

ΑΝΤΙΣΤΡΕΠΤΕΣ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΘΕΩΡΙΑ

Περιεχόμενα

1. Μελέτη Ισόχωρης μεταβολής
2. Μελέτη Ισοβαρής μεταβολής
3. Μελέτη Ισόθερμης μεταβολής
4. Μελέτη αδιαβατικής μεταβολής
5. Πολυτροπική μεταβολή
6. Συγκεντρωτικός Πίνακας
7. Διάγραμμα Ιδανικού Αερίου
8. Κυκλικές διαδικασίες

1. Μελέτη Ισόχωρης μεταβολής

Ισόχωρη μεταβολή είναι η μεταβολή κατά την οποία ο όγκος του αερίου διατηρείται

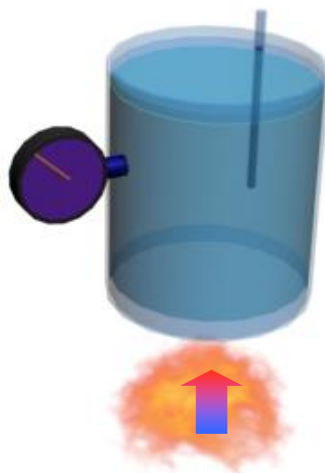
$$V = \text{σταθερός}$$

Πειραματική διάταξη - Μελέτη της μεταβολής

Το αέριο είναι εγκλωβισμένο σε δοχείο με σταθερά τοιχώματα.

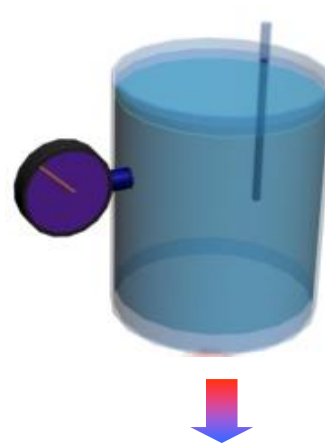
Στη διάρκεια της μεταβολής το αέριο ανταλλάσει με το περιβάλλον του θερμότητα κατά αντιστρεπτό τρόπο (πρακτικά πολύ αργά)

Ισόχωρη θέρμανση



$$\begin{aligned}dP &> 0 \\dT &> 0 \\dV &= 0 \\ \delta Q &> 0 \\ W &= 0 \\ dU &> 0\end{aligned}$$

Ισόχωρη ψύξη



$$\begin{aligned}dP &< 0 \\dT &< 0 \\dV &= 0 \\ \delta Q &< 0 \\ W &= 0 \\ dU &< 0\end{aligned}$$

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων έχουμε:

$$PV = NkT \Rightarrow P = \frac{Nk}{V} T \Rightarrow$$

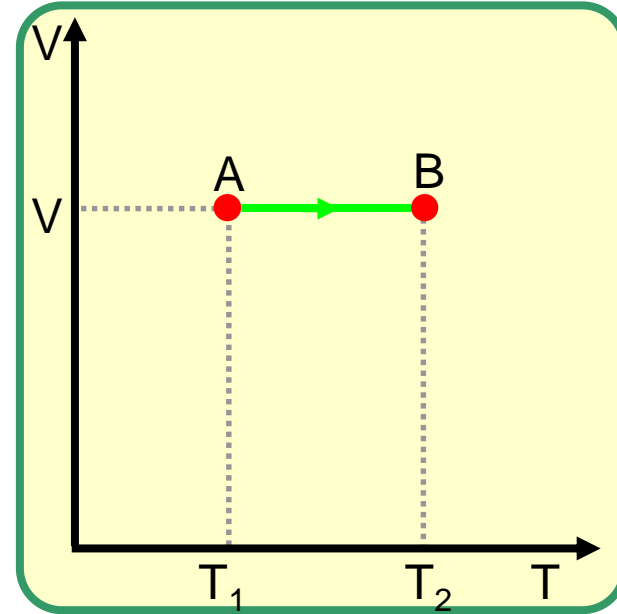
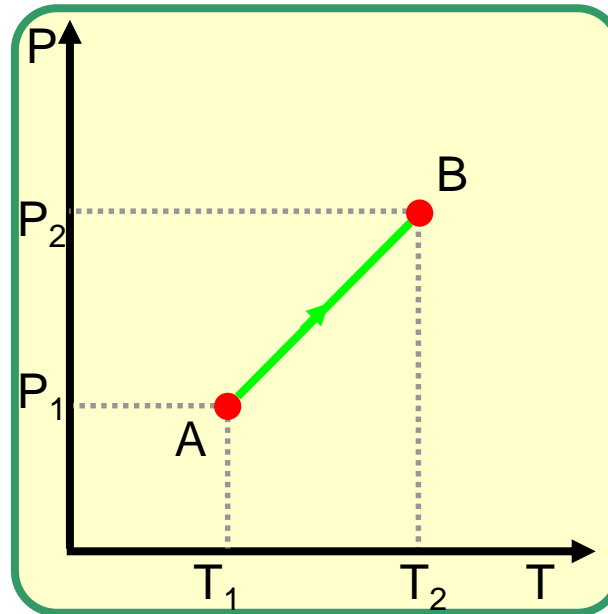
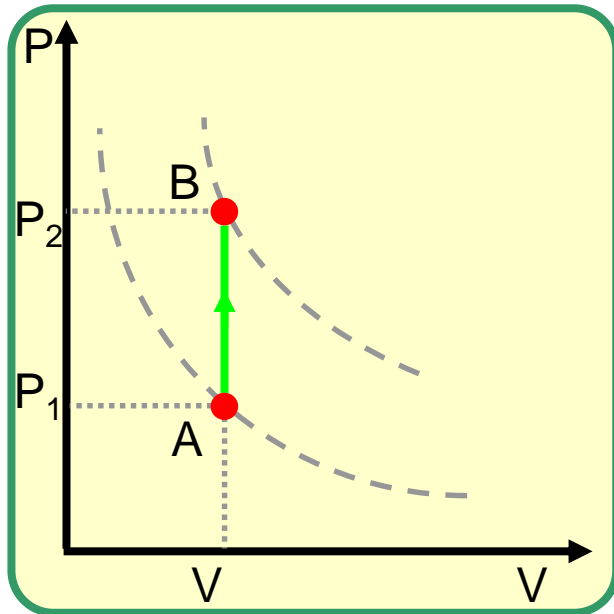
$$\frac{P}{T} = \text{σταθ.}$$

Όταν ο όγκος ορισμένης ποσότητας ιδανικού αερίου παραμένει σταθερός, η πίεση μεταβάλλεται ανάλογα με τη θερμοκρασία.

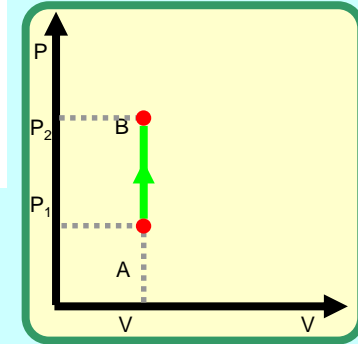
(Νόμος Charles)

Εφαρμόζοντας το νόμο της μεταβολής σε δύο διαφορετικές καταστάσεις του αερίου A(P_1, V, T_1) και B(P_2, V, T_2) προκύπτει:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Ισόχωρη Θέρμανση $A \rightarrow B$, Ισόχωρη ψύξη $B \rightarrow A$ 

Επειδή ο όγκος του αερίου παραμένει σταθερός δεν θα έχουμε παραγωγή ή κατανάλωση έργου.



Έργο

$$\delta W = 0$$

$$W = 0$$

Από τον ορισμό της θερμοχωρητικότητας υπό σταθερό όγκο για ν moles θα έχουμε:

$$\nu C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \Rightarrow$$

Μεταβολή της
εσωτερικής
ενέργειας

$$dU = \nu C_V dT$$

$$\Delta U = \nu C_V \Delta T$$

Από τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο θα έχουμε:

$$\delta Q = dU + \delta W \Rightarrow \delta Q = dU$$

Θερμότητα

$$\delta Q = \nu C_V dT$$

$$Q = \nu C_V \Delta T$$

2. Μελέτη Ισοβαρής μεταβολής

Ισόβαρης μεταβολή είναι η μεταβολή κατά την οποία η πίεση του αερίου διατηρείται σταθερή.

$$P = \text{σταθερή}$$

Πειραματική διάταξη - Μελέτη της μεταβολής

Το αέριο είναι εγκλωβισμένο σε δοχείο που κλείνει με έμβολο που μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Πάνω στο έμβολο υπάρχει σώμα $P = P_0 + \frac{B}{S}$ βάρους B . Το έμβολο αρχικά ισορροπεί και η πίεση που ασκείται στο αέριο είναι:

Προσφέρουμε στο αέριο πολύ μικρά ποσά θερμότητας κατά αντιστρεπτό τρόπο, οπότε η πίεσή του αυξάνει και γίνεται οριακά μεγαλύτερη της εξωτερικής. Το έμβολο μετακινείται προς τα πάνω μέχρι εξίσωσης της πίεσης του αερίου με την εξωτερική.

Ισόβαρης εκτόνωση - θέρμανση Ισόβαρης συμπίεση - ψύξη



$$\begin{aligned} dP &= 0 \\ dT &> 0 \\ dV &> 0 \\ \delta Q &> 0 \\ \delta W &> 0 \\ dU &> 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} dP &= 0 \\ dT &< 0 \\ dV &< 0 \\ \delta Q &< 0 \\ \delta W &< 0 \\ dU &< 0 \end{aligned}$$

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων έχουμε:

$$PV = NkT \Rightarrow V = \frac{Nk}{P} T \Rightarrow$$

$$\frac{V}{T} = \text{σταθ.}$$

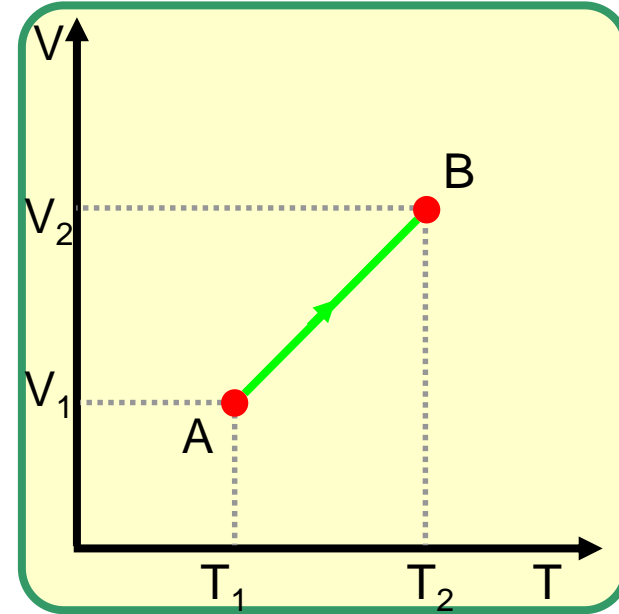
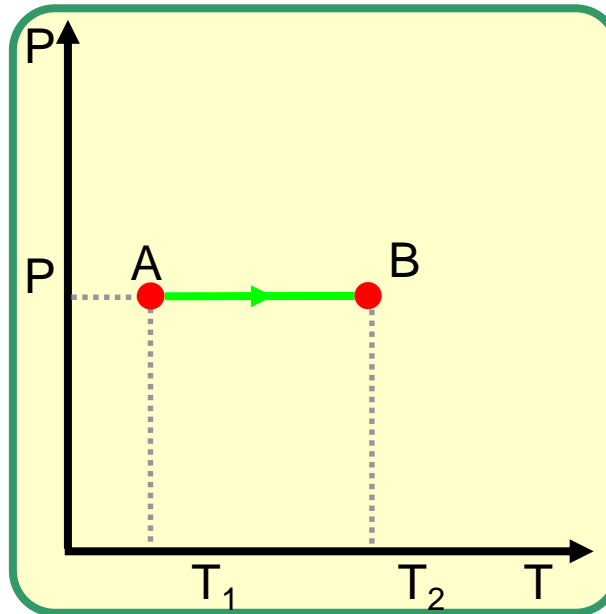
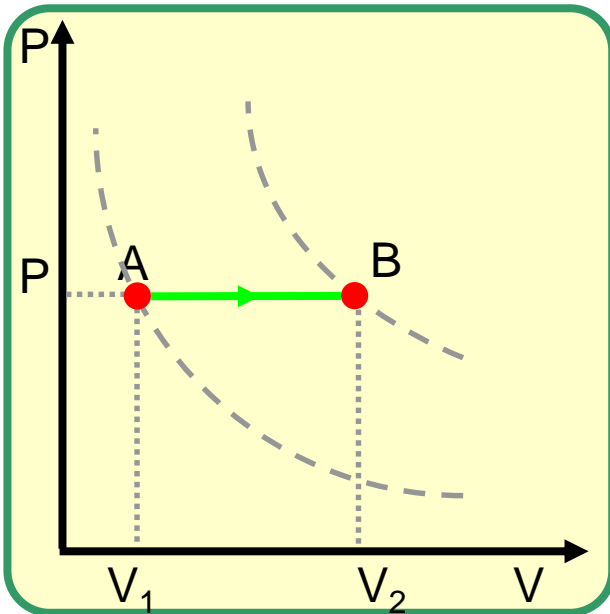
Όταν η πίεση ορισμένης ποσότητας ιδανικού αερίου παραμένει σταθερή, ο όγκος μεταβάλλεται ανάλογα με τη θερμοκρασία.

(Νόμος Gay - Lussac)

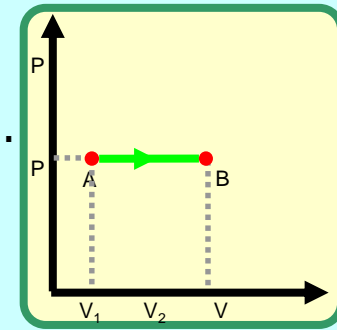
Εφαρμόζοντας το νόμο της μεταβολής σε δύο διαφορετικές καταστάσεις του αερίου $A(P, V_1, T_1)$ και $B(P, V_2, T_2)$ προκύπτει:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Ισόβαρης εκτόνωση – θέρμανση $A \rightarrow B$, Ισόβαρης συμπίεση - ψύξη $B \rightarrow A$



Κατά την ισοβαρή εκτόνωση (θέρμανση αερίου) η θερμότητα δQ μετατρέπεται σε έργο και μεταβάλλει την εσωτερική ενέργεια του αερίου.



Έργο

$$\delta W = PdV \quad W = \int PdV = P\Delta V = \nu R\Delta T$$

Η θερμοχωρητικότητα υπό σταθερό όγκο θα ισχύει για κάθε διαδικασία έτσι, για ν moles θα έχουμε:

$$\nu C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \Rightarrow$$

Μεταβολή της
εσωτερικής
ενέργειας

$$dU = \nu C_V dT$$

$$\Delta U = \nu C_V \Delta T$$

Από τον ορισμό της θερμοχωρητικότητας υπό σταθερή πίεση θα έχουμε, για ν moles θα έχουμε:

$$\nu C_P = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_P$$

Θερμότητα

$$\delta Q = \nu C_P dT$$

$$Q = \nu C_P \Delta T$$

Ισόθερμη είναι η μεταβολή κατά τη διάρκεια της οποίας η θερμοκρασία του αερίου παραμένει σταθερή.

$$T = \text{σταθερή}$$

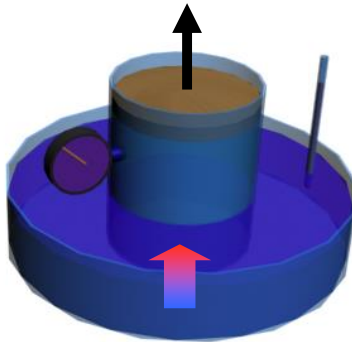
Πειραματική διάταξη - Μελέτη της μεταβολής

Θεωρούμε ποσότητα ιδανικού αερίου που περιέχεται σε δοχείο. Τα τοιχώματα του δοχείου είναι θερμοαγωγίμα, ενώ το έμβολο μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές, φέρνουμε τα σύστημα σε επαφή με δεξαμενή θερμότητας θερμοκρασίας T , με την οποία μπορεί να ανταλλάσει ποσά θερμότητας ώστε τελικά το αέριο και η δεξαμενή να έχουν την ίδια θερμοκρασία.

Μετακινούμε το έμβολο πολύ αργά ώστε να συμπιέζεται. Η θερμοκρασία του αερίου τείνει να αυξηθεί, οπότε ρέει θερμότητα από το αέριο προς τη δεξαμενή ώστε η θερμοκρασία του αερίου να εξισωθεί με αυτή της δεξαμενής.

Κατά τη διάρκεια της ισόθερμης μεταβολής το αέριο ανταλλάσει θερμότητα με το περιβάλλον του (δεξαμενή), ώστε σε θερμοκρασία του να παραμένει σταθερή.

Ισόθερμη εκτόνωση



$$dP < 0$$

$$dT = 0$$

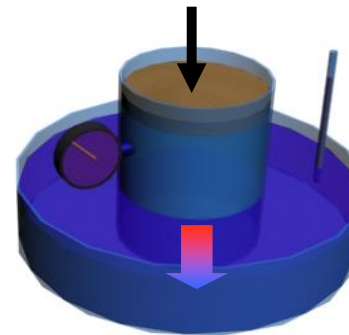
$$dV > 0$$

$$\delta Q > 0$$

$$\delta W > 0$$

$$dU = 0$$

Ισόθερμη συμπίεση



$$dP > 0$$

$$dT = 0$$

$$dV < 0$$

$$\delta Q < 0$$

$$\delta W < 0$$

$$dU = 0$$

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων έχουμε:

$$PV = NkT \Rightarrow$$

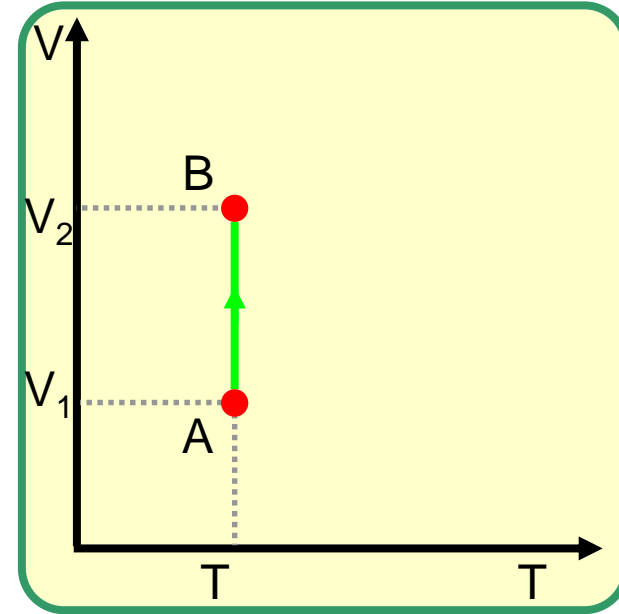
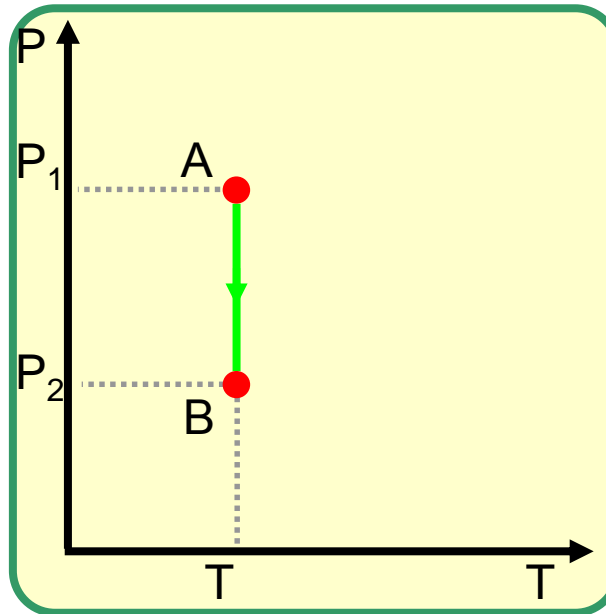
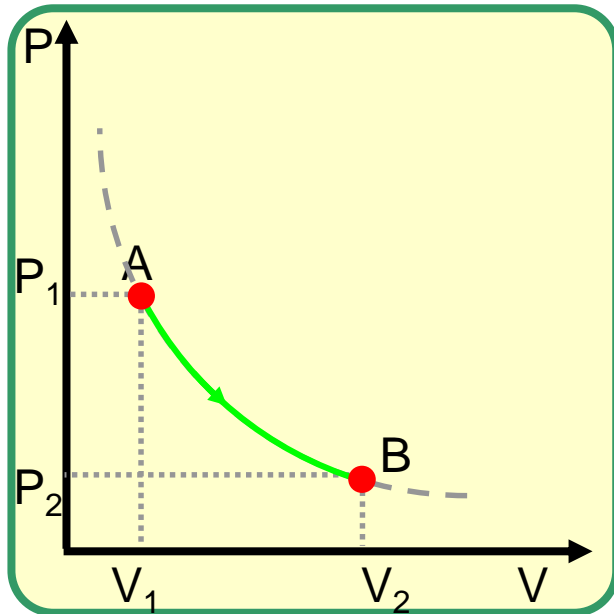
$$PV = \text{σταθ.}$$

Όταν η θερμοκρασία του αερίου παραμένει σταθερή η πίεση μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα του όγκου.

(Νόμος Boyle)

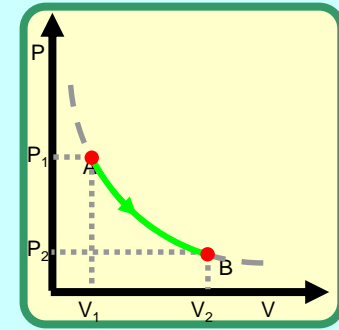
Εφαρμόζοντας το νόμο της μεταβολής σε δύο διαφορετικές καταστάσεις του αερίου A(P_1, V_1, T) και B(P_2, V_2, T) προκύπτει:

$$P_2 V_2 = P_1 V_1 \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{V_1}{V_2}$$

Ισόθερμη εκτόνωση $A \rightarrow B$, Ισόθερμη συμπίεση $B \rightarrow A$ 

Κατά την ισόθερμη εκτόνωση (θέρμανση αερίου) το έργο δW μετατρέπεται σε θερμότητα δQ .

Έργο $\delta W = PdV$ $W = \int PdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{vRT}{V} dV = vRT \ln \frac{V_2}{V_1}$



Επειδή η θερμοκρασία παραμένει σταθερή, προκύπτει:

Μεταβολή της
εσωτερικής
ενέργειας

$$dU = 0$$

$$\Delta U = 0$$

Από τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο θα έχουμε:

$$\delta Q = dU + \delta W \Rightarrow \delta Q = \delta W$$

Θερμότητα

$$\delta Q = \delta W$$

$$Q = W = vRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

4. Μελέτη αδιαβατικής μεταβολής

Αδιάβατη μεταβολή είναι η μεταβολή κατά την οποία το αέριο δεν ανταλλάσει θερμότητα με το περιβάλλον του

$$\delta Q = 0$$

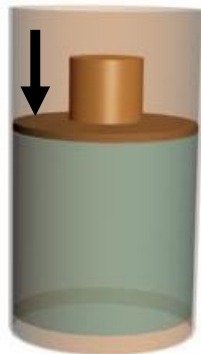
Πειραματική διάταξη - Μελέτη της μεταβολής

Το αέριο περιέχεται σε δοχείο με θερμομονωτικά τοιχώματα και κλείνεται από έμβολο επίσης θερμομονωτικό (αδιαβατικό).

Έτσι δεν επιτρέπονται ανταλλαγές θερμότητας του αερίου με το περιβάλλον.

Μετακινώντας το έμβολο πολύ αργά, συμπιέζουμε το αέριο προσφέροντας του ενέργεια μέσω παραγωγής έργου, που έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της εσωτερικής ενέργειας του αερίου και συνεπώς τη θέρμανση του.

αδιαβατική συμπίεση - θέρμανση



$$dP > 0$$

$$dT > 0$$

$$dV < 0$$

$$\delta Q = 0$$

$$\delta W < 0$$

$$dU > 0$$

Αδιαβατική εκτόνωση - ψύξη



$$dP < 0$$

$$dT < 0$$

$$dV > 0$$

$$\delta Q = 0$$

$$\delta W > 0$$

$$dU < 0$$

Νόμος αδιαβατικής (Νόμος Poisson)

Σε μια αδιαβατική μεταβολή καμία από τις μεταβλητές P , V , T δεν παραμένει σταθερή. Αποδεικνύεται ότι ο νόμος της αδιαβατικής μεταβολής είναι:

$$PV^\gamma = \text{σταθ.} \quad \text{όπου} \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

ή $TV^{\gamma-1} = \text{σταθ.}$

ή $T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{σταθ.}$

(Νόμος
Poisson)

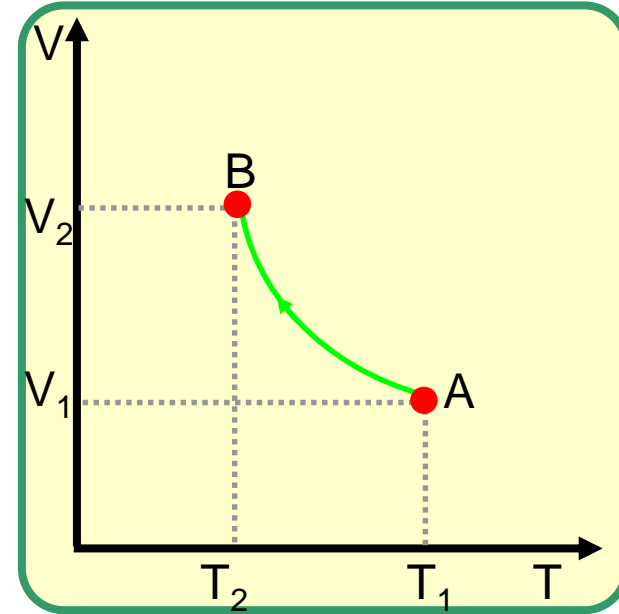
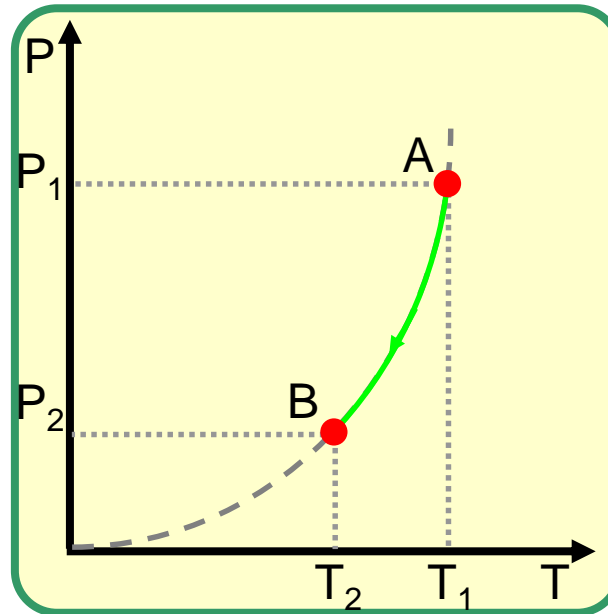
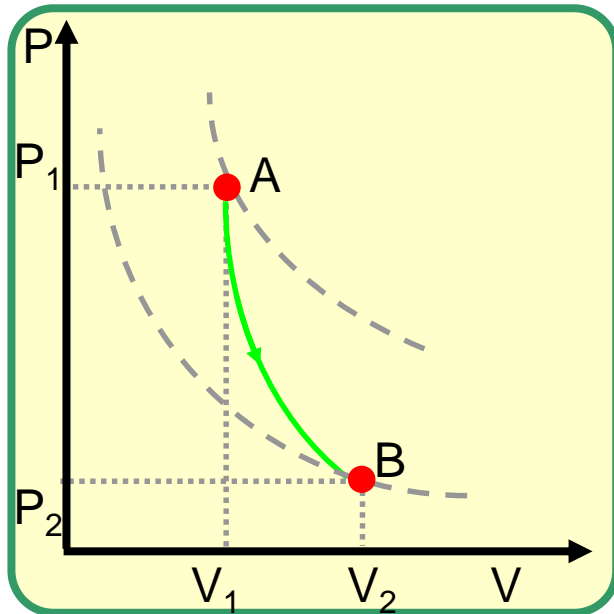
Εφαρμόζοντας το νόμο της μεταβολής σε δύο διαφορετικές καταστάσεις του αερίου $A(P_1, V_1, T_1)$ και $B(P_2, V_2, T_2)$ προκύπτει:

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$$

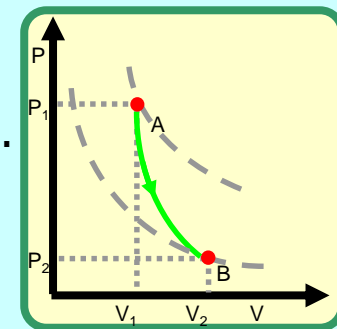
$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

$$T_1^\gamma P_1^{1-\gamma} = T_2^\gamma P_2^{1-\gamma}$$

αδιαβατική εκτόνωση – ψύξη $A \rightarrow B$, αδιαβατική συμπίεση - θέρμανση $B \rightarrow A$



Κατά την ισοβαρή εκτόνωση (θέρμανση αερίου) η θερμότητα δQ μετατρέπεται σε έργο και μεταβάλλει την εσωτερική ενέργεια του αερίου.



Έργο

$$\delta W = PdV$$

$$W = \int PdV \stackrel{PV^\gamma = P_1V_1^\gamma}{=} P_1V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{P_1V_1^\gamma}{1-\gamma} \left[V_2^{-\gamma+1} - V_1^{-\gamma+1} \right]$$

$$\stackrel{P_1V_1 = \nu RT_1}{=} \frac{\nu RT_1 V_1^\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma \right] \stackrel{T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}}{=} \nu R \frac{T_2 - T_1}{\gamma-1} \quad \text{ή} \quad W = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\gamma-1}$$

Ισχύει πάντα:

Μεταβολή της
εσωτερικής
ενέργειας

$$dU = \nu C_V dT$$

$$\Delta U = \nu C_V \Delta T$$

Στην αδιάβατη μεταβολή το αέριο δεν ανταλλάσει θερμότητα με το περιβάλλον του

Θερμότητα

$$\delta Q = 0$$

$$Q = 0$$

5. Πολυτροπική μεταβολή

Όταν η θερμοχωρητικότητα είναι σταθερή σε μία διαδικασία τότε η μεταβολή ονομάζεται **πολυτροπική**.

Παρατήρηση

Όλες οι προηγούμενες μεταβολές που μελετήσαμε είναι πολυτροπικές.

Η εξίσωση της πολυτροπικής διαδικασίας εφόσον η θερμοχωρητικότητα είναι σταθερή, προκύπτει από τον 1^ο θερμοδυναμικό νόμο ως εξής:

$$\delta Q = dU + \delta W \Rightarrow vC dT = vC_v dT + PdV \xrightarrow[\substack{R=C_p-C_v \\ PV=vRT}]{\Rightarrow} \frac{dT}{T} + \underbrace{\frac{C_p - C_v}{C_v - C}}_{s-1} \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow$$

$$\int \frac{dT}{T} + (s-1) \int \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow \ln T + (s-1) \ln V = \text{const} \Rightarrow$$

$$\ln T + (s-1) \ln V = \text{const} \Rightarrow TV^{s-1} = \text{σταθ.}$$

$$PV^s = \text{σταθ.}$$

Εξίσωση Πολυτροπικής

ο συντελεστής s ονομάζεται συντελεστής πολυτροπικής

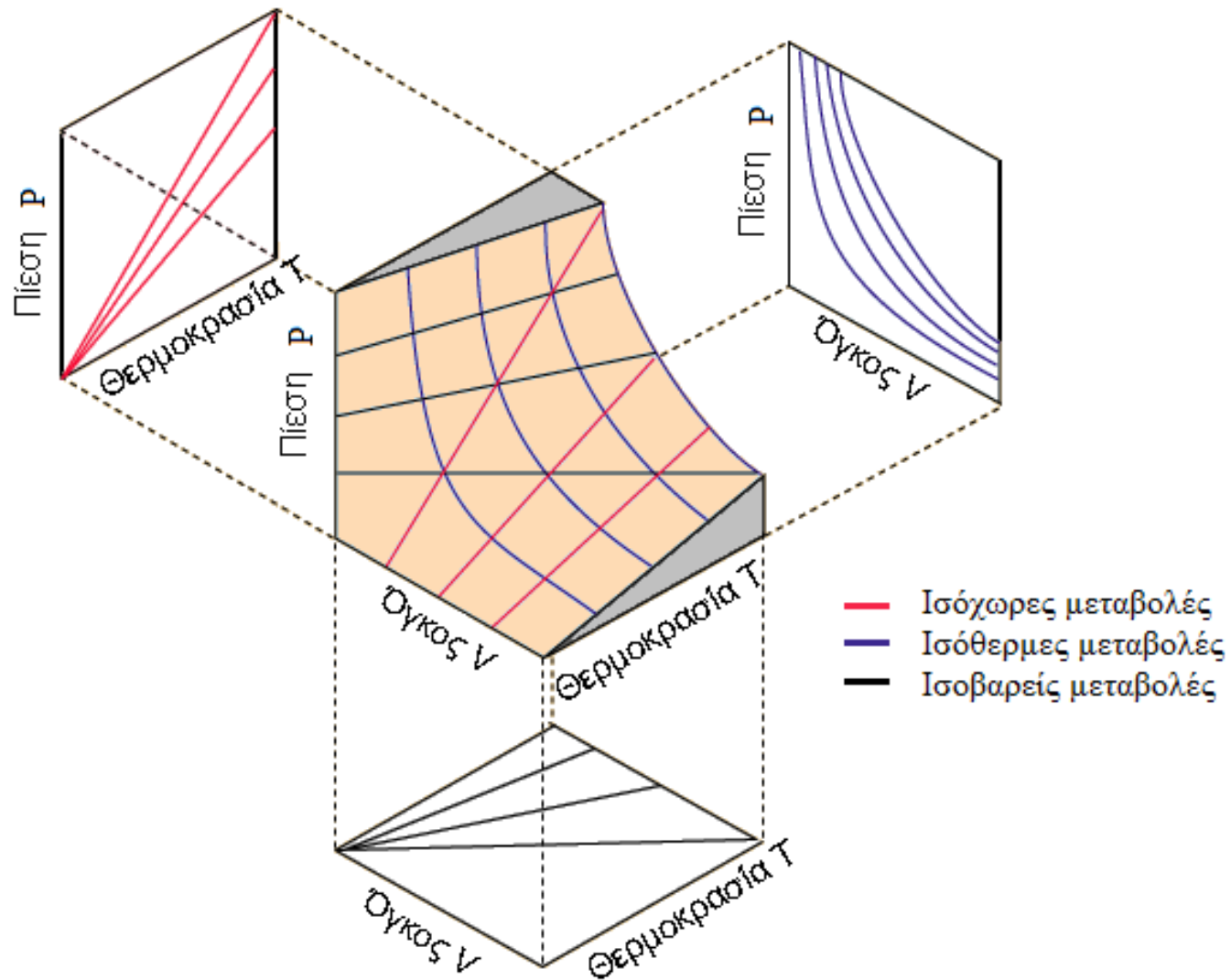
$$s - 1 = \frac{C_P - C_V}{C_V - C} \Rightarrow s = 1 + \frac{C_P - C_V}{C_V - C} \Rightarrow s = \frac{C - C_P}{C - C_V}$$

Θερμοχωρητικότητα	s	μεταβολή	
0	γ	Αδιαβατική	$\delta Q = 0$
∞	1	Ισόθερμη	$dT = 0$
C_P	0	Ισοβαρής	$dP = 0$
C_V	$\pm\infty$	Ισόχωρη	$dV = 0$

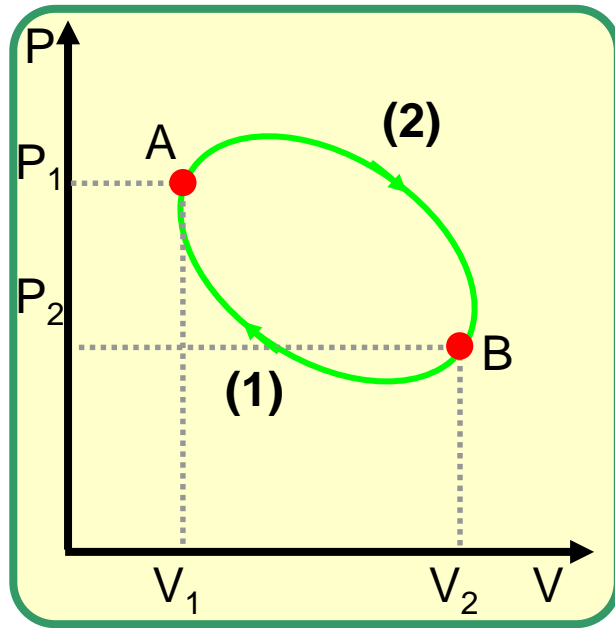
6. Συγκεντρωτικός Πίνακας

	Ισόχωρη	Ισοβαρής	Ισόθερμη	Αδιαβατική	Πολυτροπική
Εξίσωση διαδικασίας	$V = \text{const}$	$P = \text{const}$	$T = \text{const}$	$\delta Q = 0$	$C = \text{const}$
Σχέσεις μεταξύ των βασικών μεγεθών	$\frac{P}{T} = \text{const}$	$\frac{V}{T} = \text{const}$	$PV = \text{const}$	$TV^{\gamma-1} = \text{const}$ $T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{const}$ $PV^\gamma = \text{const}$	$PV^s = \text{const}$
Έργο στην διαδικασία	$\delta W = 0$ $W = 0$	$\delta W = PdV = \nu R dT$ $W = P(V_2 - V_1)$ $= \nu R(T_2 - T_1)$	$\delta W = PdV$ $W = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$	$\delta W = PdV = -dU$ $W = \nu C_V (T_1 - T_2)$ $= \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{1 - \gamma}$	$\delta W = PdV$ $W = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{1 - n}$
Θερμότητα	$\delta Q = \nu C_V dT$ $\Delta Q = \nu C_V (T_2 - T_1)$	$\delta Q = \nu C_P dT$ $\Delta Q = \nu C_P (T_2 - T_1)$	$\delta Q = \delta W$ $\Delta Q = W$	$\delta Q = 0$ $\Delta Q = 0$	$\delta Q = \nu C dT$ $\Delta Q = \nu C (T_2 - T_1)$
Μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας	$dU = \nu C_V dT$ $\Delta U = \nu C_V (T_2 - T_1)$	$dU = \nu C_V dT$ $\Delta U = \nu C_V (T_2 - T_1)$	$dU = 0$ $\Delta U = 0$	$dU = \nu C_V dT = -\delta W$ $\Delta U = \nu C_V (T_2 - T_1) = -W$	$dU = \nu C_V dT$ $\Delta U = \nu C_V (T_2 - T_1)$
Θερμοχωρητικότητα	$C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$	$C_P = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$	$C_r = \pm \infty$	$C_{\alpha\beta} = 0$	$C = \frac{s - \gamma}{s - 1} C_V$
Συντελεστής πολυτροπικής	$s = \pm \infty$	$s = 0$	$s = 1$	$s = \gamma = \frac{C_P}{C_V}$	$s = \frac{C - C_P}{C - C_V}$

7. Διάγραμμα Ιδανικού Αερίου



8. Κυκλικές διαδικασίες



Το αέριο πραγματοποιεί **κυκλική μεταβολή**, όταν μετά από μία σειρά διαδοχικών αντιστρεπτών μεταβολών επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση.

Σε μία κυκλική μεταβολή η αρχική και τελική κατάσταση ταυτίζονται με αποτέλεσμα η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας να είναι μηδέν.

$$\Delta U_{A \rightarrow B \rightarrow A} = 0$$

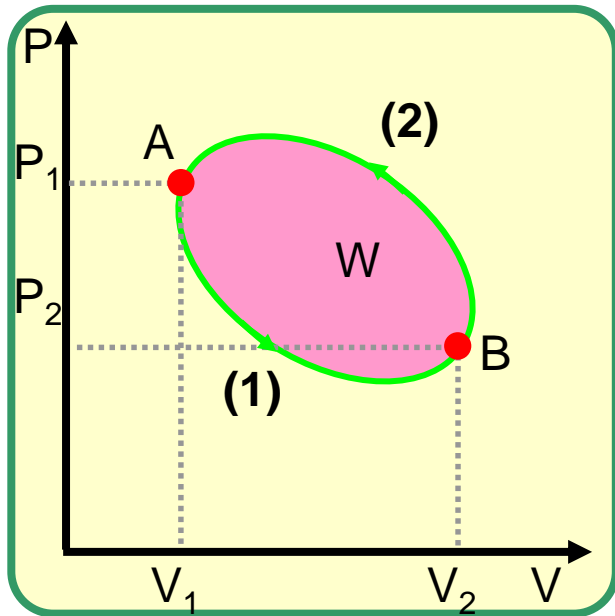
$$\oint dU = 0$$

Σε αυτό το σημείο φαίνεται μία ξεκάθαρη διαφορά μεταξύ των εννοιών **απειροστή ποσότητα** με **απειροστή μεταβολή**.

Η απειροστή μεταβολή γράφεται με την βοήθεια ολικών διαφορικών, όπου σε μία κλειστή διαδρομή το ολοκλήρωμα του μηδενίζεται.

Ενώ από τον πρώτο Θερμοδυναμικό Νόμο έχουμε:

$$\delta Q = dU + \delta W \Rightarrow \oint \delta Q = \oint dU + \oint \delta W \Rightarrow \oint \delta Q = \oint \delta W = W_{A \rightarrow B \rightarrow A}$$



Τόσο το έργο όσο η θερμότητα δεν χαρακτηρίζουν μία κατάσταση του αερίου, έτσι το ολοκλήρωμα που γράψαμε για τα δQ και δW είναι ουσιαστικά το άθροισμα πολύ μικρών ποσοτήτων $\delta Q, \delta W$

$$\oint \delta Q = \oint \delta W = W_{A \rightarrow B \rightarrow A}$$

Το έργο σε έναν κύκλο είναι ίσο με το εμβαδό που περικλείεται ανάμεσα από τις καμπύλες 1 και 2.

Το έργο που παράγεται σε έναν κύκλο είναι ίσο με την ποσότητα θερμότητας που προσφέραμε στο σύστημα