Θέμα

Σωματίδιο μάζας m βρίσκεται στη βασική κατάσταση αρμονικού ταλαντωτή συχνότητας ω.
(α) Εξετάστε ποια είναι η κλασικά επιτρεπτή περιοχή της ορμής ενός σωματιδίου που έχει αυτήν την ενέργεια.
(β) Υπολογίστε την πιθανότητα να βρούμε το σωματίδιο με ορμή εκτός της κλασικά επιτρεπτής περιοχής.

α) Σύμφωνα με το μετασχηματισμό Fourier της $\psi(x)$ το πλάτος πιθανότητας των ορμών είναι: $C(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_p^*(x)\,\psi(x)\,dx$

όπου $\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx}$ η ιδιοσυνάρτηση του τελεστή της ορμής οπότε

$$C(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipx}\,\psi(x)\,dx \quad (1)$$

Οπότε για τη βασική κατάσταση του αρμονικού ταλαντωτή είναι
$\psi(x) = \psi_0(x) = \pi^{-1/4} e^{-x^2/2}$ και η (1) γίνεται:

$$C(p) = \frac{\pi^{-1/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2} - ipx}\,dx \overset{*}{=} \frac{\pi^{-1/4}}{\cancel{\sqrt{2\pi}}} e^{-p^2/2} \cancel{\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2}}}} \rightarrow$$

$$\rightarrow C(p) = \pi^{-1/4} e^{-p^2/2} \quad (2)$$

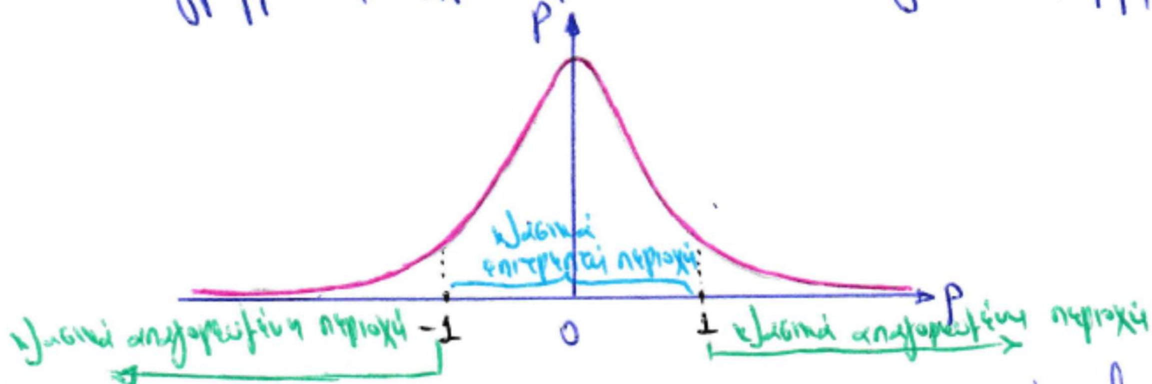
$$* \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx}\,dx = e^{b^2/4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Συνεπώς η πυκνότητα πιθανότητας των ορμών είναι:

$$P(p) = |C(p)|^2 \overset{(2)}{=} \left|\pi^{-1/4} e^{-p^2/2}\right|^2 = \pi^{-1/2} e^{-2p^2/2} \rightarrow$$

$$\rightarrow P(p) = \pi^{-1/2} e^{-p^2} \quad (3)$$

Το διάγραμμα της P(p) έχει την ακόλουθη γκαουσιανή μορφή:



Για ενέργεια της βασικής κατάστασης $E_0=\frac{1}{2}$ το σωματίδιο αποκτά κλασικά μέγιστη ορμή όταν η δυναμική ενέργεια μηδενίζεται δηλαδή στο $x=0$ αφού $V(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$, οπότε:

$$E_0 = K + \cancel{V}^{\,0} \rightarrow E_0 = \frac{p^2}{2\underset{\to 1}{m}} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{p^2}{2} \rightarrow p^2 = 1 \rightarrow \boxed{p = \pm 1}$$

Άρα η κλασικά επιτρεπτή περιοχή της ορμής σωματιδίου στη βασική κατάσταση αρμονικού ταλαντωτή είναι $-1 \le p \le 1$.

β/ Η πιθανότητα εύρεσης του σωματιδίου με ορμή εκτός της κλασικά επιτρεπτής περιοχής $|p|\ge 1$ (δηλ. $p\le -1$, $p\ge 1$) σύμφωνα με την (3) είναι:

υπολογίστε το στο integral-calculator σου

$$P_{(|p|\ge 1)} = \pi^{-1/2}\int_{-\infty}^{-1} e^{-p^2}dp + \pi^{-1/2}\int_{1}^{+\infty} e^{-p^2}dp = 2\pi^{-1/2}\int_{1}^{+\infty} e^{-p^2}dp =$$

$$= 2\cdot\pi^{-1/2}\cdot 0{,}1394 = \frac{0{,}279}{1{,}77} \rightarrow \boxed{P_{(|p|\ge 1)} = 0{,}158 \text{ ή } 15{,}8\%}$$

Μεθοδικά, απλά & κατανοητά…