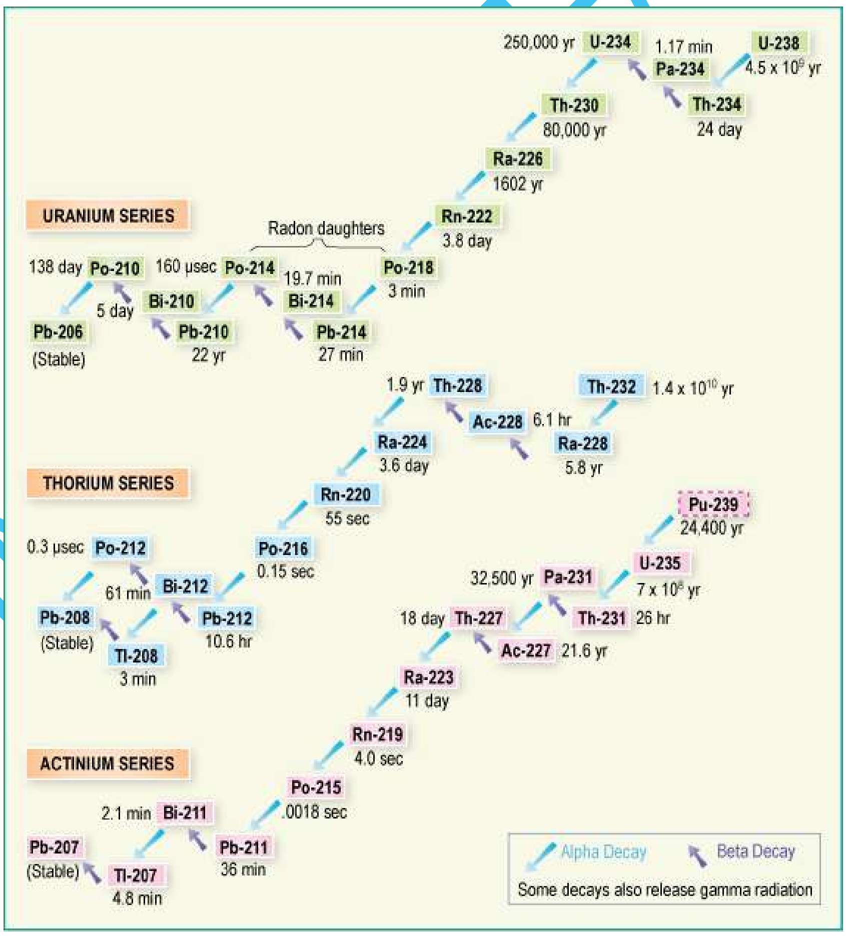
ΑΛΥΣΙΔΑ ΡΑΔΙΕΝΕΡΓΩΝ ΔΙΑΣΠΑΣΕΩΝ

Πολλοί ραδιενεργοί βαρείς (με μεγάλο μαζικό αριθμό) πυρήνες δεν γίνονται σταθεροί μετά από μια διάσπαση. Οι θυγατρικοί τους πυρήνες είναι επίσης ραδιενεργοί και συνεχίζουν να διασπώνται έως ότου μεταπέσουν σε σταθερό πυρήνα. Οι αλυσίδες αυτές διαδοχικών ραδιενεργών διασπάσεων λέγονται και **ραδιενεργές σειρές**.
Στη φύση υπάρχουν τρεις ραδιενεργές σειρές, οι οποίες είναι γνωστές με το όνομα του μακρόβιου ραδιενεργού πυρήνα ως:

1. Η **σειρά του θορίου** με μητρικό πυρήνα το $^{232}_{90}Th$.
2. Η **σειρά του ουρανίου** με μητρικό πυρήνα το ισότοπο $^{238}_{92}U$.
3. Η **σειρά του ακτινίου** με μητρικό πυρήνα το ισότοπο $^{235}_{92}U$.



ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ☎6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την ακόλουθη αλυσίδα δύο ραδιενεργών διασπάσεων:

$$A \xrightarrow{\lambda_A} B \xrightarrow{\lambda_B} C$$

όπου οι πυρήνες A και B είναι ραδιενεργοί με σταθερές διάσπασης λ_A και λ_B αντίστοιχα, ενώ οι πυρήνες C θεωρούνται σταθεροί και δε διασπώνται (γι' αυτό δεν έχουν σταθερά διάσπασης).
Αρχικά τη χρονική στιγμή $t = 0$ το δείγμα αποτελείται μόνο από αδιάσπαστους πυρήνες του στοιχείου A, δηλαδή οι αρχικές συνθήκες είναι:

$$N_{A_0} = N_0, \ \ N_{B_0} = 0 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ N_{C_0} = 0$$

Σε μια μεταγενέστερη τυχαία χρονική στιγμή t οι αδιάσπαστοι πυρήνες των στοιχείων παριστάνονται στο ακόλουθο σχήμα:

$$\boxed{N_A} \xrightarrow{\lambda_A} \boxed{N_B} \xrightarrow{\lambda_B} \boxed{N_C}$$

Οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τις μεταβολές των πυρήνων των στοιχείων αυτών είναι:

- Για τους πυρήνες του στοιχείου A ισχύει ο νόμος ραδιενεργού διάσπασης:
$$\frac{dN_A}{dt} = -\lambda_A N_A \quad , \mu\varepsilon \ \ N_{Ao} = N_0 \qquad \mathbf{(1)}$$
- Για τους πυρήνες του στοιχείου B, καθώς δημιουργούνται από τη διάσπαση των πυρήνων A και εν συνεχεία μέρος αυτών διασπώνται με σταθερά διάσπασης λ_B ισχύει:
$$\frac{dN_B}{dt} = \lambda_A N_A - \lambda_B N_B \quad , \mu\varepsilon \ N_{B_0} = 0 \quad \mathbf{(2)}$$
- Για τους πυρήνες του στοιχείου C, καθώς δημιουργούνται από τη διάσπαση των πυρήνων B και είναι σταθεροί και δε διασπώνται ισχύει:
$$\frac{dN_C}{dt} = \lambda_B N_B \quad , \mu\varepsilon \ N_{C_0} = 0 \qquad \mathbf{(3)}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε χρονική στιγμή ισχύει: $N_0 = N_A + N_B + N_C$ $\mathbf{(4)}$

Η διαφορική εξίσωση **(1)** είναι 1ης τάξης χωριζόμενων μεταβλητών και η λύση της είναι:

$$\int_{N_0}^{N_A} \frac{dN_A}{N_A} = -\lambda_A \int_0^t dt \Rightarrow \ln\left(\frac{N_A}{N_0}\right) = -\lambda_A t \Rightarrow \boldsymbol{N_A(t) = N_0 e^{-\lambda_A t}} \quad \mathbf{(5)}$$

Αντικαθιστώντας την **(5)** στην **(2)** προκύπτει η ακόλουθη μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης:

$$\frac{dN_B}{dt} + \lambda_B N_B = \lambda_A N_0 e^{-\lambda_A t} \quad \mathbf{(6)}$$

Μαθηματικό συμπλήρωμα:

Η λύση μιας μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης: $y' + f(x)y = g(x)$ βρίσκεται αν πολλαπλασιαστεί με τον ολοκληρωτικό παράγοντα $e^{\int f(x)dx}$ ως εξής:

$$e^{\int f(x)dx} y' + e^{\int f(x)dx} f(x)y = e^{\int f(x)dx} g(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(e^{\int f(x)dx} y\right)' = g(x)e^{\int f(x)dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{\int f(x)dx} y\right) = g(x)e^{\int f(x)dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int d\left(e^{\int f(x)dx} y\right) = \int g(x)\, e^{\int f(x)dx} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\int f(x)dx} y = \int g(x)\, e^{\int f(x)dx} dx + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{y(x) = e^{-\int f(x)dx}\left[\int g(x)\, e^{\int f(x)dx} dx + c\right]}$$

Άρα στην περίπτωση της διαφορικής εξίσωσης **(6)** είναι: $f(t) = \lambda_B$ και $g(t) = \lambda_A N_0 e^{-\lambda_A t}$ οπότε η γενική λύση της είναι:

$$N_B(t) = e^{-\int f(t)dt}\left[\int g(t)\, e^{\int f(t)dt} dt + c\right] =$$

$$= e^{-\int \lambda_B dt}\left[\int \lambda_A N_0 e^{-\lambda_A t}\, e^{\int \lambda_B dt} dt + c\right] = e^{-\lambda_B t}\left[\lambda_A N_0 \int e^{(\lambda_B - \lambda_A)t} dt + c\right]$$

$$= e^{-\lambda_B t}\left[\frac{\lambda_A N_0}{\lambda_B - \lambda_A} e^{(\lambda_B - \lambda_A)t} + c\right] \Rightarrow N_B(t) = \frac{\lambda_A N_0}{\lambda_B - \lambda_A} e^{-\lambda_A t} + c e^{-\lambda_B t} \quad (7)$$

Η σταθερά ολοκλήρωσης c θα προσδιοριστεί από τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή για $t = 0$ είναι $N_{B_0} = 0$ οπότε η (7) δίνει:

$$0 = \frac{\lambda_A N_0}{\lambda_B - \lambda_A} e^0 + c e^0 \Rightarrow c = -\frac{\lambda_A N_0}{\lambda_B - \lambda_A} \quad \mathbf{(8)}$$

Συνεπώς η **(7)** λόγω της **(8)** δίνει:

$$\boxed{\boldsymbol{N_B(t) = \frac{\lambda_A N_0}{\lambda_B - \lambda_A}\left(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}\right) \qquad (9)}}$$

Για να προσδιοριστεί η μέγιστη τιμή του αριθμού των πυρήνων του στοιχείου B θα βρούμε τα ακρότατα της **(9).** Δηλαδή:

$$\frac{dN_B}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\lambda_A N_0}{\lambda_B - \lambda_A}\left(-\lambda_A e^{-\lambda_A t} + \lambda_B e^{-\lambda_B t}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda_A e^{-\lambda_A t} + \lambda_B e^{-\lambda_B t} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_A e^{-\lambda_A t} = \lambda_B e^{-\lambda_B t} \Rightarrow \frac{\lambda_A}{\lambda_B} = e^{\lambda_A t} e^{-\lambda_B t} \Rightarrow \frac{\lambda_A}{\lambda_B} = e^{(\lambda_A - \lambda_B)t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B}\right) = (\lambda_A - \lambda_B)t \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{t = \frac{1}{\lambda_A - \lambda_B} \ln\left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B}\right)}} \quad \mathbf{(10)}$$

Άρα ο μέγιστος αριθμός των αδιάσπαστων πυρήνων του στοιχείου Β λόγω των **(9)** και **(10)** είναι:

$$N_{B_{max}} = \frac{\lambda_A N_0}{\lambda_B - \lambda_A}\left[e^{-\frac{\lambda_A}{\lambda_A-\lambda_B}\ln\left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B}\right)} - e^{-\frac{\lambda_B}{\lambda_A-\lambda_B}\ln\left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B}\right)}\right] =$$

$$= \frac{\lambda_A N_0}{\lambda_B - \lambda_A}\left[e^{\ln\left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B}\right)^{\frac{-\lambda_A}{\lambda_A-\lambda_B}}} - e^{\ln\left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B}\right)^{\frac{-\lambda_B}{\lambda_A-\lambda_B}}}\right] =$$

$$= \frac{\lambda_A N_0}{\lambda_B - \lambda_A}\left[\left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B}\right)^{\frac{-\lambda_A}{\lambda_A-\lambda_B}} - \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B}\right)^{\frac{-\lambda_B}{\lambda_A-\lambda_B}}\right] =$$

$$= \frac{\lambda_A N_0}{\lambda_B - \lambda_A}\left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B}\right)^{\frac{-\lambda_A}{\lambda_A-\lambda_B}}\left[1 - \frac{\left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B}\right)^{\frac{-\lambda_B}{\lambda_A-\lambda_B}}}{\left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B}\right)^{\frac{-\lambda_A}{\lambda_A-\lambda_B}}}\right] =$$

$$= \frac{\lambda_A N_0}{\lambda_B - \lambda_A}\left(\frac{\lambda_B}{\lambda_A}\right)^{\frac{\lambda_A}{\lambda_A-\lambda_B}}\left[1 - \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B}\right)^{\frac{\lambda_A-\lambda_B}{\lambda_A-\lambda_B}}\right] \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{N_{B_{max}} = \frac{\lambda_A N_0}{\lambda_B - \lambda_A}\left(\frac{\lambda_B}{\lambda_A}\right)^{\frac{\lambda_A}{\lambda_A-\lambda_B}}\left[1 - \frac{\lambda_A}{\lambda_B}\right]} \qquad \mathbf{(11)}$$

Επίσης τη χρονική αυτή στιγμή έχουμε τη μέγιστη ραδιενέργεια (ενεργότητα) των πυρήνων του στοιχείου Β, η οποία δίνεται απ' τη σχέση:

$$\boldsymbol{R_{B_{max}} = \lambda_B N_{B_{max}}}$$

Τέλος ο αριθμός των πυρήνων του στοιχείου C σύμφωνα με τις σχέσεις **(4), (5)** και **(9)** είναι:

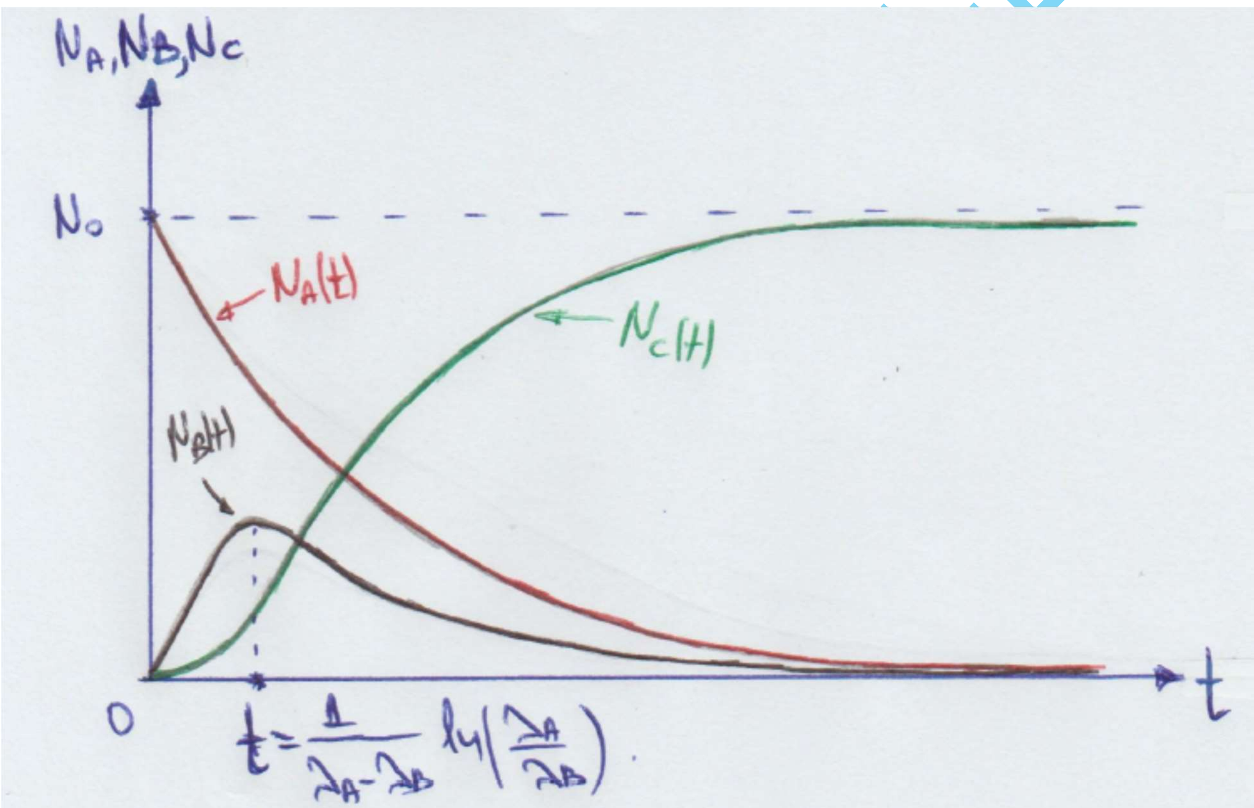
$$N_C(t) = N_0 - N_A(t) - N_B(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_C(t) = N_0 - N_0 e^{-\lambda_A t} - \frac{\lambda_A N_0}{\lambda_B - \lambda_A}\left(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_C(t) = \frac{N_0}{\lambda_B - \lambda_A}\left[(\lambda_B - \lambda_A)\left(1 - e^{-\lambda_A t}\right) - \lambda_A\left(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \boldsymbol{N_C(t) = \frac{N_0}{\lambda_B - \lambda_A}\left[\lambda_B\left(1 - e^{-\lambda_A t}\right) - \lambda_A\left(1 - e^{-\lambda_B t}\right)\right]}}$$

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $N_A(t)$, $N_B(t)$ και $N_C(t)$ φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα:



Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

EMC²
ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com