

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΤΗΣ ΚΥΜΑΤΟΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ Ψ ΣΕ ΣΕΙΡΑ

Κάθε κυματοσυνάρτηση $\psi(x)$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των ορθοκανονικών ιδιοσυναρτήσεων $\psi_n(x)$ του τελεστή \hat{A} .
Δηλαδή:

$$\psi(x) = \sum_n c_n \psi_n(x) = c_1 \psi_1(x) + c_2 \psi_2(x) + \dots + c_n \psi_n(x)$$

Η πιθανότητα κατάληψης του συστήματος στην ιδιοκατάσταση $\psi_n(x)$ ισούται

με :

$$P_n = |c_n|^2$$

Προφανώς η ολική πιθανότητα θα ισούται με την μονάδα:

$$\sum_n P_n = \sum_n |c_n|^2 = 1$$

Οπότε η συνθήκη κανονικοποίησης, αντί για τη χρήση των γνωστών ολοκληρωμάτων, έχει την ισοδύναμη σχέση:

$$\langle \psi(x) | \psi(x) \rangle = 1 \Rightarrow |c_1|^2 + |c_2|^2 + \dots + |c_n|^2 = 1$$

Αν a_1, a_2, \dots, a_n είναι οι ιδιοτιμές του τελεστή \hat{A} για τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ τότε η μέση τιμή του \hat{A} ως προς την $\psi(x)$, αν αυτή είναι κανονικοποιημένη, δίνεται από τη σχέση:

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi(x) | \hat{A} | \psi(x) \rangle = |c_1|^2 a_1 + |c_2|^2 a_2 + \dots + |c_n|^2 a_n$$

Επίσης ισχύει:

$$\langle \hat{A}^n \rangle = \langle \psi(x) | \hat{A}^n | \psi(x) \rangle = |c_1|^2 a_1^n + |c_2|^2 a_2^n + \dots + |c_n|^2 a_n^n$$



ΑΣΚΗΣΗ 1

(α) Έστω $\psi(x)$ η κυματοσυνάρτηση που περιγράφει την κατάσταση ενός φυσικού συστήματος. Πώς θα υπολογίσετε την πιθανότητα να προκύψει από μια μέτρηση του μεγέθους A η ιδιοτιμή $a = a_k$, αν γνωρίζετε τις ιδιοτιμές a_n και τις ιδιοσυναρτήσεις $\psi_n(x)$ του μεγέθους A .

(β) Σας δίδεται η κατάσταση υπέρθεσης

$$\psi = \frac{4}{5}\psi_1 + \frac{3}{5}\psi_2$$

όπου ψ_1 και ψ_2 είναι οι ιδιοσυναρτήσεις φυσικού μεγέθους A με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 3$ και $\lambda_2 = 5$ αντίστοιχα. Υπολογίστε την μέση τιμή $\langle A \rangle$ και την αβεβαιότητα ΔA στην δοσμένη κατάσταση.

ΑΣΚΗΣΗ 2

(β) Σας δίδεται η κατάσταση υπέρθεσης

$$\psi = \frac{1}{3}\psi_1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\psi_2$$

όπου ψ_1 και ψ_2 είναι οι ιδιοσυναρτήσεις φυσικού μεγέθους A με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 3$ και $\lambda_2 = 6$ αντίστοιχα. Υπολογίστε την μέση τιμή $\langle A \rangle$ και την αβεβαιότητα ΔA στην δοσμένη κατάσταση.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Σας δίδεται η κατάσταση υπέρθεσης

$$\psi = \frac{3}{5}\psi_1 + \frac{4}{5}\psi_2$$

όπου ψ_1 και ψ_2 είναι οι ιδιοσυναρτήσεις φυσικού μεγέθους A με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 2$ αντίστοιχα. Υπολογίστε την μέση τιμή $\langle A \rangle$ και την αβεβαιότητα ΔA στην δοσμένη κατάσταση.

ΑΣΚΗΣΗ 4

(β) Σας δίδεται η κατάσταση υπέρθεσης

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{5}}\psi_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\psi_2$$

όπου ψ_1 και ψ_2 είναι οι ιδιοσυναρτήσεις φυσικού μεγέθους A με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 6$ αντίστοιχα. Υπολογίστε την μέση τιμή $\langle A \rangle$ και την αβεβαιότητα ΔA στην δοσμένη κατάσταση.

ΑΣΚΗΣΗ 5

(β) Σας δίδεται η κατάσταση υπέρθεσης

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_2$$

όπου ψ_1 και ψ_2 είναι οι ιδιοσυναρτήσεις φυσικού μεγέθους A με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 6$ αντίστοιχα. Υπολογίστε την μέση τιμή $\langle A \rangle$ και την αβεβαιότητα ΔA στην δοσμένη κατάσταση.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Σας δίδεται η κατάσταση υπέρθεσης

$$\psi = \frac{1-i}{2}\psi_1 + N_2\psi_2$$

όπου ψ_1 και ψ_2 είναι οι ιδιοσυναρτήσεις φυσικού μεγέθους A με ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Υπολογίστε την μέση τιμή $\langle A \rangle$ και την αβεβαιότητα ΔA στην δεδομένη κατάσταση ψ , συναρτήσει της πιθανότητας P_2 , όπου P_2 είναι η πιθανότητα μέτρηση του μεγέθους A να δώσει την τιμή λ_2 .

ΑΣΚΗΣΗ 7

Σας δίδεται η κατάσταση υπέρθεσης

$$\psi = \frac{3+2i}{4}\psi_1 + N_2\psi_2$$

όπου ψ_1 και ψ_2 είναι οι κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις φυσικού μεγέθους A με ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Υπολογίστε την μέση τιμή $\langle A \rangle$ και την αβεβαιότητα ΔA στην δεδομένη κατάσταση ψ .

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

