Θέμα

Δύο σωματίδια μάζας m βρίσκονται σε δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ συχνότητας ω. Να βρεθεί η ενέργεια και η πλήρης κυματοσυνάρτηση της βασικής και της πρώτης διεγερμένης κατάστασης του συστήματος στις παρακάτω περιπτώσεις:
(i) Τα σωματίδια είναι διακριτά.
(ii) Τα σωματίδια είναι ταυτοτικά με σπιν 1/2.
(iii) Τα σωματίδια είναι ταυτοτικά με σπιν 0.

1) Βασική κατάσταση συστήματος: $n=0$

Σύμφωνα με την απαγορευτική αρχή του Pauli σε κάθε περίπτωση (είτε τα σωματίδια είναι διακριτά, είτε φερμιόνια, είτε μποζόνια) τα δύο σωματίδια θα βρίσκονται στην ενεργειακή στάθμη $n=0$ και η ενέργεια τους θα είναι:

$$E_{\text{βασικής κατάστασης συστήματος}} = 2E_0 = 2\frac{1}{2}\hbar\omega \to \boxed{E_{\text{βασικής κατάστ.}} = \hbar\omega}$$

Η κυματοσυνάρτηση της βασικής κατάστασης του συστήματος είναι:

i) Όταν τα σωματίδια είναι διακριτά:

$$\psi_S(1,2) = \psi_0(x_1)\psi_0(x_2) = \pi^{-1/4} e^{-x_1^2/2} \cdot \pi^{-1/4} e^{-x_2^2/2} \to$$

$$\to \boxed{\psi_S(1,2) = \pi^{-1/2} e^{-(x_1^2+x_2^2)/2}}$$

ii) Όταν τα σωματίδια είναι ταυτοτικά με spin $s=\frac{1}{2}$ δηλαδή ολικά φερμιόνια, σύμφωνα με τη γενικευμένη αρχή Pauli η ολική κυματοσυνάρτηση του συστήματος των δύο φερμιονίων πρέπει να είναι πάντα αντισυμμετρική.

Επειδή το χωρικό μέρος είναι αναγκαστικά συμμετρικό και ίσο με $\Psi_{χωρ.}(1,2)=\Psi_0(x_1)\Psi_0(x_2)=\pi^{-1/4}e^{-x_1^2/2}\cdot\pi^{-1/4}e^{-x_2^2/2}\rightarrow$

$$\rightarrow\Psi_{χωρ}(1,2)=\pi^{-1/2}e^{-(x_1^2+x_2^2)/2}$$

-6-

η κυματοσυνάρτηση σπιν θα είναι αντισυμμετρική singlet.

$$\chi_s(1,2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\chi_+(1)\chi_-(2)-\chi_+(2)\chi_-(1)\right]$$

Άρα η ολική κυματοσυνάρτηση είναι:

$$\Psi_{ολ}(1,2)=\Psi_{χωρ}(1,2)\chi_s(1,2)\rightarrow\boxed{\Psi_{ολ}(1,2)=\frac{\pi^{-1/2}}{\sqrt{2}}e^{-(x_1^2+x_2^2)/2}\cdot\left[\chi_+(1)\chi_-(2)-\chi_+(2)\chi_-(1)\right]}$$

iii) Όταν τα σωματίδια είναι ταυτοτικά με σπιν $s=0$, δηλαδή μποζόνια σύμφωνα με τη γενικευμένη αρχή Pauli η ολική κυματοσυνάρτηση του συστήματος των δύο μποζονίων πρέπει να είναι πάντα συμμετρική.

Η κυματοσυνάρτηση σπιν είναι υποχρεωτικά συμμετρική, αφού για $s=0$ μπορεί να κατασκευαστεί μόνο το συμμετρικό γινόμενο κυματοσυναρτήσεων σπιν: $\chi(1,2)=\chi_0(1)\chi_0(2)$

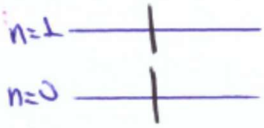
Επίσης το χωρικό μέρος είναι συμμετρικό με τα σωμάτια στην ίδια στάθμη:

$$\Psi_{χωρ.}(1,2)=\Psi_0(x_1)\Psi_0(x_2)=\pi^{-1/2}e^{-(x_1^2+x_2^2)/2}$$

Άρα η ολική κυματοσυνάρτηση είναι:

$$\Psi_{ολ}(1,2) = \Psi_{χωρ.}(1,2)\,\chi(1,2) \longrightarrow \boxed{\Psi_{ολ}(1,2) = \pi^{-1/2} e^{-(x_1^2+x_2^2)/2}\chi_0(1)\chi_0(2)}$$

2) Πρώτη διεγερμένη κατάσταση συστήματος:



Σε κάθε περίπτωση, ανεξαρτήτως είδους σωματίων, το ένα σωματίδιο θα βρίσκεται στη στάθμη $n=0$ και το άλλο στη στάθμη $n=1$, οπότε η ενέργειά τους θα είναι:

$$E_{1ης\,διεγ.} = E_0 + E_1 = \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{3}{2}\hbar\omega = \frac{4}{2}\hbar\omega \longrightarrow \boxed{E_{1ης\,διεγ.} = 2\hbar\omega}$$

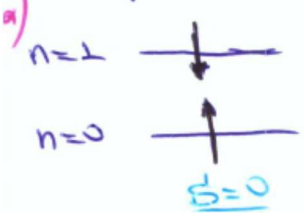
Η χωρική κυματοσυνάρτηση της πρώτης διεγερμένης κατάστασης του συστήματος είναι:

i) Όταν τα σωματίδια είναι διακριτά:

$$\Psi_{δ}(1,2) = \begin{cases} \psi_0(x_1)\psi_1(x_2) = \pi^{-1/4} e^{-x_1^2/2}\sqrt{2}\,\pi^{-1/4} x_2 e^{-x_2^2/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x_2\, e^{-(x_1^2+x_2^2)/2} \\ \psi_1(x_1)\psi_0(x_2) = \sqrt{2}\,\pi^{-1/4} x_1 e^{-x_1^2/2}\cdot \pi^{-1/4} e^{-x_2^2/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x_1\, e^{-(x_1^2+x_2^2)/2} \end{cases}$$

ii) Όταν τα σωματίδια είναι ταυτοτικά με spin $s=\frac{1}{2}$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α)



Όταν $S=0$ (αντιπαράλληλα spin) η κυματοσυνάρτηση spin είναι η αντισυμμετρική singlet: $\chi_S = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_+(1)\chi_-(2) - \chi_-(1)\chi_+(2)\right)$

οπότε η χωρική κυματοσυνάρτηση πρέπει να είναι συμμετρική κι επειδή τα 2 σωμάτια βρίσκονται σε διαφορετικές στάθμες θα είναι:

$$\psi_{\substack{\chi\omega\rho.\\ \sigma\upsilon\mu.}}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_0(1)\psi_1(2) + \psi_1(1)\psi_0(2)\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\left(\pi^{-1/4} e^{-x_1^2/2} \cdot \cancel{\sqrt{2}}\,\pi^{-1/4} x_2 e^{-x_2^2/2} + \cancel{\sqrt{2}}\,\pi^{-1/4} x_1 e^{-x_1^2/2} \cdot \pi^{-1/4} e^{-x_2^2/2}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \psi_{\substack{\chi\omega\rho\\ \sigma\upsilon\mu.}}(1,2) = \pi^{-1/2}(x_1 + x_2)\, e^{-(x_1^2+x_2^2)/2}$$

Άρα η ολική κυματοσυνάρτηση είναι:

$$\psi_{o\lambda}(1,2) = \psi_{\chi\omega\rho.}(1,2)\,\chi_S(1,2) \rightarrow \boxed{\psi_{o\lambda}(1,2) = \frac{\pi^{-1/2}}{\sqrt{2}}(x_1+x_2)\, e^{-(x_1^2+x_2^2)/2}\left(\chi_+(1)\chi_-(2) - \chi_-(1)\chi_+(2)\right)}$$

3| $n=1$ $\uparrow$

$n=2$ $\uparrow$

$S=1$

Όταν $S=1$ (παράλληλα spin) η κυματοσυνάρτηση spin είναι η συμμετρική triplet:

$$\chi_T = \begin{cases} \chi_+(1)\chi_+(2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_+(1)\chi_-(2) + \chi_-(1)\chi_+(2)\right) \\ \chi_-(1)\chi_-(2) \end{cases}$$

οπότε η χωρική κυματοσυνάρτηση πρέπει να είναι αντισυμμετρική δηλαδή:

$$\psi_{\underset{\alpha\nu\tau\iota\sigma\upsilon\mu.}{\chi\omega\rho.}}(1,2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_0(1)\psi_1(2)-\psi_1(1)\psi_0(2)\right)\to\psi_{\chi\omega\rho.}(1,2)=\pi^{-1/2}(x_2-x_1)\,e^{-(x_1^2+x_2^2)/2}$$

Άρα η ολική κυματοσυνάρτηση είναι:

$$\psi_{o\lambda}(1,2)=\psi_{\chi\omega\rho.}(1,2)\,\chi_T\to\boxed{\psi_{o\lambda}(1,2)=\pi^{-1/2}(x_2-x_1)\,e^{-(x_1^2+x_2^2)/2}\begin{cases}\chi_+(1)\chi_+(2)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_+(1)\chi_-(2)+\chi_-(1)\chi_+(2)\right)\\ \chi_-(1)\chi_-(2)\end{cases}}$$

-4-

iii) Όταν τα σωματίδια είναι ταυτοτικά με σπιν $s=0$ σύμφωνα με τη γενικευμένη αρχή Pauli η ολική κυματοσυνάρτηση πρέπει να είναι συμμετρική.

Αλλά επειδή η κυματοσυνάρτηση σπιν για $s=0$ είναι συμμετρική : $\chi(1,2)=\chi_0(1)\chi_0(2)$

το χωρικό μέρος θα είναι συμμετρικό " επειδή τα σωμάτια βρίσκονται σε διαφορετικές στάθμες είναι:

$$\psi_{\underset{\sigma\upsilon\mu.}{\chi\omega\rho.}}(1,2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_0(1)\psi_1(2)+\psi_1(1)\psi_0(2)\right)=\pi^{-1/2}(x_1+x_2)\,e^{-(x_1^2+x_2^2)/2}$$

Άρα η ολική κυματοσυνάρτηση είναι:

$$\psi_{o\lambda}(1,2)=\psi_{\chi\omega\rho}(1,2)\,\chi(1,2)\to\boxed{\psi_{o\lambda}(1,2)=\pi^{-1/2}(x_1+x_2)\,e^{-(x_1^2+x_2^2)/2}\,\chi_0(1)\chi_0(2)}$$