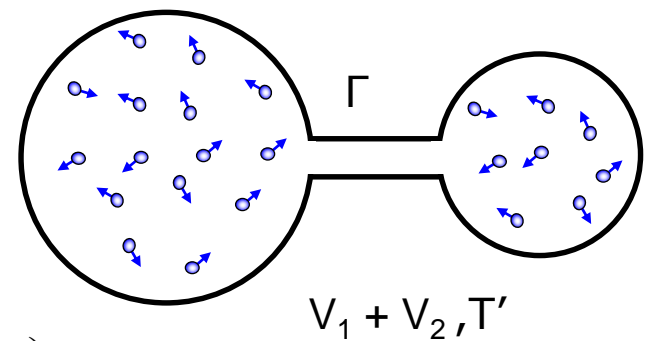


Η **δεύτερη** διαδικασία που θα θεωρήσουμε, είναι ότι τα 2 αέρια με τις νέες θερμοκρασίες είναι σε θερμική επαφή μεταξύ και επόμενος το θερμό αποδίδει θερμότητα στο ψυχρό σώμα. Εφόσον τα δοχεία έχουν αδιαβατικά τοιχώματα η θερμότητα που αποβάλλει το αέριο στο δοχείο 1 θα προσλαμβάνεται από το αέριο του δοχείου 2, μέχρι τελικά να αποκτήσουν την ίδια θερμοκρασία  $T'$ , άρα θα ισχύει:

$$Q_1 = -Q_2 \Rightarrow \cancel{vC_V(T' - T_1) + v^2\alpha \frac{dV}{V^2}} = -\cancel{vC_V(T' - T_2) + v^2\alpha \frac{dV}{V^2}} \quad v=1\text{mole} \Rightarrow$$

Λαμβάνει θερμότητα  $T' - T_1 = -T' + T_2 \Rightarrow$

$$T' = \frac{T_1 + T_2}{2}$$



Όμως,  $T_1 = T + \frac{\alpha}{C_v} \left( \frac{1}{V_1 + V_2} - \frac{1}{V_1} \right)$  και  $T_2 = T + \frac{\alpha}{C_v} \left( \frac{1}{V_1 + V_2} - \frac{1}{V_2} \right)$

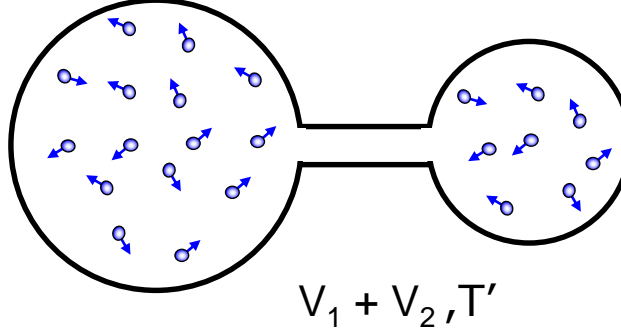
$$T' = \frac{T_1 + T_2}{2} = T + \frac{\alpha}{2C_v} \left( \frac{2}{V_1 + V_2} - \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) =$$

$$= T + \frac{\alpha}{2C_v} \left( \frac{2V_1V_2 - (V_1 + V_2)V_2 - (V_1 + V_2)V_1}{(V_1 + V_2)V_2V_1} \right)$$

$$= T + \frac{\alpha}{2C_v} \left( \frac{2V_1V_2 - (V_1 + V_2)^2}{(V_1 + V_2)V_2V_1} \right)$$

$$= T - \frac{\alpha}{2C_v} \frac{V_1^2 + V_2^2}{(V_1 + V_2)V_2V_1}$$

Το αέριο τελικά ψύχεται αφού  $T' > T$ .



Άρα η τελική κατάσταση θα είναι ένα αέριο θερμοκρασίας  $T'$  σε όγκο  $V_1 + V_2$  με αριθμό γραμμομορίων  $\nu = 2$  moles, η τελική πίεση θα δίνεται από την καταστατική εξίσωση Van der Waals.

$$\left( P + \nu^2 \frac{\alpha}{V^2} \right) (V - \nu b) = \nu RT \Rightarrow P = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \nu^2 \frac{\alpha}{V^2}$$

Αντικαθιστώντας θα έχουμε:

$$P' = \frac{2RT'}{V_1 + V_2 - 2b} - \frac{4\alpha}{(V_1 + V_2)^2}$$