ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΑΝΑΚΛΑΣΗ & ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΥΜΑΤΩΝ
ΣΕ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑ ΧΟΡΔΗΣ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

EMC^2

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 1

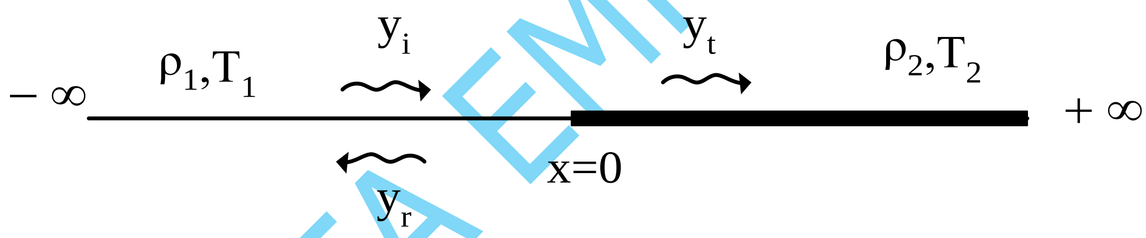
Μια χορδή απείρου μήκους έχει γραμμική πυκνότητα ρ_1 και τείνεται με τάση T_1 για $-\infty < x < 0$, ενώ έχει γραμμική πυκνότητα ρ_2 και τείνεται με τάση T_2 για $0 < x < +\infty$. Ένα αρμονικό ημιτονικό κύμα διαδίδεται από αριστερά και προσπίπτει στην ασυνέχεια στο x=0.

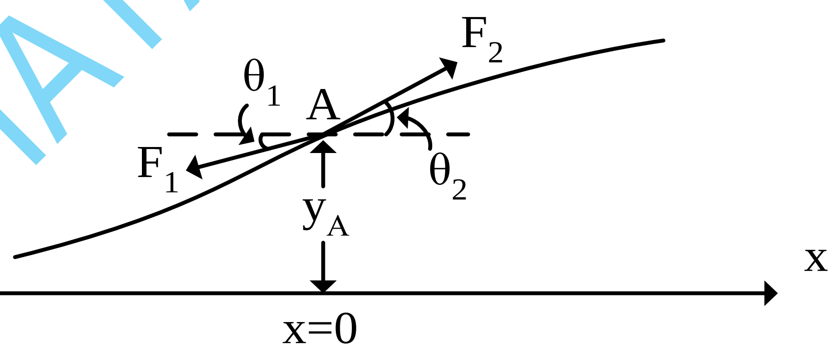
α) Δείξτε ότι η εγκάρσια δύναμη επαναφοράς στο σημείο ένωσης x=0 ικανοποιεί τη συνθήκη:
$$T_1\frac{\partial y_1}{\partial x} = T_2\frac{\partial y_2}{\partial x}$$
όπου y_1 και y_2 είναι οι κυματοσυναρτήσεις των συνιστάμενων κυμάτων στις δύο περιοχές.

β) Αν $T_1 = T_2$ δείξτε ότι: $$R_{12} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$$
όπου R_{12} ο συντελεστής ανάκλασης και k_1, k_2 οι κυματάριθμοι των y_1 και y_2.

γ) Αν $Z_1 = Z_2$ και $\rho_2 = c\rho_1$ δείξτε ότι η σχέση των μηκών κύματος είναι $\lambda_1 = c\lambda_2$.

Λύση





α) Έστω ότι $y_1(x,t)$ είναι η μετατόπιση της χορδής στο διάστημα $-\infty < x < 0$ και $y_2(x,t)$ η μετατόπισή της στο $0 < x < +\infty$ αντίστοιχα. Στο σημείο ένωσης Α, δηλαδή για x=0, οι μετατοπίσεις ακριβώς αριστερά και ακριβώς δεξιά, λόγω συνέχειας πρέπει να είναι ίσες:

$$y_1(0,t) = y_2(0,t) \qquad \textbf{(1)}$$

Στο σημείο ένωσης Α ασκούνται εφαπτομενικά οι δυνάμεις F_1 και F_2 από τα δύο τμήματα της χορδής. Λόγω ισορροπίας της χορδής στη διεύθυνση x, οι οριζόντιες συνιστώσες των F_1 και F_2 ισούνται με τις τάσεις T_1 και T_2 που τείνουν τα δύο τμήματα της χορδής. Δηλαδή:

$$T_1 = F_1 \cos\theta_1 \Rightarrow F_1 = T_1/\cos\theta_1 \quad \text{και} \quad T_2 = F_2\cos\theta_2 \Rightarrow F_2 = T_2/\cos\theta_2 \qquad \textbf{(2)}$$

Επίσης κατά τη διεύθυνση y της κίνησης της χορδής, σύμφωνα με το 2^o νόμο του Newton η ολική δύναμη $F_2 \sin\theta_2 - F_1 \sin\theta_1$, (όπου η βαρύτητα αμελείται) ισούται:

$$\Sigma\vec{F} = m_A\vec{\alpha} \Rightarrow F_2\sin\theta_2 - F_1\sin\theta_1 = m_A\ddot{y}_A \qquad \textbf{(3)}$$

όπου m_A η μάζα του σημείου Α, η οποία είναι αμελητέα εφόσον δεν υπάρχει τοποθετημένη σημειακή μάζα στο σημείο Α. Δηλαδή $m_A = 0$, οπότε η **(3)** λόγω και των **(2)** δίνει:

$$F_2\sin\theta_2 - F_1\sin\theta_1 = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} T_2\frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2} - T_1\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2\tan\theta_2 - T_1\tan\theta_1 = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

Αλλά οι εφαπτομένες $\tan\theta_1, \tan\theta_2$ δίνουν την κλίση της χορδής εκατέρωθεν του σημείου Α. Δηλαδή είναι:

$$\tan\theta_1 = \left.\frac{\partial y_1}{\partial x}\right|_{x=0} \qquad \text{και} \qquad \tan\theta_2 = \left.\frac{\partial y_2}{\partial x}\right|_{x=0} \qquad \textbf{(5)}$$

Άρα τελικά η **(4)** λόγω των **(5)** παίρνει τη μορφή:

$$T_1\left.\frac{\partial y_1}{\partial x}\right|_{x=0} = T_2\left.\frac{\partial y_2}{\partial x}\right|_{x=0} \qquad \textbf{(6)}$$

β) Θεωρώντας το αρμονικό κύμα $y_i(x,t) = Ae^{i(\omega t - k_1 x + \varphi_1)}$ που προσπίπτει στην ασυνέχεια (x=0) από τα αριστερά, τότε στο σημείο αυτό δημιουργείται το ανακλώμενο κύμα

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕ

$y_r(x,t) = Be^{i(\omega t + k_1 x + \varphi_2)}$ που διαδίδεται προς τα αριστερά και το μεταδιδόμενο κύμα $y_t(x,t) = Ce^{i(\omega t - k_2 x + \varphi_3)}$ που διαδίδεται προς τα δεξιά.
Συνεπώς η ολική μετατόπιση της χορδής στο τμήμα $-\infty < x < 0$ ισούται με το άθροισμα $y_i(x,t) + y_r(x,t)$, ενώ στο τμήμα $0 < x < +\infty$ ισούται με το $y_t(x,t)$. Δηλαδή:

$$y_1(x,t) = y_i(x,t) + y_r(x,t) \qquad \text{και} \qquad y_2(x,t) = y_t(x,t) \qquad \textbf{(7)}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω στην οριακή συνθήκη **(1)** προκύπτει:

$$y_1(0,t) = y_2(0,t) \Rightarrow y_i(0,t) + y_r(0,t) = y_t(0,t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ae^{i(\omega t + \varphi_1)} + Be^{i(\omega t + \varphi_2)} = Ce^{i(\omega t + \varphi_3)} \Rightarrow Ae^{i\varphi_1} + Be^{i\varphi_2} = Ce^{i\varphi_3} \qquad \textbf{(8)}$$

Επίσης αντικαθιστώντας τις **(7)** στην οριακή συνθήκη **(6)** για $T_1 = T_2$ προκύπτει:

$$\left.\frac{\partial y_1}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial y_2}{\partial x}\right|_{x=0} \Rightarrow \left.\frac{\partial}{\partial x}[y_i(x,t) + y_r(x,t)]\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial}{\partial x} y_t(x,t)\right|_{x=0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. -Aik_1 e^{i(\omega t - k_1 x + \varphi_1)} + Bik_1 e^{i(\omega t + k_1 x + \varphi_2)}\right|_{x=0} = \left. -Cik_2 e^{i(\omega t - k_2 x + \varphi_3)}\right|_{x=0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -Aik_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} + Bik_1 e^{i(\omega t + \varphi_2)} = -Cik_2 e^{i(\omega t + \varphi_3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -Ak_1 e^{i\varphi_1} + Bk_1 e^{i\varphi_2} = -Ck_2 e^{i\varphi_3} \qquad \textbf{(9)}$$

Επομένως από τις **(8)** και **(9)** προκύπτει:

$$-Ak_1 e^{i\varphi_1} + Bk_1 e^{i\varphi_2} = -k_2(Ae^{i\varphi_1} + Be^{i\varphi_2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (k_1 - k_2)Ae^{i\varphi_1} = (k_1 + k_2)Be^{i\varphi_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Be^{i\varphi_2}}{Ae^{i\varphi_1}} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \Rightarrow \frac{B}{A} e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \qquad \textbf{(10)}$$

Από τη σχέση **(10)** φαίνεται ότι το δεύτερο μέλος είναι πραγματικό άρα πρέπει να είναι πραγματικό και το πρώτο μέλος.

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

Επειδή $e^{i(\varphi_2-\varphi_1)} = \cos(\varphi_2-\varphi_1) + i\sin(\varphi_2-\varphi_1)$ παρατηρείται ότι το πραγματικό μέρος αυτού είναι το $\cos(\varphi_2-\varphi_1)$ και αν $k_1 > k_2$ είναι $\varphi_2 = \varphi_1$, ενώ αν $k_1 < k_2$ είναι $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$. Άρα:

$$R_{12} = \frac{B}{A} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$$

Παρατηρείται ότι αν $R_{12} > 0$ τότε είναι $\varphi_1 = \varphi_2$ δηλαδή το ανακλώμενο και το προσπίπτον κύμα είναι σε φάση, ενώ αν $R_{12} < 0$ τότε έχουν διαφορά φάσης π.

γ) Η σύνθετη αντίσταση Z της χορδής συνδέεται με τη φασική ταχύτητα μέσω της σχέσης:

$$Z = \rho\upsilon$$

Αλλά: $\upsilon = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{2\pi/\lambda} \Rightarrow \upsilon = \frac{\omega}{2\pi}\lambda$ οπότε: $Z = \frac{\rho\omega}{2\pi}\lambda$ **(11)**

Άρα αν $Z_1 = Z_2$ και $\rho_2 = c\rho_1$ σύμφωνα με την **(11)** προκύπτει:

$$Z_1 = Z_2 \overset{(11)}{\Rightarrow} \frac{\rho_1\omega}{2\pi}\lambda_1 = \frac{\rho_2\omega}{2\pi}\lambda_2 \Rightarrow \rho_1\lambda_1 = \rho_2\lambda_2 \Rightarrow \rho_1\lambda_1 = c\rho_1\lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 = c\lambda_2$$

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

ΘΕΜΑ 2

Χορδή τεντώνεται κατά μήκος του άξονα των x με τάση T και έχει γραμμική πυκνότητα ρ_1 για $-\infty < x < 0$ και ρ_2 για $0 < x < +\infty$. Το εγκάρσιο κύμα $y(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ κινείται στο αριστερό τμήμα της χορδής και προσπίπτει στο σημείο x=0.
α) Γράψτε το προκύπτον κύμα στην περιοχή $-\infty < x < 0$ ως επαλληλία δύο στάσιμων κυμάτων.
β) Ποια είναι η διαφορά φάσης προσπίπτοντος – ανακλώμενου και προσπίπτοντος – μεταδιδόμενου κύματος;
γ) Δείξτε ότι η μέση μεταδιδόμενη ισχύς στην περιοχή x>0 ισούται με τη διαφορά της μέσης ισχύος του προσπίπτοντος κύματος μείον τη μέση ισχύ του ανακλώμενου.

Λύση

α) Στην περιοχή $-\infty < x < 0$ υπάρχουν δύο κύματα, το προσπίπτον:

$$y_i(x,t) = A\cos(\omega t - kx) \qquad \textbf{(1)}$$

και το ανακλώμενο: $$y_r(x,t) = R_{12}A\cos(\omega t + kx) \qquad \textbf{(2)}$$

όπου $R_{12} = \dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$ είναι ο συντελεστής ανάκλασης του κύματος στο x=0 και Z_1, Z_2 είναι οι χαρακτηριστικές σύνθετες αντιστάσεις των δύο τμημάτων της χορδής για τις οποίες ισχύει: $Z_1 = \sqrt{T\rho_1}$ και $Z_2 = \sqrt{T\rho_2}$

Άρα το προκύπτον κύμα $y_{ολ}(x,t)$ στην περιοχή $-\infty < x < 0$ είναι:

$$y_{ολ}(x,t) = y_i(x,t) + y_r(x,t) \overset{(1),(2)}{=} A\cos(\omega t - kx) + R_{12}A\cos(\omega t + kx) =$$

$$= A\cos\omega t\cos kx + A\sin\omega t\sin kx + R_{12}A\cos\omega t\cos kx - R_{12}A\sin\omega t\sin kx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{ολ}(x,t) = A(1 + R_{12})\cos kx\cos\omega t + A(1 - R_{12})\sin kx\sin\omega t$$

Δηλαδή είναι επαλληλία δύο στάσιμων κυμάτων.

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

β) Αν $\rho_1 > \rho_2$ τότε επειδή $Z = \sqrt{T\rho}$ είναι $Z_1 > Z_2$ κι επομένως $R_{12} > 0$, οπότε η διαφορά φάσης προσπίπτοντος και ανακλώμενου κύματος είναι μηδέν.
Αντίστοιχα αν $\rho_1 < \rho_2$ τότε είναι $Z_1 < Z_2$ κι επομένως $R_{12} < 0$, δηλαδή η διαφορά φάσης θα ισούται με π.

Το μεταδιδόμενο κύμα είναι: $y_t(x,t) = T_{12} A\cos(\omega t - k'x)$
Αλλά επειδή είναι $T_{12} = 1 + R_{12} \geq 0$, προκύπτει ότι η διαφορά φάσης προσπίπτοντος – μεταδιδόμενου κύματος είναι πάντα μηδέν.

γ) Η μέση ισχύς ενός κύματος που διαδίδεται σε ομογενή χορδή είναι:

$$< P >=< Z\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 >$$

Άρα η μέση ισχύς του προσπίπτοντος, του ανακλώμενου και του μεταδιδόμενου κύματος θα είναι αντίστοιχα:

$$< P_i >=< Z_1\left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2 >=< Z_1\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx) >= \frac{1}{2} Z_1\omega^2 A^2$$

$$< P_r >=< Z_1\left(\frac{\partial y_r}{\partial t}\right)^2 >=< Z_1 R_{12}^2\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx) >= \frac{1}{2} Z_1\omega^2 A^2 R_{12}^2$$

$$< P_t >=< Z_2\left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2 >=< Z_2 T_{12}^2\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - k'x) >= \frac{1}{2} Z_2\omega^2 A^2 T_{12}^2$$

Άρα: $$< P_i > - < P_r >= \frac{1}{2} Z_1\omega^2 A^2 (1 - R_{12}^2) = \frac{1}{2}\omega^2 A^2 Z_1\left[1 - \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 A^2 Z_1 \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} = \frac{1}{2}\omega^2 A^2 Z_2\left(\frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}\right)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 A^2 Z_2 T_{12}^2 =< P_t >$$

όπου: $$T_{12} = 1 + R_{12} = 1 + \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

ΘΕΜΑ 3

Δύο χορδές από το ίδιο υλικό έχουν κυκλικές διατομές με ακτίνες r_1 και r_2, είναι ενωμένες στο σημείο Α και είναι τεντωμένες με κοινή τάση Τ. Ένα αρμονικό εγκάρσιο κύμα με πλάτος Α και κυκλική συχνότητα ω, προσπίπτει από αριστερά στο σημείο Α της ασυνέχειας και η μέση τιμή της ισχύος που μεταφέρει είναι <P>.
α) Ποια είναι τα πλάτη του μεταδιδόμενου και του ανακλώμενου κύματος;
β) Ποιες είναι οι μέσες τιμές των ισχύων που μεταφέρει καθένα από αυτά τα κύματα;
γ) Βρείτε το λόγο των διαμέτρων r_1/r_2 ώστε το 25% της προσπίπτουσας ισχύος <P> να ανακλάται, ενώ το 75% να μεταδίδεται.

Λύση

α) Το προσπίπτον κύμα έχει τη μορφή: $y_i(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$

Άρα το πλάτος του ανακλώμενου κύματος είναι $R_{12}A$ και του μεταδιδόμενου κύματος $T_{12}A$,

όπου $R_{12} = \dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$ και $T_{12} = 1 + R_{12} = 1 + \dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \dfrac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$

β) Όπως υπολογίστηκαν και στο **Θέμα 2** η μέση ισχύς κάθε κύματος είναι:

$$< P >= \frac{1}{2}Z_1\omega^2 A^2,\ < P_r >= \frac{1}{2}Z_1\omega^2 A^2 R_{12}^2,\ < P_t >= \frac{1}{2}Z_2\omega^2 A^2 T_{12}^2 \qquad \textbf{(1)}$$

γ) Αν ανακλάται το 25% της προσπίπτουσας ισχύος θα πρέπει:

$$\frac{< P_r >}{< P >} = \frac{1}{4} \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{\frac{1}{2}Z_1\omega^2 A^2 R_{12}^2}{\frac{1}{2}Z_1\omega^2 A^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow R_{12}^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{12} = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \pm\frac{1}{2} \qquad \textbf{(2)}$$

Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι γραμμικές πυκνότητες των δύο χορδών και ρ η πυκνότητα του υλικού από το οποίο είναι κατασκευασμένες οι χορδές θα ισχύει:

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

$$\rho_1 = \rho\pi r_1^2 \quad \text{και} \quad \rho_2 = \rho\pi r_2^2$$

Και επειδή οι χορδές τείνονται με κοινή τάση T οι σύνθετες αντιστάσεις τους είναι:

$$Z_1 = \sqrt{T\rho_1} = \sqrt{T\rho\pi r_1^2} = r_1\sqrt{T\rho\pi} \ \text{ και } \ Z_2 = \sqrt{T\rho_2} = \sqrt{T\rho\pi r_2^2} = r_2\sqrt{T\rho\pi} \quad \textbf{(3)}$$

Άρα η **(2)** λόγω των **(3)** δίνει:

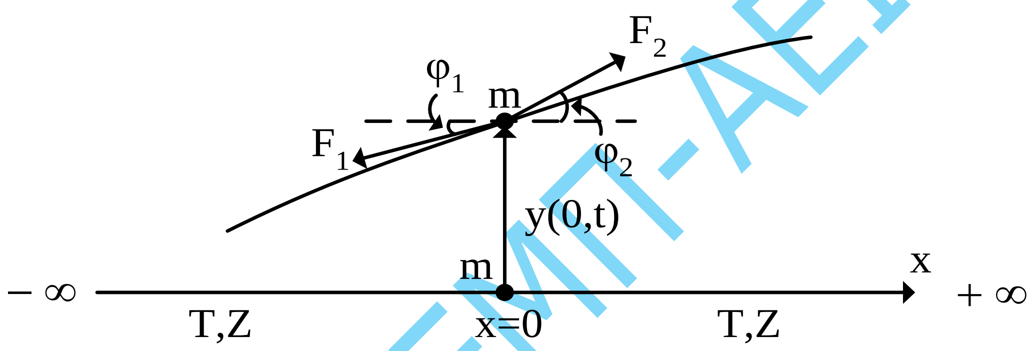
$$\frac{r_1\sqrt{T\rho\pi} - r_2\sqrt{T\rho\pi}}{r_1\sqrt{T\rho\pi} + r_2\sqrt{T\rho\pi}} = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = 3 \ \text{ ή } \ \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{3}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕ

ΘΕΜΑ 4

Σημειακή μάζα m είναι τοποθετημένη σε χορδή απείρου μήκους και χαρακτηριστικής αντίστασης Z. Εγκάρσιο κύμα $y(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$ ανακλάται και εν μέρει διαδίδεται όταν συναντά τη μάζα. Από τις οριακές συνθήκες συνέχειας της χορδής και των δυνάμεων επαναφοράς στη θέση της μάζας, υπολογίστε τους συντελεστές ανάκλασης και διάδοσης συναρτήσει του $\tan\theta = \omega m / 2Z$.

Λύση



Έστω ότι κάποια χρονική στιγμή t η μάζα m έχει μετατοπιστεί κατά y(0,t) από τη θέση ισορροπίας και F_1, F_2 είναι οι δυνάμεις που ασκούν τα δύο τμήματα της χορδής στη μάζα. Λόγω ισορροπίας της χορδής στη διεύθυνση x, οι οριζόντιες συνιστώσες των F_1 και F_2 ισούνται με την τάση T που τείνει τα δύο τμήματα της χορδής. Δηλαδή:

$$T = F_1 \cos\varphi_1 \Rightarrow F_1 = T/\cos\varphi_1 \quad \text{και} \quad T = F_2 \cos\varphi_2 \Rightarrow F_2 = T/\cos\varphi_2 \qquad \textbf{(1)}$$

Επίσης κατά τη διεύθυνση y της κίνησης, αμελώντας τη βαρύτητα, ο 2ος νόμος του Newton δίνει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F_2 \sin\varphi_2 - F_1 \sin\varphi_1 = m\left.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\right|_{x=0} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow T\tan\varphi_2 - T\tan\varphi_1 = m\left.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\right|_{x=0} \qquad \textbf{(2)}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

όπου $\left.\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\right|_{x=0}$ είναι η επιτάχυνση της μάζας m.

Αλλά επειδή $\tan\varphi_1 = \left.\dfrac{\partial y_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}$ και $\tan\varphi_2 = \left.\dfrac{\partial y_2(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}$ είναι οι κλίσεις της χορδής εκατέρωθεν της μάζας η σχέση **(2)** γράφεται:

$$T\left.\frac{\partial y_2(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} - T\left.\frac{\partial y_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = m\left.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\right|_{x=0} \quad \textbf{(3)}$$

Η μετατόπιση $y_1(x,t)$ αριστερά της μάζας είναι το άθροισμα του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου κύματος, δηλαδή:

$$y_1(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)} + Be^{i(\omega t + kx)} \quad \textbf{(4)}$$

ενώ η μετατόπιση $y_2(x,t)$ δεξιά της μάζας είναι το διαδιδόμενο κύμα, δηλαδή:

$$y_2(x,t) = Ce^{i(\omega t - kx)} \quad \textbf{(5)}$$

όπου ο κυματάριθμος k είναι ο ίδιος και στα δύο τμήματα της χορδής γιατί έχουν την ίδια σύνθετη αντίσταση.
Επομένως λόγω της οριακής συνθήκης της συνέχειας της μετατόπισης στο σημείο x=0 ισχύει:

$$y_1(0,t) = y_2(0,t) \overset{(4),(5)}{\Rightarrow} Ae^{i\omega t} + Be^{i\omega t} = Ce^{i\omega t} \Rightarrow A + B = C \quad \textbf{(6)}$$

Ενώ η σχέση **(3)** λόγω των **(4)** και **(5)** δίνει:

$$-TCike^{i\omega t} - T(-Aike^{i\omega t} + Bike^{i\omega t}) = mC(i\omega)^2 e^{i\omega t} \Rightarrow$$

$$-TCik - Tik(-A+B) = mCi^2\omega^2 \Rightarrow -Tk(C - A + B) = mCi\omega^2 \overset{(6)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow -Tk(A + B - A + B) = m(A+B)i\omega^2 \Rightarrow -Tk2B = im\omega^2(A+B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(2Tk + im\omega^2)B = im\omega^2 A \Rightarrow$$

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

$$\Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{im\omega^2}{-2Tk - im\omega^2} = \frac{im\omega^2(-2Tk + im\omega^2)}{(-2Tk - im\omega^2)(-2Tk + im\omega^2)} =$$

$$= \frac{-2Tkm\omega^2 i - m^2\omega^4}{4T^2k^2 + m^2\omega^4} \Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{-m^2\omega^4}{4T^2k^2 + m^2\omega^4} - i\frac{2Tkm\omega^2}{4T^2k^2 + m^2\omega^4} \qquad \textbf{(7)}$$

Και η **(6)** λόγω της **(7)** δίνει:

$$C = A + B \Rightarrow \frac{C}{A} = 1 + \frac{B}{A} \overset{(7)}{\Rightarrow} \frac{C}{A} = \frac{4T^2k^2}{4T^2k^2 + m^2\omega^4} - i\frac{2Tkm\omega^2}{4T^2k^2 + m^2\omega^4} \qquad \textbf{(8)}$$

Οι σχέσεις **(7)** και **(8)** δίνουν τους συντελεστές ανάκλασης και διάδοσης. Από τον ορισμό της σύνθετης αντίστασης $Z = \sqrt{T\rho}$ κι επειδή $Z = \rho\upsilon = \rho\frac{\omega}{k} \Rightarrow \rho = \frac{Zk}{\omega}$ προκύπτει:

$$Z = \sqrt{\frac{TZk}{\omega}} \Rightarrow Z^2 = \frac{TZk}{\omega} \Rightarrow Z\omega = Tk \qquad \textbf{(9)}$$

Άρα οι σχέσεις **(7)** και **(8)** λόγω της **(9)** γίνονται:

$$\frac{B}{A} = \frac{-m^2\omega^4}{4Z^2\omega^2 + m^2\omega^4} - i\frac{2Z\omega m\omega^2}{4Z^2\omega^2 + m^2\omega^4} = \frac{-m^2\omega^2}{4Z^2 + m^2\omega^2} - i\frac{2Z\omega m}{4Z^2 + m^2\omega^2} =$$

$$= \frac{-1}{\frac{4Z^2}{m^2\omega^2} + 1} - \frac{i\frac{2Z}{m\omega}}{\frac{4Z^2}{m^2\omega^2} + 1} =$$

$$= \frac{-1}{\frac{1}{\tan^2\theta} + 1} - i\frac{\frac{1}{\tan\theta}}{\frac{1}{\tan^2\theta} + 1} \Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{\tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta} - i\frac{\tan\theta}{1 + \tan^2\theta} \qquad \textbf{(10)}$$

όπου $\tan\theta = m\omega / 2Z$

Και:

$$\frac{C}{A} = \frac{4Z^2\omega^2}{4Z^2\omega^2 + m^2\omega^4} - i\frac{2Z\omega m\omega^2}{4Z^2\omega^2 + m^2\omega^4} = \frac{4Z^2}{4Z^2 + m^2\omega^2} - i\frac{2Z\omega m}{4Z^2 + m^2\omega^2} =$$

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

$$= \frac{\frac{4Z^2}{m^2\omega^2}}{\frac{4Z^2}{m^2\omega^2}+1} - i\frac{\frac{2Z}{m\omega}}{\frac{4Z^2}{m^2\omega^2}+1} =$$

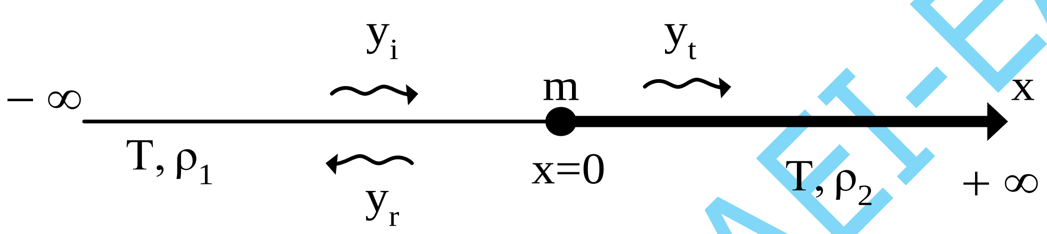
$$= \frac{\frac{1}{\tan^2\theta}}{\frac{1}{\tan^2\theta}+1} - i\frac{\frac{1}{\tan\theta}}{\frac{1}{\tan^2\theta}+1} \Rightarrow \frac{C}{A} = \frac{1}{1+\tan^2\theta} - i\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta} \qquad \textbf{(11)}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

ΘΕΜΑ 5

Χορδή απείρου μήκους που τείνεται υπό τάση Τ, αποτελείται από δύο τμήματα γραμμικής πυκνότητας μάζας ρ_1 και ρ_2 που ενώνονται στη θέση x=0. Αν στη θέση αυτή υπάρχει επιπλέον σημειακή μάζα m, να υπολογίσετε τους συντελεστές ανάκλασης και διάδοσης ενός κύματος που κινείται προς τα θετικά του άξονα x.

Λύση



Ομοίως όπως και στο **Θέμα 4** βρίσκεται ότι η εξίσωση της κίνησης της μάζας m δίνεται από τη σχέση:

$$T\frac{\partial y_2(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0} - T\frac{\partial y_1(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0} = m\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\bigg|_{x=0} \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά τώρα είναι :

$$y_1(x,t) = Ae^{i(\omega t - k_1 x)} + Be^{i(\omega t + k_1 x)} \quad \text{και} \quad y_2(x,t) = Ce^{i(\omega t - k_2 x)} \qquad \textbf{(2)}$$

Σημειώνεται ότι το προσπίπτον και το ανακλώμενο κύμα έχουν τον ίδιο κυματάριθμο k_1, γιατί διαδίδονται στο ίδιο μέσο, ενώ το διαδιδόμενο κύμα έχει κυματάριθμο $k_2 \neq k_1$ γιατί διαδίδεται σε διαφορετικό μέσο ($\rho_1 \neq \rho_2$). Επίσης τα τρία αυτά κύματα έχουν την ίδια συχνότητα της πηγής που εκπέμπει το προσπίπτον κύμα.
Επομένως λόγω της οριακής συνθήκης της συνέχειας της μετατόπισης στο σημείο x=0 ισχύει:

$$y_1(0,t) = y_2(0,t) \overset{(2)}{\Rightarrow} Ae^{i\omega t} + Be^{i\omega t} = Ce^{i\omega t} \Rightarrow A + B = C \qquad \textbf{(3)}$$

Ενώ η σχέση **(1)** λόγω των **(2)** δίνει:

$$-TCik_2 e^{i\omega t} - T(-Aik_1 e^{i\omega t} + Bik_1 e^{i\omega t}) = mC(i\omega)^2 e^{i\omega t} \Rightarrow$$

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

$$\Rightarrow -TCik_2 - Tik_1(-A+B) = mCi^2\omega^2 \Rightarrow -TCk_2 - Tk_1(-A+B) = mCi\omega^2 \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow -Tk_2(A+B) - Tk_1(-A+B) = im\omega^2(A+B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow TA(k_1-k_2) - TB(k_1+k_2) = im\omega^2(A+B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [T(k_1-k_2) - im\omega^2]A = [T(k_1+k_2) + im\omega^2]B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{T(k_1-k_2) - im\omega^2}{T(k_1+k_2) + im\omega^2} \qquad \textbf{(4)}$$

Επίσης η **(3)** λόγω της **(4)** δίνει:

$$C = A + B \Rightarrow \frac{C}{A} = 1 + \frac{B}{A} \overset{(4)}{\Rightarrow} \frac{C}{A} = \frac{T(k_1+k_2) + im\omega^2 + T(k_1-k_2) - im\omega^2}{T(k_1+k_2) + im\omega^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{C}{A} = \frac{2Tk_1}{T(k_1+k_2) + im\omega^2} \qquad \textbf{(5)}$$

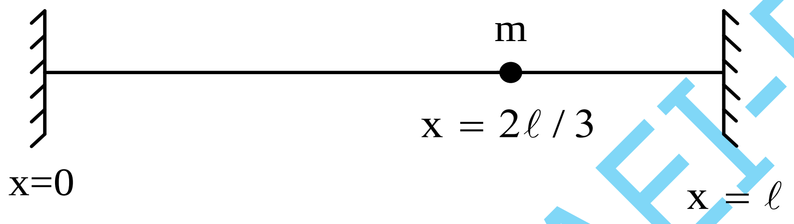
Οι σχέσεις **(4)** και **(5)** δίνουν τους συντελεστές ανάκλασης και διάδοσης.

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕ

ΘΕΜΑ 6

Χορδή σύνθετης αντίστασης Ζ και μήκους ℓ έχει σταθερά άκρα και τείνεται υπό τάση Τ. Αν στη θέση $x = 2\ell/3$ είναι τοποθετημένη σημειακή μάζα m, γράψτε τις μετατοπίσεις στα δύο μέρη της χορδής, εφαρμόστε τις οριακές συνθήκες και βρείτε τη συνθήκη που ικανοποιεί ο κυματάριθμος k.

Λύση



Επειδή η χορδή έχει σταθερά άκρα, οι μετατοπίσεις της στις δύο περιοχές $0 \le x \le 2\ell/3$ και $2\ell/3 \le x \le \ell$ θα έχουν τη μορφή στάσιμων κυμάτων:

$$y_i(x,t) = (A_i \sin kx + B_i \cos kx)e^{i\omega t}$$

Δηλαδή είναι:

$$y_1(x,t) = (A_1 \sin kx + B_1 \cos kx)e^{i\omega t} \quad \text{για} \quad 0 \le x \le 2\ell/3 \qquad \textbf{(1)}$$

$$y_2(x,t) = (A_2 \sin kx + B_2 \cos kx)e^{i\omega t} \quad \text{για} \quad 2\ell/3 \le x \le \ell \qquad \textbf{(2)}$$

Εφαρμόζοντας πρώτα τις οριακές συνθήκες στα σταθερά άκρα της χορδής x=0 και $x = \ell$ προκύπτουν:

$$y_1(0,t) = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} (0 + B_1)e^{i\omega t} = 0 \Rightarrow B_1 = 0$$

δηλαδή : $y_1(x,t) = A_1 \sin kx e^{i\omega t}$ **(3)**

$$y_2(\ell,t) = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} (A_2 \sin k\ell + B_2 \cos k\ell)e^{i\omega t} = 0 \Rightarrow A_2 \sin k\ell + B_2 \cos k\ell = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_2 \sin k\ell = -B_2 \cos k\ell \Rightarrow \tan k\ell = -\frac{B_2}{A_2} \qquad \textbf{(4)}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

Επίσης οι οριακές συνθήκες στο σημείο ασυνέχειας $x = 2\ell/3$ δίνουν:

$$y_1(2\ell/3,t) = y_2(2\ell/3,t) \overset{(2),(3)}{\Rightarrow} A_1 \sin\frac{2k\ell}{3} e^{i\omega t} = \left[A_2 \sin\frac{2k\ell}{3} + B_2 \cos\frac{2k\ell}{3}\right] e^{i\omega t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1 \sin\frac{2k\ell}{3} = A_2 \sin\frac{2k\ell}{3} + B_2 \cos\frac{2k\ell}{3} \qquad \textbf{(5)}$$

και

$$T\left.\frac{\partial y_2}{\partial x}\right|_{x=2\ell/3} - T\left.\frac{\partial y_1}{\partial x}\right|_{x=2\ell/3} = m\left.\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right|_{x=2\ell/3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T\left[kA_2 \cos\frac{2k\ell}{3} - kB_2 \sin\frac{2k\ell}{3} - kA_1 \cos\frac{2k\ell}{3}\right] = mA_1\omega^2 \sin\frac{2k\ell}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Tk\left(A_2 \cos\frac{2k\ell}{3} - B_2 \sin\frac{2k\ell}{3}\right) = A_1\left(m\omega^2 \sin\frac{2k\ell}{3} + Tk\cos\frac{2k\ell}{3}\right) \qquad \textbf{(6)}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις **(6)** και **(5)** και λόγω της **(4)** προκύπτει:

$$\frac{m\omega^2 \sin\frac{2k\ell}{3} + Tk\cos\frac{2k\ell}{3}}{\sin\frac{2k\ell}{3}} = \frac{Tk(A_2 \cos\frac{2k\ell}{3} - B_2 \sin\frac{2k\ell}{3})}{A_2 \sin\frac{2k\ell}{3} + B_2 \cos\frac{2k\ell}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\omega^2 + \frac{Tk}{\tan\frac{2k\ell}{3}} = Tk\frac{\cos\frac{2k\ell}{3} - \frac{B_2}{A_2}\sin\frac{2k\ell}{3}}{\sin\frac{2k\ell}{3} + \frac{B_2}{A_2}\cos\frac{2k\ell}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\omega^2 + \frac{Tk}{\tan\frac{2k\ell}{3}} = Tk\frac{1 - \frac{B_2}{A_2}\tan\frac{2k\ell}{3}}{\tan\frac{2k\ell}{3} + \frac{B_2}{A_2}} \overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow m\omega^2 + \frac{Tk}{\tan\frac{2k\ell}{3}} = Tk\frac{1 + \tan k\ell \tan\frac{2k\ell}{3}}{\tan\frac{2k\ell}{3} - \tan k\ell} \Rightarrow$$

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

$$\Rightarrow m\omega^2 = Tk\left[\frac{1+\tan k\ell\ \tan\frac{2k\ell}{3}}{\tan\frac{2k\ell}{3}-\tan k\ell}-\frac{1}{\tan\frac{2k\ell}{3}}\right]$$

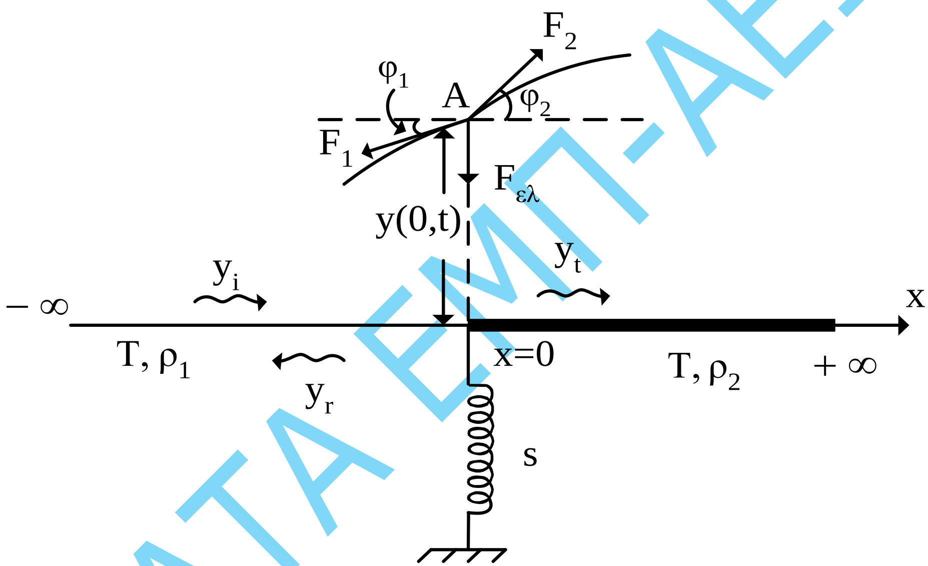
Η σχέση αυτή αποτελεί τη συνθήκη που ικανοποιεί ο κυματάριθμος.

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

ΘΕΜΑ 7

Δύο ημιάπειρες χορδές γραμμικών πυκνοτήτων ρ_1 και ρ_2 συνδέονται στο σημείο x=0 και τείνονται με τάση Τ. Στο ίδιο σημείο συνδέεται ελατήριο σταθεράς s με το άλλο του σημείο στηριγμένο σε ακλόνητο σημείο. Όταν η χορδή ηρεμεί το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Από τη μία πλευρά της χορδής διαδίδεται το οδεύον κύμα προς το σημείο x=0, όπου εν μέρει ανακλάται και εν μέρει διαδίδεται.
α) Γράψτε τις οριακές συνθήκες που εκφράζουν τη συνέχεια της χορδής και τη δυναμική ισορροπία στο σημείο x=0.
β) Υπολογίστε τους συντελεστές ανάκλασης και μετάδοσης πλάτους του κύματος στο σημείο μεταβολής της πυκνότητας.

Λύση



α) Το προσπίπτον κύμα είναι $y_i(x,t) = Ae^{i(\omega t - k_1 x)}$ οπότε στο σημείο της σύνδεσης x=0 δημιουργείται το ανακλώμενο κύμα $y_r(x,t) = Be^{i(\omega t + k_1 x)}$ και το διαδιδόμενο κύμα $y_t(x,t) = Ce^{i(\omega t - k_2 x)}$ όπου $k_1 \neq k_2$, δηλαδή ο κυματάριθμος είναι διαφορετικός στις δύο περιοχές επειδή $\rho_1 \neq \rho_2$.
Επομένως η μετατόπιση της χορδής σε κάθε ημιάπειρη χορδή είναι:

$$y_1(x,t) = y_i(x,t) + y_r(x,t) \Rightarrow y_1(x,t) = Ae^{i(\omega t - k_1 x)} + Be^{i(\omega t + k_1 x)} \qquad \textbf{(1)}$$

$$y_2(x,t) = y_t(x,t) \Rightarrow y_2(x,t) = Ce^{i(\omega t - k_2 x)} \qquad \textbf{(2)}$$

Έστω η τυχαία θέση της χορδής μια χρονική στιγμή t. Λόγω της οριακής συνθήκης της συνέχειας της μετατόπισης της χορδής στο σημείο x=0 ισχύει:

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

$$y_1(0,t) = y_2(0,t) \overset{(1),(2)}{\Rightarrow} Ae^{i\omega t} + Be^{i\omega t} = Ce^{i\omega t} \Rightarrow A + B = C \qquad \textbf{(3)}$$

Στο σημείο ένωσης των δύο χορδών ασκούνται οι εφαπτομενικές δυνάμεις F_1, F_2 από τις δύο χορδές αντίστοιχα και η δύναμη του ελατηρίου $F_{\varepsilon\lambda} = sy(0,t)$.
Λόγω ισορροπίας της χορδής στη διεύθυνση x , οι οριζόντιες συνιστώσες των F_1, F_2 είναι ίσες με την τάση T που τείνει τις χορδές. Δηλαδή:

$$F_1 \cos\varphi_1 = T \Rightarrow F_1 = T/\cos\varphi_1 \quad \text{και} \quad F_2 \cos\varphi_2 = T \Rightarrow F_2 = T/\cos\varphi_2 \qquad \textbf{(4)}$$

Ενώ κατά τη διεύθυνση y της κίνησης της χορδής, ο 2^{ος} νόμος του Newton δίνει:

$$\Sigma\vec{F} = m_A\vec{\alpha} \Rightarrow F_2 \sin\varphi_2 - F_1 \sin\varphi_1 - F_{\varepsilon\lambda} = m_A \left.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\right|_{x=0} \overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow T\tan\varphi_2 - T\tan\varphi_1 - sy_2(0,t) = m_A \left.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\right|_{x=0}$$

Αλλά $m_A = 0$ επειδή δεν υπάρχει τοποθετημένη σημειακή μάζα στο σημείο A και οι εφαπτομένες δίνουν την κλίση της χορδής εκατέρωθεν του σημείου A, οπότε η τελευταία σχέση γράφεται:

$$T\left.\frac{\partial y_2(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} - T\left.\frac{\partial y_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} - sy_2(0,t) = 0 \overset{(1),(2)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow -Tik_2Ce^{i\omega t} - T(-ik_1Ae^{i\omega t} + ik_1Be^{i\omega t}) - sCe^{i\omega t} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -iT(k_2C - k_1A + k_1B) = sC \qquad \textbf{(5)}$$

β) Άρα από τις σχέσεις **(3)** και **(5)** προκύπτουν οι συντελεστές ανάκλασης και διάδοσης ως:

$$\frac{B}{A} = \frac{iT(k_1 - k_2) - s}{iT(k_1 + k_2) + s} \quad \text{και} \quad \frac{C}{A} = \frac{2iTk_1}{iT(k_1 + k_2) + s} \qquad \textbf{(6)}$$

Κι επειδή υ=ω/k και $\upsilon = \sqrt{T/\rho}$ προκύπτει ότι $k = \omega\sqrt{\rho/T}$ δηλαδή $k_1 = \omega\sqrt{\rho_1/T}$ και $k_2 = \omega\sqrt{\rho_2/T}$, οπότε οι σχέσεις **(6)** τελικά γίνονται:

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

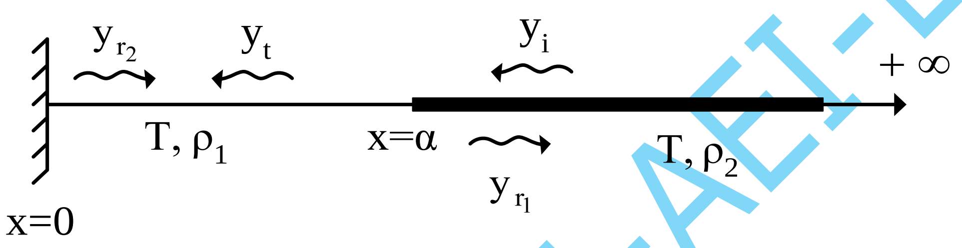
$$\frac{B}{A}=\frac{i\sqrt{T}\omega(\sqrt{\rho_1}-\sqrt{\rho_2})-s}{i\sqrt{T}\omega(\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2})-s} \quad \text{και} \quad \frac{C}{A}=\frac{2i\sqrt{T\rho_1}\ \omega}{i\sqrt{T}\omega(\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2})+s}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

ΘΕΜΑ 8

Μία χορδή ημιάπειρου μήκους τείνεται υπό τάση T και έχει το άκρο της x=0 σταθερό. Το τμήμα της χορδής 0<x<α έχει γραμμική πυκνότητα ρ_1, ενώ το τμήμα $\alpha < x < +\infty$ έχει γραμμική πυκνότητα ρ_2. Ένα εγκάρσιο κύμα $y_i(x,t) = Ae^{i(\omega t + k_2 x)}$ προσπίπτει στο σημείο ασυνέχειας x=α από τα δεξιά της χορδής. Να προσδιοριστεί η εξίσωση κίνησης της χορδής σε κάθε τμήμα.

Λύση



Όταν το κύμα $y_i(x,t)$ προσπίπτει στο σημείο x=α δημιουργείται το ανακλώμενο κύμα $y_{r_1}(x,t) = Be^{i(\omega t - k_2 x)}$ που διαδίδεται προς τα δεξιά της χορδής και το διαδιδόμενο κύμα $y_t(x,t) = Ce^{i(\omega t + k_1 x)}$ που διαδίδεται προς τα αριστερά.
Επίσης το διαδιδόμενο κύμα $y_t(x,t)$ καθώς προσπίπτει στο σταθερό άκρο x=0 ανακλάται και δημιουργείται το ανακλώμενο κύμα $y_{r_2}(x,t) = De^{i(\omega t - k_1 x)}$, που διαδίδεται προς τα δεξιά.
Επομένως σε κάθε τμήμα της χορδής θα υπάρχουν δύο κύματα, ένα διαδιδόμενο προς τα αριστερά και ένα προς τα δεξιά.
Άρα η μετατόπιση της χορδής στο τμήμα $\alpha < x < +\infty$ είναι:

$$y_2(x,t) = y_i(x,t) + y_{r_1}(x,t) = Ae^{i(\omega t + k_2 x)} + Be^{i(\omega t - k_2 x)} \qquad \textbf{(1)}$$

Ενώ η μετατόπιση της χορδής στο τμήμα 0<x<α είναι:

$$y_1(x,t) = y_t(x,t) + y_{r_2}(x,t) = Ce^{i(\omega t + k_1 x)} + De^{i(\omega t - k_1 x)} \qquad \textbf{(2)}$$

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες του προβλήματος προκύπτουν:

Στο σταθερό άκρο x=0 : $y_1(0,t) = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} C + D = 0$ **(3)**

Στο σημείο x=α λόγω συνέχειας της μετατόπισης της χορδής:

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

$$y_1(\alpha,t)=y_2(\alpha,t)\overset{(1),(2)}{\Rightarrow}Ce^{ik_2\alpha}+De^{-ik_1\alpha}=Ae^{ik_2\alpha}+Be^{-ik_2\alpha} \qquad \textbf{(4)}$$

Στο σημείο x=α λόγω δυναμικής ισορροπίας:

$$T\frac{\partial y_1(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=\alpha}=T\frac{\partial y_2(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=\alpha}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow ik_1Ce^{ik_1\alpha}-ik_1De^{-ik_1\alpha}=ik_2Ae^{ik_2\alpha}-ik_2Be^{-ik_2\alpha}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1(Ce^{ik_1\alpha}-De^{-ik_1\alpha})=k_2(Ae^{ik_2\alpha}-Be^{-ik_2\alpha}) \qquad \textbf{(5)}$$

Από τις σχέσεις **(3)**, **(4)**, **(5)** υπολογίζονται τα πλάτη B, C, D συναρτήσει του A:

$$B=A\frac{ik_2\tan k_1\alpha-1}{ik_2\tan k_1\alpha+1}e^{i2k_2\alpha} \qquad \textbf{(6)}$$

και

$$C=-D=\frac{A}{2i\sin k_1\alpha}\left(e^{ik_2\alpha}+\frac{ik_2\tan k_1\alpha-k_1}{ik_2\tan k_1\alpha+k_1}\right)$$

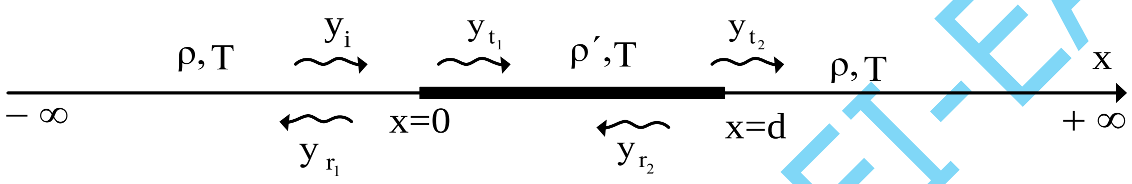
Άρα η εξίσωση κίνησης της χορδής δίνεται από τις **(1)**, **(2)** όπου τα πλάτη δίνονται από τις σχέσεις **(6)**.

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

ΘΕΜΑ 9

Μία χορδή απείρου μήκους τείνεται με τάση T και έχει γραμμική πυκνότητα ρ εκτός από το τμήμα 0<x<d που είναι ρ'. Ένα αρμονικό κύμα $y_i(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$ προσπίπτει από τα αριστερά στο σημείο x=0. Να υπολογιστεί ο συντελεστής διάδοσης του κύματος.

Λύση



Όταν το κύμα $y_i(x,t)$ προσπίπτει στο σημείο x=0 δημιουργείται το ανακλώμενο κύμα $y_{r_1}(x,t) = Be^{i(\omega t + kx)}$ που διαδίδεται προς τα αριστερά και το διαδιδόμενο κύμα $y_{t_1}(x,t) = Ce^{i(\omega t - k'x)}$ (με $k \neq k'$ λόγω αλλαγής της πυκνότητας) που διαδίδεται προς τα δεξιά.

Στη συνέχεια όταν το κύμα $y_{t_1}(x,t)$ προσπίπτει στο άλλο σημείο ασυνέχειας x=d δημιουργείται το ανακλώμενο κύμα $y_{r_2}(x,t) = De^{i(\omega t + k'x)}$ που διαδίδεται προς τα αριστερά και το διαδιδόμενο κύμα $y_{t_2}(x,t) = Ee^{i(\omega t - kx)}$ που διαδίδεται προς τα δεξιά.

Άρα το συνιστάμενο κύμα στο τμήμα $-\infty < x < 0$ είναι:

$$y_1(x,t) = y_i(x,t) + y_{r_1}(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)} + Be^{i(\omega t + kx)} \qquad \textbf{(1)}$$

ενώ στο τμήμα 0<x<d είναι:

$$y_2(x,t) = y_{t_1}(x,t) + y_{r_2}(x,t) = Ce^{i(\omega t - k'x)} + De^{i(\omega t + k'x)} \qquad \textbf{(2)}$$

και στο τμήμα $d < x < +\infty$ είναι:

$$y_3(x,t) = y_{t_2}(x,t) = Ee^{i(\omega t - kx)} \qquad \textbf{(3)}$$

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες συνέχειας στα σημεία x=0 και x=d προκύπτουν:

ΜΑΘΗΜΑΤΑ-ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

$$y_1(0,t) = y_2(0,t) \overset{(1),(2)}{\Rightarrow} Ae^{i\omega t} + Be^{i\omega t} = Ce^{i\omega t} + De^{i\omega t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A + B = C + D \Rightarrow B = C + D - A \qquad \textbf{(4)}$$

$$y_2(d,t) = y_3(d,t) \overset{(2),(3)}{\Rightarrow} Ce^{i(\omega t - k'd)} + De^{i(\omega t + k'd)} = Ee^{i(\omega t - kd)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ce^{-ik'd} + De^{ik'd} = Ee^{-ikd} \qquad \textbf{(5)}$$

Επίσης στα σημεία x=0 και x=d επειδή δεν υπάρχουν σημειακές μάζες, αλλά απλή ασυνέχεια της γραμμικής πυκνότητας η οριακή συνθήκη της δυναμικής ισορροπίας δίνει:

$$T\frac{\partial y_2}{\partial x}\bigg|_{x=0} - T\frac{\partial y_1}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial y_1}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \frac{\partial y_2}{\partial x}\bigg|_{x=0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -ikAe^{i\omega t} + ikBe^{i\omega t} = -ik'Ce^{i\omega t} + ik'De^{i\omega t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -kA + kB = -k'C + k'D \Rightarrow k(B - A) = k'(D - C) \qquad \textbf{(6)}$$

Και:

$$T\frac{\partial y_3}{\partial x}\bigg|_{x=d} - T\frac{\partial y_2}{\partial x}\bigg|_{x=d} = 0 \Rightarrow \frac{\partial y_2}{\partial x}\bigg|_{x=d} = \frac{\partial y_3}{\partial x}\bigg|_{x=d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -ik'Ce^{i(\omega t - k'd)} + ik'De^{i(\omega t + k'd)} = -ikEe^{i(\omega t - kd)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -k'Ce^{-ik'd} + k'De^{ik'd} = -kEe^{-ikd} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k'(De^{i2k'd} - C) = -kEe^{-ikd}e^{ik'd} \qquad \textbf{(7)}$$

Από τις σχέσεις **(5)** και **(7)** υπολογίζονται τα πλάτη C, D συναρτήσει του E ως:

$$C = E\frac{k + k'}{2k'}e^{i(k'-k)d} \quad \text{και} \quad D = E\frac{k' - k}{2k'}e^{-i(k+k')d} \qquad \textbf{(8)}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΑ-ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕ

Αντικαθιστώντας την **(4)** στην **(6)** και λόγω των **(8)** τελικά προκύπτει:

$$k(C+D-2A)=k'(D-C)\Rightarrow C(k+k')+D(k-k')=2Ak\overset{(8)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow E\frac{(k+k')^2}{2k'}e^{i(k'-k)d}-E\frac{(k'-k)^2}{2k'}e^{-i(k+k')d}=2Ak\Rightarrow$$

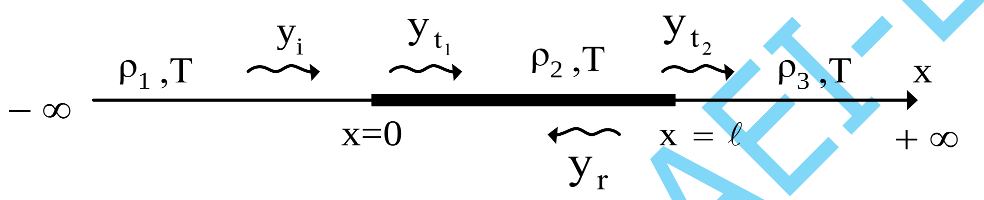
$$\Rightarrow \frac{E}{A}=\frac{4kk'}{(k+k')^2e^{i(k'-k)d}-(k'-k)^2e^{-i(k+k')d}}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

ΘΕΜΑ 10

Χορδή απείρου μήκους τείνεται υπό τάση Τ και αποτελείται από τρία τμήματα με διαφορετικές γραμμικές πυκνότητες, δηλαδή είναι ρ_1 για $-\infty < x < 0$, ρ_2 για $0 < x < \ell$ και ρ_3 για $\ell < x < +\infty$. Ένα αρμονικό κύμα διαδίδεται από τα αριστερά και προσπίπτει στο σημείο ασυνέχειας x=0. Να προσδιοριστούν τα ρ_2, ℓ ώστε να αποφευχθεί η ανάκλαση στο σημείο x=0.

Λύση



Έστω ότι το προσπίπτον κύμα που διαδίδεται από τα αριστερά και φτάνει στο σημείο x=0 είναι $y_i(x,t) = Ae^{i(\omega t - k_1 x)}$. Επειδή δεν υπάρχει ανάκλαση στο x=0 το κύμα αυτό δεν ανακλάται στο x=0, αλλά διαδίδεται στο τμήμα $0 < x < \ell$ της χορδής και προκύπτει το διαδιδόμενο κύμα $y_{t_1}(x,t) = Be^{i(\omega t - k_2 x)}$.

Στη συνέχεια το κύμα $y_{t_1}(x,t)$ προσπίπτει στο άλλο σημείο ασυνέχειας $x = \ell$ και δημιουργείται το ανακλώμενο κύμα $y_r(x,t) = Ce^{i(\omega t + k_2 x)}$ και το μεταδιδόμενο κύμα $y_{t_2}(x,t) = De^{i(\omega t - k_3 x)}$.

Άρα τα συνιστάμενα κύματα στα τρία μέρη της χορδής είναι:

Για $-\infty < x < 0$: $\quad y_1(x,t) = y_i(x,t) = Ae^{i(\omega t - k_1 x)}$ **(1)**

Για $0 < x < \ell$: $\quad y_2(x,t) = y_{t_1}(x,t) + y_r(x,t) = Be^{i(\omega t - k_2 x)} + Ce^{i(\omega t + k_2 x)}$ **(2)**

Για $\ell < x < +\infty$: $\quad y_3(x,t) = y_{t_2}(x,t) = De^{i(\omega t - k_3 x)}$ **(3)**

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες στα σημεία x=0 και $x = \ell$ προκύπτουν:

$$y_1(0,t) = y_2(0,t) \overset{(1),(2)}{\Rightarrow} A = B + C \qquad \textbf{(4)}$$

$$y_2(\ell,t) = y_3(\ell,t) \overset{(2),(3)}{\Rightarrow} Be^{-ik_2\ell} + Ce^{ik_2\ell} = De^{-ik_3\ell} \qquad \textbf{(5)}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

$$\left.\frac{\partial y_1}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial y_2}{\partial x}\right|_{x=0} \overset{(1),(2)}{\Rightarrow} -ik_1 A = -ik_2 B + ik_2 C \Rightarrow -k_1 A = k_2(C-B) \qquad \textbf{(6)}$$

$$\left.\frac{\partial y_2}{\partial x}\right|_{x=\ell} = \left.\frac{\partial y_3}{\partial x}\right|_{x=\ell} \overset{(2),(3)}{\Rightarrow} -ik_2 Be^{-ik_2\ell} + ik_2 Ce^{ik_2\ell} = -ik_3 De^{-ik_3\ell} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_2(Ce^{ik_2\ell} - Be^{-ik_2\ell}) = -k_3 De^{-ik_3\ell} \qquad \textbf{(7)}$$

Αντικαθιστώντας στην **(6)** την **(4)** προκύπτει:

$$-k_1(B+C) = k_2(C-B) \Rightarrow (k_2-k_1)B = (k_1+k_2)C \Rightarrow \frac{C}{B} = \frac{k_2-k_1}{k_1+k_2} \qquad \textbf{(8)}$$

Ενώ διαιρώντας κατά μέλη τις **(7)** και **(5)** προκύπτει:

$$\frac{k_2(Ce^{ik_2\ell} - Be^{-ik_2\ell})}{Be^{-ik_2\ell} + Ce^{ik_2\ell}} = \frac{-k_3 De^{-ik_3\ell}}{De^{-ik_3\ell}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_2 Ce^{ik_2\ell} - k_2 Be^{-ik_2\ell} = -k_3 Be^{-ik_2\ell} - k_3 Ce^{ik_2\ell} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(k_2 e^{ik_2\ell} + k_3 e^{ik_2\ell}) = B(k_2 e^{-ik_2\ell} - k_3 e^{-ik_2\ell}) \Rightarrow \frac{C}{B} = \frac{k_2 e^{-ik_2\ell} - k_3 e^{-ik_2\ell}}{k_2 e^{ik_2\ell} + k_3 e^{ik_2\ell}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{C}{B} = \frac{k_2-k_3}{k_2+k_3} e^{-2ik_2\ell} \qquad \textbf{(9)}$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις **(8)** και **(9)** προκύπτει:

$$\frac{k_2-k_1}{k_1+k_2} = \frac{k_2-k_3}{k_2+k_3} e^{-2ik_2\ell} \Rightarrow \frac{k_2-k_1}{k_1+k_2} e^{2ik_2\ell} = \frac{k_2-k_3}{k_2+k_3} \qquad \textbf{(10)}$$

Αλλά $e^{2ik_2\ell} = \cos 2k_2\ell + i\sin 2k_2\ell$ κι επειδή το δεύτερο μέλος της **(10)** είναι πραγματικό άρα θα πρέπει να είναι και το πρώτο πραγματικό, οπότε η **(10)** γίνεται:

$$\frac{k_2-k_1}{k_1+k_2} \cos 2k_2\ell = \frac{k_2-k_3}{k_2+k_3} \qquad \textbf{(11)}$$

EMC²

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

Ένας τρόπος για να ικανοποιείται η εξίσωση **(11)** είναι να ισχύει:

$$2k_2\ell=\pi \Rightarrow k_2=\frac{\pi}{2\ell} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_2}=\frac{\pi}{2\ell} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell=\frac{\lambda_2}{4}=\frac{2\pi/k_2}{4}=\frac{\pi}{2k_2}=\frac{\pi}{2\omega/\upsilon_2}=\frac{\pi\upsilon_2}{2\omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell=\frac{\pi}{2\omega}\sqrt{\frac{T}{\rho_2}} \qquad \textbf{(12)}$$

και τότε η σχέση **(11)** δίνει:

$$\frac{k_2-k_1}{k_1+k_2}\cos\pi=\frac{k_2-k_3}{k_2+k_3} \Rightarrow \frac{k_2-k_1}{k_1+k_2}(-1)=\frac{k_2-k_3}{k_2+k_3} \Rightarrow \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}=\frac{k_2-k_3}{k_2+k_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1k_2-k_2^2+k_1k_3-k_2k_3=k_1k_2-k_1k_3+k_2^2-k_2k_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2k_2^2=2k_1k_3 \Rightarrow k_2^2=k_1k_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2}{\upsilon_2^2}=\frac{\omega}{\upsilon_1}\frac{\omega}{\upsilon_3} \Rightarrow \upsilon_2^2=\upsilon_1\upsilon_3 \Rightarrow \frac{T}{\rho_2}=\sqrt{\frac{T}{\rho_1}}\sqrt{\frac{T}{\rho_3}} \Rightarrow \rho_2=\sqrt{\rho_1\rho_3} \qquad \textbf{(13)}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

ΘΕΜΑ 11

Δύο χορδές με γραμμικές πυκνότητες ρ_1 και $\rho_2 > \rho_1$ συνδέονται στο x=0 με σημειακό συνδετήρα μάζας m και τεντώνεται ως μια χορδή με κοινή τάση Τ. Στην αριστερή χορδή (ρ_1) διεγείρεται ένα δεξιά οδεύον αρμονικό κύμα συχνότητας ω το οποίο στο σημείο σύνδεσης εν μέρει ανακλάται και εν μέρει διαδίδεται στη δεύτερη χορδή (ρ_2). Αν τα κύματα στις δύο συνδεδεμένες χορδές είναι:

$y_1(x,t) = A_1 e^{i(\omega t - k_1 x)} + A_2 e^{i(\omega t + k_1 x)}$, x<0

$y_2(x,t) = B e^{i(\omega t - k_2 x)}$, x>0

απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

α) Ποια είναι η σημασία του λόγου A_2 / A_1 και B / A_1;

β) Γιατί στα ορίσματα των εκθετικών όρων η συχνότητα είναι κοινή ενώ ο κυματάριθμος διαφορετικός;

γ) Γράψτε την εξίσωση συνέχειας της χορδής στο x=0 για κάθε χρονική στιγμή.

δ) Γράψτε την εξίσωση κίνησης του σημειακού συνδετήρα m.

ε) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των **(γ)** και **(δ)** υπολογίστε τους συντελεστές ανάκλασης και διάδοσης πλάτους R_{12} και T_{12} αντίστοιχα, στο σημείο x=0.

στ) Προσδιορίστε τις τιμές που λαμβάνουν οι συντελεστές R_{12} και T_{12} στις περιπτώσεις:

i) $\rho_1 = \rho_2$ και $m \neq 0$ **ii)** $\rho_1 \neq \rho_2$ και $m = 0$

Λύση

α) Ο λόγος A_2 / A_1 εκφράζει το λόγο του πλάτους του ανακλώμενου κύματος προς το πλάτος του προσπίπτοντος κύματος και λέγεται συντελεστής ανάκλασης πλάτους R. Ενώ ο λόγος B / A_1 εκφράζει το λόγο του πλάτους του διαδιδόμενου κύματος προς το πλάτος του προσπίπτοντος κύματος και λέγεται συντελεστής διάδοσης πλάτους Τ.

β) Η συχνότητα στα ορίσματα των εκθετικών όρων και των δύο κυμάτων είναι η ίδια γιατί η συχνότητα εξαρτάται μόνο από την πηγή που εκπέμπει το προσπίπτον κύμα $A_1 e^{i(\omega t - k_1 x)}$ και επομένως και το ανακλώμενο και το διαδιδόμενο κύμα έχουν την ίδια συχνότητα.
Αντίθετα το προσπίπτον και το ανακλώμενο κύμα έχουν το ίδιο κυματάριθμο k_1 γιατί διαδίδονται στο ίδιο μέσο, ενώ το διαδιδόμενο κύμα έχει κυματάριθμο $k_2 \neq k_1$ γιατί διαδίδεται σε διαφορετικό μέσο ($\rho_1 \neq \rho_2$ κι επομένως $Z_1 \neq Z_2$).

γ) Η εξίσωση συνέχειας της χορδής στο σημείο x=0 δίνει:

$$y_1(0,t) = y_2(0,t) \Rightarrow A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{i\omega t} = B e^{i\omega t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1 + A_2 = B \Rightarrow A_2 = B - A_1 \qquad \textbf{(1)}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

δ) Η εξίσωση κίνησης του σημειακού συνδετήρα m, όπως έχει αποδειχθεί στο **Θέμα 4** είναι:

$$T\left.\frac{\partial y_2}{\partial x}\right|_{x=0} - T\left.\frac{\partial y_1}{\partial x}\right|_{x=0} = m\left.\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right|_{x=0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -TBik_2 e^{i\omega t} - T(-A_1 ik_1 e^{i\omega t} + A_2 ik_1 e^{i\omega t}) = mB(i\omega)^2 e^{i\omega t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -TBk_2 - Tk_1(-A_1 + A_2) = im\omega^2 B \qquad \textbf{(2)}$$

ε) Αντικαθιστώντας την **(1)** στην **(2)** προκύπτει:

$$-TBk_2 - Tk_1(-A_1 + B - A_1) = im\omega^2 B \Rightarrow -TB(k_1 + k_2) + 2Tk_1 A_1 = im\omega^2 B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2Tk_1 A_1 = [T(k_1 + k_2) + im\omega^2]B \Rightarrow \frac{B}{A_1} = \frac{2Tk_1}{T(k_1 + k_2) + im\omega^2} \qquad \textbf{(3)}$$

Και η **(1)** λόγω της **(3)** δίνει:

$$A_2 = B - A_1 \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{B}{A_1} - 1 \overset{(3)}{\Rightarrow} \frac{A_2}{A_1} = \frac{T(k_1 - k_2) - im\omega^2}{T(k_1 + k_2) + im\omega^2} \qquad \textbf{(4)}$$

Αλλά επειδή $\upsilon = \sqrt{T/\rho}$ και $\upsilon = \omega/k$ είναι: $\omega/k = \sqrt{T/\rho} \Rightarrow k = \omega\sqrt{\rho/T}$

Δηλαδή: $k_1 = \omega\sqrt{\rho_1/T}$ και $k_2 = \omega\sqrt{\rho_2/T}$ **(5)**

Οπότε οι **(3)** και **(4)** λόγω των **(5)** δίνουν τους συντελεστές ανάκλασης και διάδοσης ως:

$$R_{12} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{\omega T}{\sqrt{T}}(\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}) - im\omega^2}{\frac{\omega T}{\sqrt{T}}(\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}) + im\omega^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{12} = \frac{\sqrt{T}(\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}) - im\omega^2}{\sqrt{T}(\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}) + im\omega^2} \qquad \textbf{(6)}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕ

$$T_{12} = \frac{B}{A_1} = \frac{2T\omega\sqrt{\rho_1/T}}{\frac{\omega T}{\sqrt{T}}(\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2})+im\omega^2} \Rightarrow T_{12} = \frac{2\sqrt{T}\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{T}(\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2})+im\omega^2} \quad \textbf{(7)}$$

στ) i) Αν $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ και $m \neq 0$ οι **(6)**, **(7)** γίνονται:

$$R_{12} = \frac{-im\omega^2}{2\sqrt{T\rho}+im\omega^2} \qquad \text{και} \qquad T_{12} = \frac{2\sqrt{T\rho}}{2\sqrt{T\rho}+im\omega}$$

ii) Αν $\rho_1 \neq \rho_2$ και m=0 οι **(6)**, **(7)** γίνονται :

$$R_{12} = \frac{\sqrt{\rho_1}-\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2}} \qquad \text{και} \qquad T_{12} = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2}}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

ΘΕΜΑ 12

Ιδανική ελαστική χορδή με γραμμική πυκνότητα ρ εκτείνεται από x=0 έως $x=+\infty$ με τάση T. Το άκρο της χορδής που βρίσκεται στο x=0 είναι συνδεδεμένο σε μια έλξη από την οποία υφίσταται εγκάρσια δύναμη $F_y=-b\upsilon_y$, όπου b μια θετική σταθερά και υ_y η εγκάρσια ταχύτητα της χορδής στο x=0. Στη χορδή διαδίδεται, από το $x=+\infty$ προς το x=0, ένα αριστερά οδεύον αρμονικό κύμα $y_1=A\cos(\omega t+kx)$.

α) Δείξτε ότι η οριακή συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση απομάκρυνσης της χορδής από την κατάσταση ισορροπίας y=y(x,t) στο σημείο x=0 είναι:

$$T\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0}=b\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{x=0}$$

β) Αν το ανακλώμενο κύμα στο x=0 έχει τη μορφή $y_2=B\cos(\omega t-kx)$, να υπολογιστεί ο συντελεστής ανάκλασης B/A.

γ) Υπολογίστε ένα κατάλληλο b, συναρτήσει των T και ρ, ώστε να μην υπάρχει καθόλου ανακλώμενο κύμα. Δίνεται: $\upsilon^2=T/\rho=(\omega/k)^2$.

Λύση

α) Επειδή δεν υπάρχει σημειακή μάζα (m=0) στο άκρο της χορδής το οποίο είναι συνδεδεμένο με την έλξη, ο 2ος νόμος του Newton στην κατακόρυφη διεύθυνση της κίνησης της χορδής δίνει:

$$\Sigma F_y=m\alpha_y \overset{m=0}{\Rightarrow} \Sigma F_y=0 \Rightarrow T'_y-F_y=0 \Rightarrow T'_y=b\upsilon_y \Rightarrow T'\sin\theta=b\upsilon_y \quad \textbf{(1)}$$

Αλλά η T'_x ισούται με την τάση T που τείνει τη χορδή οπότε:

$$T'_x=T \Rightarrow T'\cos\theta=T \Rightarrow T'=T/\cos\theta \quad \textbf{(2)}$$

Επομένως η **(1)** λόγω της **(2)** γράφεται:

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

$$T\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = b\upsilon_y \Rightarrow T\tan\theta = b\upsilon_y \qquad \textbf{(3)}$$

όπου $\tan\theta = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0}$ είναι η κλίση της χορδής στο σημείο x=0

και $\upsilon_y = \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{x=0}$ είναι η εγκάρσια ταχύτητα της χορδής στο x=0.

Άρα η **(3)** παίρνει τη μορφή: $T\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0} = b\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{x=0}$ **(4)**

και αποτελεί την οριακή συνθήκη της απομάκρυνσης της χορδής στο σημείο x=0.

β) Η απομάκρυνση της χορδής y(x,t) σε κάθε σημείο είναι η επαλληλία του προσπίπτοντος $y_1(x,t)$ και του ανακλώμενου $y_2(x,t)$ κύματος. Δηλαδή:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x,t) = A\cos(\omega t + kx) + B\cos(\omega t - kx) \qquad \textbf{(5)}$$

Επομένως η οριακή συνθήκη **(4)** στο άκρο της χορδής x=0 λόγω της **(5)** δίνει:

$$T[-kA\sin(\omega t + kx) + Bk\sin(\omega t - kx)]_{x=0} =$$

$$= b[-\omega A\sin(\omega t + kx) - \omega B\sin(\omega t - kx)]_{x=0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(-kA\sin\omega t + Bk\sin\omega t) = b(-\omega A\sin\omega t - \omega B\sin\omega t) \overset{\forall t}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow -Tk(A - B) = -b\omega(A + B) \Rightarrow -TkA + b\omega A = -TkB - b\omega B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(b\omega - Tk) = -B(b\omega + Tk) \Rightarrow \frac{B}{A} = -\frac{b\omega - Tk}{b\omega + Tk} \Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{Tk - b\omega}{Tk + b\omega} \qquad \textbf{(6)}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

γ) Ο συντελεστής ανάκλασης μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$R = \frac{B}{A} = \frac{k(T - b\omega / k)}{k(T + b\omega / k)} \Rightarrow R = \frac{T - b\upsilon}{T + b\upsilon} \qquad \textbf{(7)}$$

όπου υ=ω/k η φασική ταχύτητα του κύματος.

Για να μην υπάρχει καθόλου ανακλώμενο κύμα πρέπει:

$$R = 0 \overset{(7)}{\Rightarrow} T - b\upsilon = 0 \Rightarrow T = b\upsilon \Rightarrow b = \frac{T}{\upsilon} = \frac{T}{\sqrt{T/\rho}} \Rightarrow b = \sqrt{T\rho} = Z$$

Δηλαδή για να μην παρατηρείται ανάκλαση στο x=0 θα πρέπει η σταθερά b να είναι ίση με τη χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση της χορδής $Z = \sqrt{T\rho}$.

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕ

ΘΕΜΑ 13

Ένας παλμός με εύρος συχνοτήτων Δω κινείται προς τα δεξιά πάνω σε μια ιδανικά ελαστική χορδή 1 που έχει γραμμική πυκνότητα ρ_1. Η χορδή στο σημείο x=0 είναι συνδεδεμένη με μια άλλη ιδανική χορδή 2 που έχει γραμμική πυκνότητα $\rho_2 = 4\rho_1$ και ολόκληρο το σύστημα τείνεται με σταθερή τάση T.

α) Δείξτε με ποιοτικά επιχειρήματα ότι ο παλμός κατά την κίνησή του στη χορδή 1 δεν αλλάζει σχήμα. Υπολογίστε το χωρικό εύρος Δx του παλμού και την ταχύτητά του.

β) Υπολογίστε την ταχύτητα και το μέγιστο ύψος του ανακλώμενου και του διαδιδόμενου παλμού σε σχέση με τα αντίστοιχα μεγέθη του αρχικού παλμού. Τι μορφή θα έχει ο ανακλώμενος και ο διαδιδόμενος παλμός;

γ) Δείξτε ότι το χωρικό εύρος του ανακλώμενου παλμού είναι ίσο, ενώ το διαδιδόμενο είναι το μισό του εύρους του εισερχόμενου παλμού.

Λύση

α) Ένας παλμός δημιουργείται από την υπέρθεση απλών αρμονικών κυμάτων με διαφορετικά πλάτη και συχνότητες που βρίσκονται συνεχώς κατανεμημένες σε μια περιοχή συχνοτήτων Δω.

Όταν ο παλμός διαδίδεται στη χορδή 1, όλες οι αρμονικές συνιστώσες του διαδίδονται με την ίδια ταχύτητα, επειδή η φασική ταχύτητα στην ομογενή ιδανική χορδή είναι $\upsilon_1 = \sqrt{T/\rho_1}$ δηλαδή ανεξάρτητη του κυματάριθμου k, άρα και της συχνότητας ω (αφού υ=ω/k). Επομένως το σχήμα του παλμού δεν αλλάζει καθώς κινείται στη χορδή 1.

Η ταχύτητα διάδοσης του παλμού είναι: $\upsilon_1 = \sqrt{T/\rho_1}$ **(1)**

Σύμφωνα με το θεώρημα εύρους ζώνης αν Δt είναι η χρονική διάρκεια του παλμού και Δω το εύρος συχνοτήτων του τότε ισχύει:

$$\Delta\omega \cdot \Delta t = 2\pi \Rightarrow \Delta t = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \qquad \textbf{(2)}$$

Ενώ αν Δx είναι το χωρικό εύρος του παλμού τότε η ταχύτητά του είναι:

$$\upsilon_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = \upsilon_1 \Delta t \overset{(1),(2)}{\Rightarrow} \Delta x = \frac{2\pi}{\Delta\omega}\sqrt{\frac{T}{\rho_1}} \qquad \textbf{(3)}$$

β) Ο συντελεστής ανάκλασης R_{12} και ο συντελεστής διάδοσης T_{12} δίνονται από τις σχέσεις:

$$R_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\sqrt{T\rho_1} - \sqrt{T\rho_2}}{\sqrt{T\rho_1} + \sqrt{T\rho_2}} = \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} = \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{4\rho_1}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{4\rho_1}} =$$

$$= \frac{-\sqrt{\rho_1}}{3\sqrt{\rho_1}} \Rightarrow R_{12} = -\frac{1}{3} \qquad \textbf{(4)}$$

$$T_{12} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{2\sqrt{T\rho_1}}{\sqrt{T\rho_1} + \sqrt{T\rho_2}} = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{4\rho_1}} = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{3\sqrt{\rho_1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{12} = \frac{2}{3} \qquad \textbf{(5)}$$

Επομένως αν h είναι το ύψος του αρχικού προσπίπτοντος παλμού και h_r, h_t είναι το ύψος του ανακλώμενου και του διαδιδόμενου παλμού αντίστοιχα προκύπτει:

$$R_{12} = \frac{h_r}{h} \overset{(4)}{\Rightarrow} \frac{h_r}{h} = -\frac{1}{3} \Rightarrow h_r = -\frac{h}{3} \qquad \textbf{(6)}$$

$$T_{12} = \frac{h_t}{h} \overset{(5)}{\Rightarrow} \frac{h_t}{h} = \frac{2}{3} \Rightarrow h_t = \frac{2h}{3} \qquad \textbf{(7)}$$

Το αρνητικό πρόσημο στην **(6)** σημαίνει ότι ο ανακλώμενος παλμός είναι ανεστραμμένος. Η ταχύτητα του ανακλώμενου παλμού είναι ίδια με την ταχύτητα του προσπίπτοντος $\upsilon_1 = \sqrt{T/\rho_1}$, επειδή κινείται στη χορδή 1, ενώ η ταχύτητα του διαδιδόμενου παλμού είναι $\upsilon_2 = \sqrt{T/\rho_2}$ επειδή κινείται στη χορδή 2.

γ) Επειδή η ταχύτητα διάδοσης του παλμού στη χορδή 1 είναι $\upsilon_1 = \sqrt{T/\rho_1}$, ένα σημείο Α της χορδής αυτής κινείται κατά την πρόσπτωση του παλμού στου x=0 επί χρόνο:

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x}{\upsilon_1} \Rightarrow \Delta t_1 = \Delta x\sqrt{\frac{\rho_1}{T}} \qquad \textbf{(8)}$$

Τόσο χρόνο θα κινηθεί και το σημείο Α, όσο και τα σημεία αριστερά του Α λόγω του ανακλώμενου παλμού, όσο και τα σημεία δεξιά του Α λόγω του διαδιδόμενου. Έτσι αν

ΜΑΘΗΜΑΤΑ-ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

Δx_r είναι το χωρικό εύρος του ανακλώμενου παλμού και Δx_t το χωρικό εύρος του διαδιδόμενου θα ισχύει:

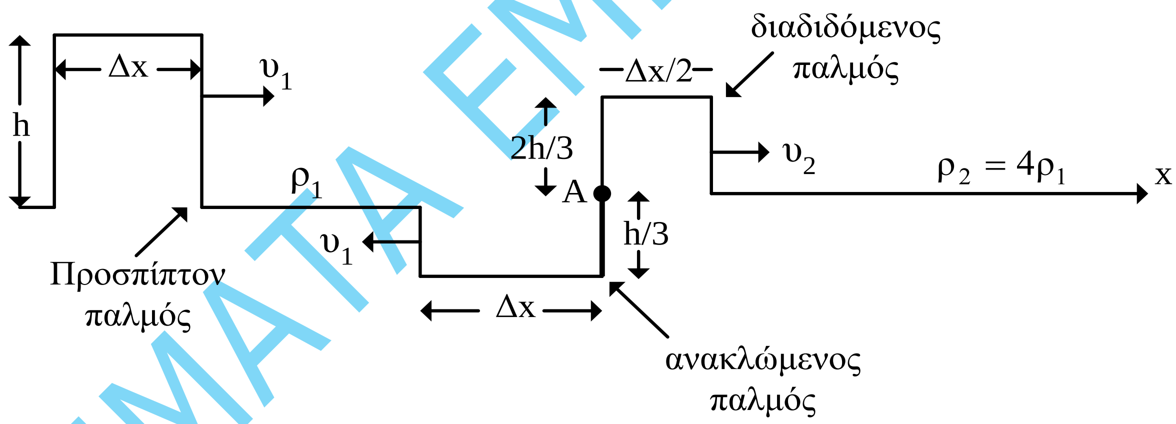
$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x_r}{\upsilon_1} \Rightarrow \Delta x_r = \upsilon_1 \Delta t_1 \overset{(8)}{\Rightarrow} \Delta x_r = \sqrt{\frac{T}{\rho_1}}\Delta x\sqrt{\frac{\rho_1}{T}} \Rightarrow \Delta x_r = \Delta x \qquad \textbf{(9)}$$

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x_t}{\upsilon_2} \Rightarrow \Delta x_t = \upsilon_2 \Delta t_1 \overset{(8)}{\Rightarrow} \Delta x_t = \sqrt{\frac{T}{\rho_2}}\Delta x\sqrt{\frac{\rho_1}{T}} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\Delta x = \sqrt{\frac{\rho_1}{4\rho_1}}\Delta x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta x_t = \frac{\Delta x}{2} \qquad \textbf{(10)}$$

Άρα ο ανακλώμενος παλμός έχει χωρικό εύρος (μήκος) όσο και ο προσπίπτων $\Delta x_r = \Delta x$, ύψος h/3 και είναι ανεστραμμένος. Ενώ ο διαδιδόμενος παλμός έχει μήκος το μισό του προσπίπτοντος $\Delta x_t = \Delta x/2$ και ύψος 2h/3.

Το στιγμιότυπο μετά την πλήρη ανάκλαση του παλμού φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

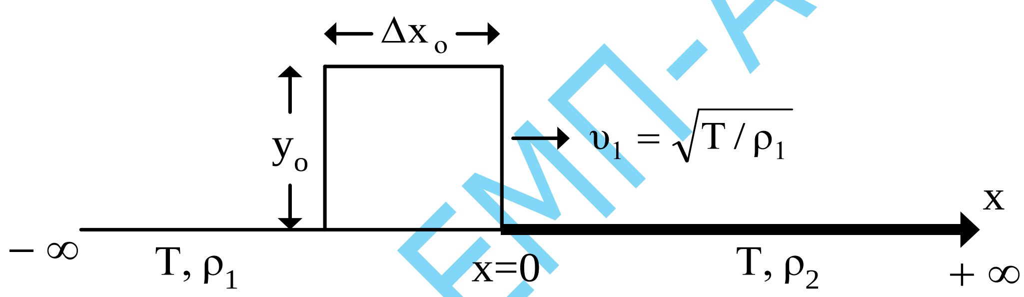


ΘΕΜΑ 14

Δύο ημιάπειρες ιδανικές χορδές, με γραμμικές πυκνότητες ρ_1 και $\rho_2 = 4\rho_1$, συνδέονται στο σημείο x=0 και τείνονται με τάση T. Στην αριστερή ημιχορδή διαδίδεται προς τα δεξιά ένας τετραγωνικός παλμός ύψους $y_o > 0$ και πλάτους Δx_o, του οποίου το δεξιό μέτωπο (έναρξη) φτάνει στο σημείο x=0 τη χρονική στιγμή t=0. Κατά τη χρονική στιγμή $t_o = 4\Delta x_o / 5\sqrt{T/\rho_1}$ δώστε τις τιμές ύψους και πλάτους του προσπίπτοντος στην ασυνέχεια, του ανακλώμενου και του διερχόμενου παλμού ως συναρτήσεις των y_o και Δx_o. Σχεδιάστε την αντίστοιχη εικόνα διαταραχής των δύο χορδών για $t = t_o$.

Λύση

Τη χρονική στιγμή t=0 το σχήμα του προσπίπτοντος παλμού είναι:



Τα ύψη του ανακλώμενου και του διερχόμενου παλμού προσδιορίζονται, όπως έγινε και στο **Θέμα 13**, από τους συντελεστές ανάκλασης και διάδοσης και είναι πάλι:

$$y_r = -y_o/3 \quad \text{και} \quad y_t = 2y_o/3 \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά τώρα κατά τη χρονική στιγμή $t_o = 4\Delta x_o / 5\upsilon_1$ το πλάτος του ανακλώμενου και του διερχόμενου παλμού είναι:

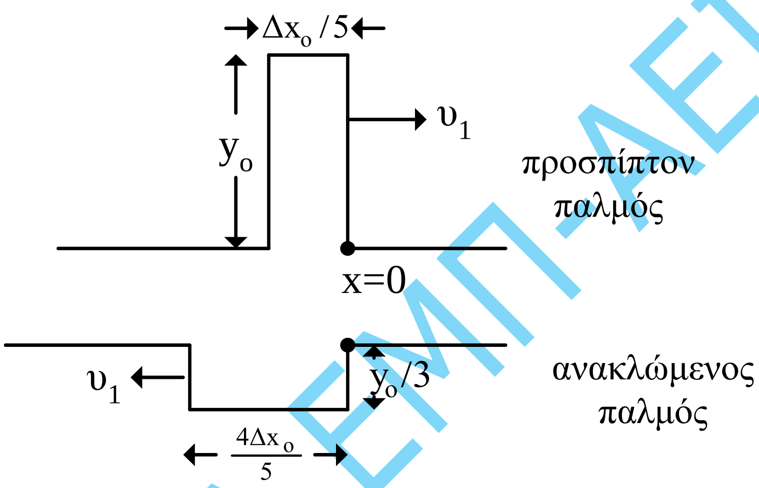
$$t_o = \frac{\Delta x_r}{\upsilon_1} \Rightarrow \Delta x_r = \upsilon_1 t_o = \upsilon_1 \frac{4\Delta x_o}{5\upsilon_1} \Rightarrow \Delta x_r = \frac{4}{5}\Delta x_o \qquad \textbf{(2)}$$

και $$t_o = \frac{\Delta x_t}{\upsilon_2} \Rightarrow \Delta x_t = \upsilon_2 t_o = \upsilon_2 \frac{4\Delta x_o}{5\upsilon_1} = \sqrt{\frac{T}{\rho_2}}\,\frac{4\Delta x_o}{5\sqrt{T/\rho_1}} =$$

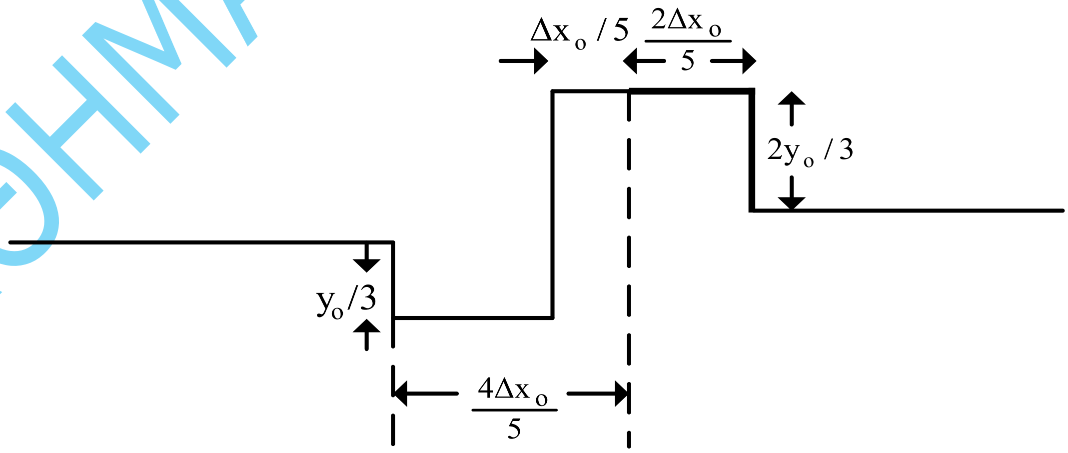
$$= \frac{4}{5}\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\Delta x_o = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{\rho_1}{4\rho_1}}\Delta x_o \Rightarrow \Delta x_t = \frac{2}{5}\Delta x_o \qquad \textbf{(3)}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

Άρα κατά τη χρονική στιγμή t_o ο προσπίπτων παλμός έχει ανακλαστεί μερικώς και δεξιά του σημείου x=0 υπάρχει ο διαδιδόμενος παλμός πλάτους $2\Delta x_o/5$ και ύψους $2y_o/3$, ενώ αριστερά του σημείου x=0 υπάρχει ανακλώμενος παλμός πλάτους $4\Delta x_o/5$ και ύψους $-y_o/3$ ανεστραμμένος και ταυτόχρονα προσπίπτον παλμός πλάτους $\Delta x_o/5$ και ύψους y_o. Δηλαδή συνολικά αριστερά του x=0 υπάρχει παλμός (που προκύπτει με πρόσθεση του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου) πλάτους $4\Delta x_o/5$ και ύψους $2y_o/3$ για πλάτος $\Delta x_o/5$ και $-y_o/3$ για πλάτος $3\Delta x_o/5$.



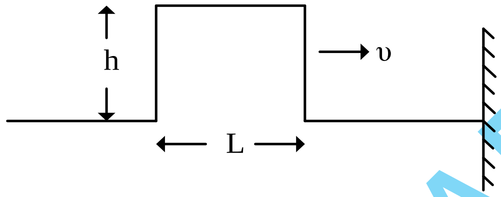
Συνεπώς η συνολική εικόνα διαταραχής είναι:



ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

ΘΕΜΑ 15

Ένας τετραγωνικός παλμός πλάτους L και ύψους h διαδίδεται σε χορδή με ταχύτητα υ προς τα δεξιά. Η χορδή παρουσιάζει σύνθετη αντίσταση Z και το δεξιό άκρο της είναι ακλόνητο. Να σχεδιαστεί το στιγμιότυπο όταν:



α) Έχει ανακλαστεί μήκος L/4 του παλμού.
β) Έχει ανακλαστεί μήκος L/2 του παλμού.
γ) Έχει ανακλαστεί πλήρως ο παλμός.
δ) Να επαναληφθεί το ερώτημα **(α)** όταν το δεξιό άκρο της χορδής είναι ελεύθερο.

Λύση

Επειδή το ακλόνητο άκρο ισοδυναμεί με χορδή άπειρης σύνθετης αντίστασης $(Z_2 = \infty)$ και η χορδή έχει αντίσταση $Z_1 = Z$ οι συντελεστές ανάκλασης και διάδοσης είναι:

$$R_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z_1/Z_2 - 1}{Z_1/Z_2 + 1} \Rightarrow R_{12} = -1$$

$$T_{12} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{2Z_1/Z_2}{Z_1/Z_2 + 1} \Rightarrow T_{12} = 0$$

επειδή για $Z_1 = Z$ και $Z_2 \to \infty$ είναι : $\quad Z_1/Z_2 \to 0$

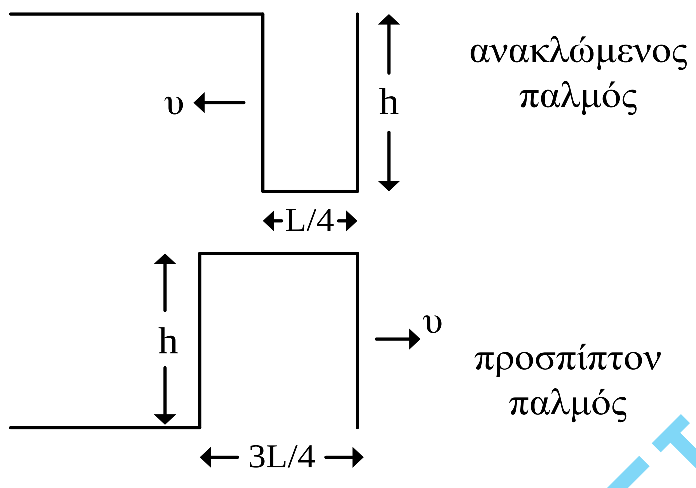
Δηλαδή ο ανακλώμενος παλμός προκύπτει με αναστροφή του προσπίπτοντος, ενώ διαδιδόμενος παλμός δεν υπάρχει.

α) Το ύψος του ανακλώμενου παλμού είναι:

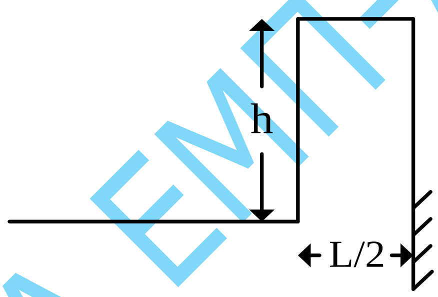
$$R_{12} = \frac{h_r}{h} \Rightarrow \frac{h_r}{h} = -1 \Rightarrow h_r = -h$$

Τη χρονική στιγμή που έχει ανακλαστεί μήκος L/4 του προσπίπτοντος παλμού υπάρχει ο ανακλώμενος και ο προσπίπτων παλμός που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:

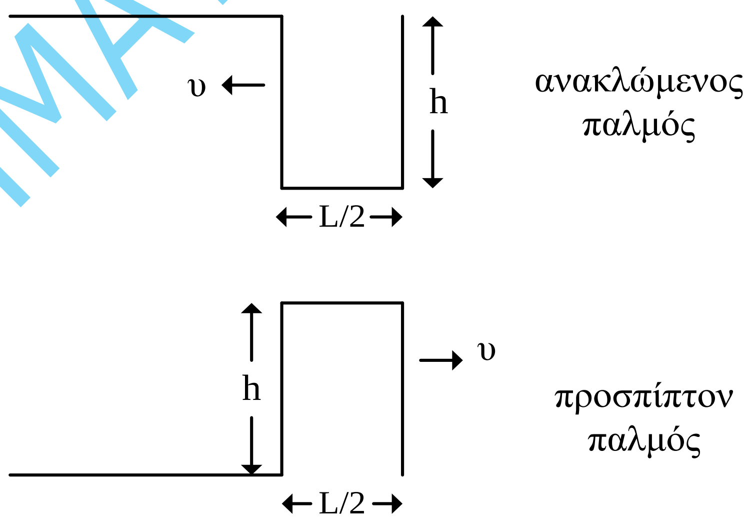
ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕ



Προσθέτοντας τους δύο αυτούς παλμούς προκύπτει το στιγμιότυπο όταν έχει ανακλαστεί μήκος L/4 και φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:

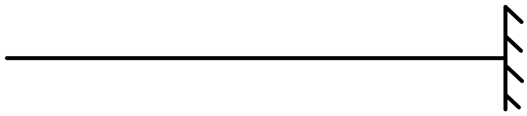


β) Τη μεταγενέστερη χρονική στιγμή που έχει ανακλαστεί μήκος L/2 του προσπίπτοντος παλμού υπάρχει ο ανακλώμενος και ο προσπίπτον παλμός του σχήματος.

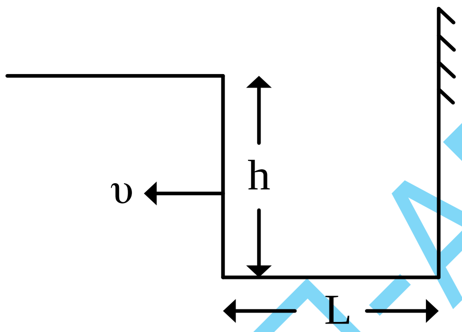


ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

Προσθέτοντας τους δύο αυτούς παλμούς προκύπτει το στιγμιότυπο όπου έχει ανακλαστεί μήκος L/2 του αρχικού παλμού και φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



γ) Όταν έχει ανακλαστεί πλήρως ο παλμός προφανώς προκύπτει το ακόλουθο στιγμιότυπο.



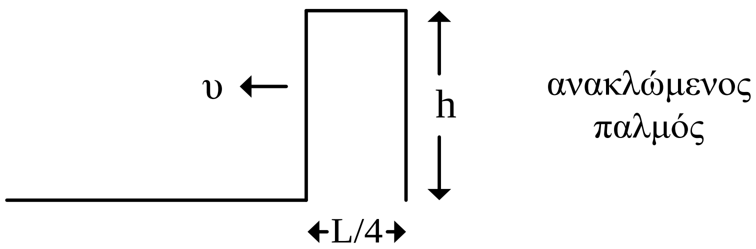
δ) Όταν το δεξιό άκρο της χορδής είναι ελεύθερο, αυτό προσομοιάζει σαν η χορδή να έχει συνδεθεί στο σημείο αυτό με άλλη χορδή μηδενικής αντίστασης, δηλαδή είναι $Z_1 = Z$ και $Z_2 = 0$. Οπότε οι συντελεστές ανάκλασης και διάδοσης τώρα είναι:

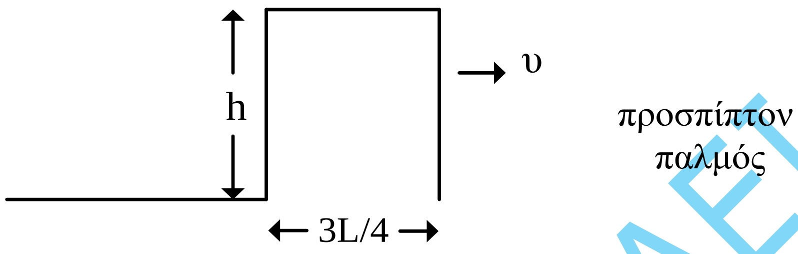
$$R_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z - 1}{Z + 0} \Rightarrow R_{12} = 1$$

$$T_{12} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{2Z}{Z + 0} \Rightarrow T_{12} = 2$$

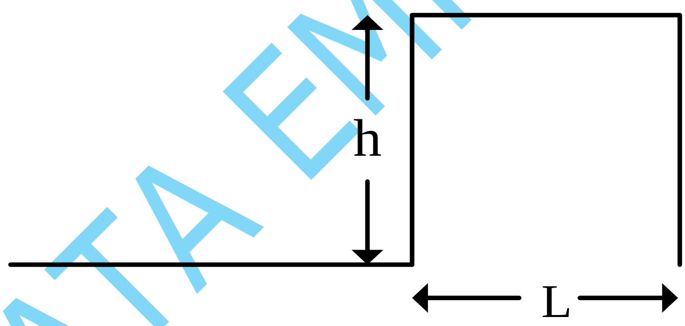
Δηλαδή ο ανακλώμενος παλμός έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με τον προσπίπτοντα και δεν είναι ανεστραμμένος.
Άρα όταν έχει ανακλαστεί μήκος L/4 υπάρχει ο ανακλώμενος και ο προσπίπτων παλμός του ακόλουθου σχήματος:

ΜΑΘΗΜΑΤΑ-ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕ





Πρόσθεση των δύο παραπάνω παλμών δίνει το στιγμιότυπο της χορδής όταν έχει ανακλαστεί μήκος L/4.



Παρατηρείται ότι σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, δηλαδή όσο μήκος και να έχει ανακλαστεί η επαλληλία του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου παλμού δίνουν πάντα το στιγμιότυπο του παραπάνω σχήματος.

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ