Μεθοδικά, απλά & κατανοητά...

Θέμα

Σωματίδιο μάζας m βρίσκεται σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| < L \\ +\infty & |x| > L \end{cases}$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στην κατάσταση

$$\psi(x,0) = A(L^2 - x^2)$$

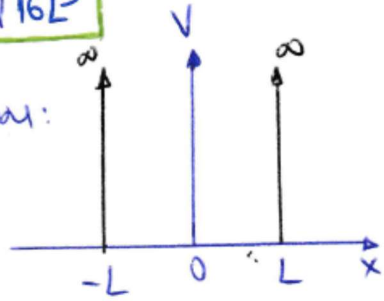
(a) Να υπολογιστεί η σταθερά κανονικοποίησης A.
(b) Για $t = 0$ να υπολογιστεί η αβεβαιότητα της ορμής και η αβεβαιότητα της θέσης και να ελεγχθεί αν ισχύει η σχέση απροσδιοριστίας θέσης-ορμής.
(c) Βρείτε την κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t)$ για $t > 0$.
(d) Να υπολογιστεί η μέση ενέργεια του σωματιδίου.
(e) Σε μια μέτρηση της ενέργειας τη χρονική στιγμή $t > 0$ ποιες οι δυνατές τιμές και ποια η πιθανότητα να βρεθεί η κάθε μία;
Υπόδειξη: Δίνεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

α) Συνθήκη κανονικοποίησης: $\int_{-L}^{L} |\psi(x,0)|^2 dx = 1 \to 2A^2 \int_0^L (L^2 - x^2)^2 dx = 1 \to$

$$\to 2A^2 \int_0^L (L^4 + x^4 - 2L^2x^2)\, dx = 1 \to$$

$$\to 2A^2 \left[L^4 x + \frac{x^5}{5} - 2L^2\frac{x^3}{3}\right]_0^L = 1 \to 2A^2\left(L^5 + \frac{L^5}{5} - \frac{2}{3}L^5\right) = 1 \to$$

$$\to 2A^2 \frac{8}{15} L^5 = 1 \to A^2 = \frac{15}{16L^5} \to \boxed{A = \sqrt{\frac{15}{16L^5}}}$$



Δηλαδή η κανονικοποιημένη κυματοσυνάρτηση είναι:

$$\psi(x,0) = \sqrt{\frac{15}{16L^5}}\,(L^2 - x^2) \quad (1)$$

b) • $\langle p \rangle = \int_{-L}^{L} \psi^* p \psi\, dx = \int_{-L}^{L} \psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dx \overset{(1)}{=}$

$$= -i\hbar \int_{-L}^{L} \sqrt{\frac{15}{16L^5}}(L^2-x^2)\sqrt{\frac{15}{16L^5}}(-2x)\,dx =$$

$$= 2i\hbar \frac{15}{16L^5}\int_{-L}^{L} x(L^2-x^2)\,dx \rightarrow \langle p \rangle = 0 \quad (2)$$

περιττή χ άρτια = περιττή με συμμετρικά όρια.

-17-

$$\bullet \langle p^2 \rangle = \int_{-L}^{L} \psi^* p^2 \psi \, dx = \int_{-L}^{L} \psi^* \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right) dx \overset{(1)}{=}$$

$$= -\hbar^2 \int_{-L}^{L} \sqrt{\frac{15}{16L^5}}(L^2-x^2)\sqrt{\frac{15}{16L^5}}(-2)\,dx = 2\hbar^2 \frac{15}{16L^5}\, 2 \cdot \int_{0}^{L}(L^2-x^2)\,dx =$$

$$= \frac{15\hbar^2}{4L^5}\left[L^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{15\hbar^2}{4L^5}\left(L^3 - \frac{L^3}{3}\right) = \frac{15\hbar^2}{4L^5}\,\frac{2}{3}L^3 \rightarrow$$

$$\rightarrow \langle p^2 \rangle = \frac{5\hbar^2}{2L^2} \quad (3)$$

Άρα η αβεβαιότητα της ορμής είναι:

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} \overset{(2,3)}{=} \sqrt{\frac{5\hbar^2}{2L^2}} \rightarrow \boxed{\Delta p = \sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{\hbar}{L}} \quad (4)$$

$$\bullet \langle x \rangle = \int_{-L}^{L} \psi^* x \psi \, dx \overset{(1)}{=} \int_{-L}^{L} \sqrt{\frac{15}{16L^5}}(L^2-x^2)\, x \sqrt{\frac{15}{16L^5}}(L^2-x^2)\,dx =$$

$$= \frac{15}{16L^5}\int_{-L}^{L} x(L^2-x^2)^2\,dx \rightarrow \langle x \rangle = 0 \quad (5)$$

περιττή χ άρτια = περιττή με συμμετρικά όρια.

• $\langle x^2\rangle = \int_{-L}^{L} \psi^* x^2 \psi \, dx \overset{(1)}{=} \frac{15}{16L^5}\int_{-L}^{L} x^2(L^2-x^2)^2 dx =$

$= \frac{15}{16L^5}\cdot 2\int_{0}^{L} x^2(L^4+x^4-2L^2x^2)dx =$

$= \frac{15}{8L^5}\int_{0}^{L}(x^2L^4+x^6-2L^2x^4)dx = \frac{15}{8L^5}\left[\frac{x^3}{3}L^4+\frac{x^7}{7}-2L^2\frac{x^5}{5}\right]_0^L =$

$= \frac{15}{8L^5}\left(\frac{L^7}{3}+\frac{L^7}{7}-\frac{2L^7}{5}\right) = \frac{15}{8L^5}\,\frac{4}{51}L^7 \rightarrow \langle x^2\rangle = \frac{15}{102}L^2$ (6)

Συνεπώς η αβεβαιότητα θέσης είναι:

$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} \overset{(5,6)}{=} \sqrt{\frac{15}{102}L^2} \rightarrow \boxed{\Delta x = \sqrt{\frac{15}{102}}\cdot L}$ (7)

Είναι: $\Delta x\cdot\Delta p \overset{(4),(7)}{=} \sqrt{\frac{15}{102}}\cancel{L}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{\hbar}{\cancel{L}} = \sqrt{\frac{75}{204}}\hbar = \sqrt{0{,}367}\,\hbar \rightarrow$

$\rightarrow \Delta x\cdot\Delta p = 0{,}6\hbar > \frac{\hbar}{2}$.

Άρα ισχύει η σχέση απροσδιοριστίας θέσης − ορμής.

www.pmoiras.weebly.com panmoiras@gmail.com ☎ 6932 946778

c) Επειδή το σωματίδιο βρίσκεται σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού με ιδιοσυναρτήσεις $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{2L}} \sin\left[\frac{n\pi}{2L}(x+L)\right], n = 1, 2, 3, \ldots$ θα αναπτύξουμε τη δοθείσα κυματοσυνάρτηση $\psi(x,0)$ σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων.

Δηλαδή: $\psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \psi_n(x) \rightarrow \psi(x,0) = C_1\psi_1(x) + C_2\psi_2(x) + \ldots + C_n\psi_n(x) + \ldots \rightarrow$

$$\rightarrow \psi(x,0) = C_1 \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left[\frac{\pi}{2L}(x+L)\right] + C_2 \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left[\frac{2\pi}{2L}(x+L)\right] + \ldots + C_n \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left[\frac{n\pi}{2L}(x+L)\right] + \ldots$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με $\sin\left[\frac{n\pi}{2L}(x+L)\right]$ και ολοκληρώνοντας από $-L$ ως L προκύπτει:

$$\int_{-L}^{L} \psi(x,0) \sin\left[\frac{n\pi}{2L}(x+L)\right] dx = \frac{C_1}{\sqrt{L}} \underbrace{\int_{-L}^{L} \sin\left[\frac{\pi}{2L}(x+L)\right] \sin\left[\frac{n\pi}{2L}(x+L)\right] dx}_{0} +$$

$$+ \frac{C_2}{\sqrt{L}} \underbrace{\int_{-L}^{L} \sin\left[\frac{2\pi}{2L}(x+L)\right] \sin\left[\frac{n\pi}{2L}(x+L)\right] dx}_{0} + \ldots + \frac{C_n}{\sqrt{L}} \underbrace{\int_{-L}^{L} \sin\left[\frac{n\pi}{2L}(x+L)\right] \sin\left[\frac{n\pi}{2L}(x+L)\right] dx}_{L}$$

$$+ \ldots \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_{-L}^{L} \psi(x,0) \sin\left[\frac{n\pi}{2L}(x+L)\right] dx = \frac{C_n}{\sqrt{L}} L \rightarrow C_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^{L} \psi(x,0) \sin\left[\frac{n\pi}{2L}(x+L)\right] dx \rightarrow$$

$$\xrightarrow{(1)} C_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \sqrt{\frac{15}{16L^5}} \int_{-L}^{L} (L^2 - x^2) \sin\left[\frac{n\pi}{2L}(x+L)\right] dx =$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{4L^3}\left[-\frac{8L^3}{n^3\pi^3}\left(n\pi \cancel{\sin(n\pi)} + 2\cos(n\pi) - 2\right)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{4L^3}\,\frac{16L^3}{n^3\pi^3}\left(1-\cos(n\pi)\right) \to c_n = \frac{4\sqrt{15}}{n^3\pi^3}\left(1-\cos(n\pi)\right) \to$$

$$\to c_n = \begin{cases} \frac{4\sqrt{15}}{n^3\pi^3}\left(1-(-1)\right) = \frac{8\sqrt{15}}{n^3\pi^3} \text{ για } n=1,3,5,\ldots \text{ (περιττά)} \\ \text{(αφού } \cos n\pi = -1\text{)} \\ \frac{4\sqrt{15}}{n^3\pi^3}(1-1) = 0, \text{ για } n=2,4,6,\ldots \text{ (άρτια)} \\ \text{(αφού } \cos n\pi = 1\text{)} \end{cases}$$

Δηλαδή το σωματίδιο μπορεί να βρεθεί στις ιδιοκαταστάσεις με περιττό $n=1,3,5,\ldots$ οπότε:

$$\psi(x,0) = c_1\psi_1(x) + c_3\psi_3(x) + c_5\psi_5(x) + \ldots = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} c_n\psi_n(x)$$

Άρα η χρονική εξέλιξη της κυματοσυνάρτησης είναι:

$$\psi(x,t) = \psi(x,0)\,e^{-i\hat{H}t/\hbar} \Rightarrow \boxed{\psi(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} c_n\psi_n(x)\,e^{-iE_nt/\hbar}} \to$$

$$\to \psi(x,t) = c_1\psi_1(x)\,e^{-iE_1t/\hbar} + c_3\psi_3(x)\,e^{-iE_3t/\hbar} + \ldots$$

Σημείωση:

Οι ιδιοσυναρτήσεις και οι ιδιοενέργειες απειρόβαθου πηγαδιού δυναμικού εύρους 2L $(-L<x<L)$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left[\frac{n\pi}{2L}(x+L)\right], \quad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8mL^2} \quad n=1,2,3,\ldots$$

d) Η μέση ενέργεια του σωματιδίου είναι:

$$\langle E\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 E_n = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \left(\frac{8\sqrt{15}}{n^3\pi^3}\right)^2 \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8mL^2} =$$

$$= \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\cancel{64}^{\,8}\cdot 15}{n^6\pi^6} \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{\cancel{8}mL^2} = \frac{120\hbar^2}{\pi^4 mL^2} \underbrace{\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^4}}_{=\frac{\pi^4}{90}} =$$

$$= \frac{120\hbar^2}{\cancel{\pi^4} mL^2} \frac{\cancel{\pi^4}}{90} \rightarrow \boxed{\langle E\rangle = \frac{4\hbar^2}{3mL^2}}$$

e) Σε μια μέτρηση της ενέργειας τη χρονική στιγμή $t>0$ οι δυνατές τιμές είναι $E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{8mL^2}$, $E_3 = \frac{9\pi^2\hbar^2}{8mL^2}$, $E_5 = \frac{25\pi^2\hbar^2}{8mL^2}$, ... (όλες οι περιττές ιδιοενέργειες)

www.pmoiras.weebly.com panmoiras@gmail.com 6932 946778

με πιθανότητα εμφάνισης:

$$P_1 = |c_1|^2 = \left(\frac{8\sqrt{15}}{\pi^3}\right)^2 = \frac{960}{\pi^6} = \frac{960}{961,389} \rightarrow P_1 = 0,9985 \text{ ή } 99,85\%$$

$$P_3 = |c_3|^2 = \left(\frac{8\sqrt{15}}{27\pi^3}\right)^2 = \frac{1,317}{\pi^6} = \frac{1,317}{961,389} \rightarrow P_3 = 0,00137 \text{ ή } 0,137\%$$

$$P_5 = |c_5|^2 = \left(\frac{8\sqrt{15}}{125\pi^3}\right)^2 = \frac{0,307}{\pi^6} = \frac{0,307}{961,389} \rightarrow P_5 = 0,00032 \text{ ή } 0,032\%$$

⋮