ΑΓΩΓΟΙ - ΠΥΚΝΩΤΕΣ
(ΘΕΩΡΙΑ)

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

EMC²

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

1. Ηλεκτρικό Πεδίο Αγωγού

Τα υλικά σύμφωνα με τις ηλεκτρικές τους ιδιότητες διακρίνονται σε **μονωτές** (όπως γυαλί, καουτσούκ), όπου κάθε ηλεκτρόνιο είναι δεσμευμένο σε κάποιο άτομο και σε **αγωγούς** (όπως τα μέταλλα), όπου ένας παρά πολύ μεγάλος αριθμός ελεύθερων ηλεκτρονίων μπορούν να κινηθούν ελεύθερα σε ολόκληρο τον όγκο του.

Οι βασικές ηλεκτροστατικές ιδιότητες των αγωγών είναι οι ακόλουθες :

α) Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό ενός αγωγού είναι μηδέν,

$$\mathbf{E_{\varepsilon\sigma} = 0.}$$

Επειδή στην ηλεκτροστατική ενδιαφέρουν μόνο καταστάσεις, στις οποίες τα ηλεκτρόνια του αγωγού βρίσκονται σε ισορροπία (ακινητούν), η απαραίτητη συνθήκη για να συμβαίνει αυτό είναι τα ηλεκτρόνια να κατανέμονται με τέτοιο τρόπο ώστε η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του αγωγού να είναι μηδέν. Διαφορετικά αν υπήρχε οποιοδήποτε πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού, τα ελεύθερά του φορτία θα κινούνταν, γεγονός που αντιτίθεται στην ηλεκτροστατική.

Επειδή η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι μηδέν στο εσωτερικό μιας αγώγιμης κοιλότητας, η κοιλότητα αυτή αποτελεί ένα χώρο θωράκισης από το ηλεκτρικό πεδίο **(κλωβός Faraday)**.

β) Η χωρική πυκνότητα στο εσωτερικό ενός αγωγού είναι μηδέν, ρ=0.

Σύμφωνα με τη διαφορική μορφή του νόμου του Gauss $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_o$, επειδή η ένταση του πεδίου στο εσωτερικό κάθε αγωγού είναι μηδέν ($\vec{E} = 0$), προκύπτει εύκολα ότι στο εσωτερικό κάθε αγωγού είναι ρ=0. Αυτό δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχει φορτίο στο εσωτερικό του αγωγού, αλλά ότι το θετικό φορτίο είναι ακριβώς όσο και το αρνητικό, έτσι ώστε η ολική πυκνότητα φορτίου στο εσωτερικό να είναι μηδέν.

γ) Τα φορτία κατανέμονται μόνο στην επιφάνεια του αγωγού.

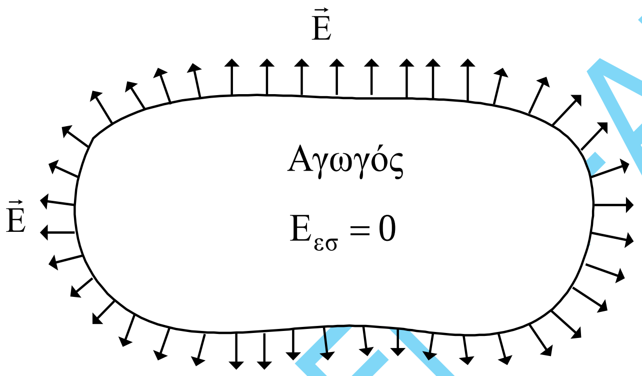
Τα φορτία ενός αγωγού σε κάθε περίπτωση κατανέμονται στην επιφάνειά του και κατά τέτοιο τρόπο, ώστε στο εσωτερικό η ένταση του πεδίου να είναι μηδέν.

δ) Το ηλεκτρικό δυναμικό είναι σταθερό σε όλο τον αγωγό.

Εφόσον η ένταση του πεδίου στο εσωτερικό του αγωγού είναι μηδέν θα ισχύει ότι $\vec{E} = -\vec{\nabla}V = 0$, δηλαδή V = σταθ. Επομένως το δυναμικό θα είναι σταθερό σε όλη την έκταση του αγωγού περιλαμβανομένης και της επιφάνειάς του, η οποία ως εκ τούτου είναι πάντα ισοδυναμική επιφάνεια.

Αυτό προκύπτει και από την παρατήρηση ότι οποιαδήποτε διαφορά δυναμικού τόσο στην επιφάνεια, όσο και μεταξύ της επιφάνειας και του εσωτερικού του αγωγού θα είχε ως αποτέλεσμα κίνηση των φορτίων κι επομένως διατάραξη της κατάστασης ισορροπίας.

ε) Η ένταση του πεδίου $\vec{E}$ είναι κάθετη στην επιφάνεια του αγωγού.



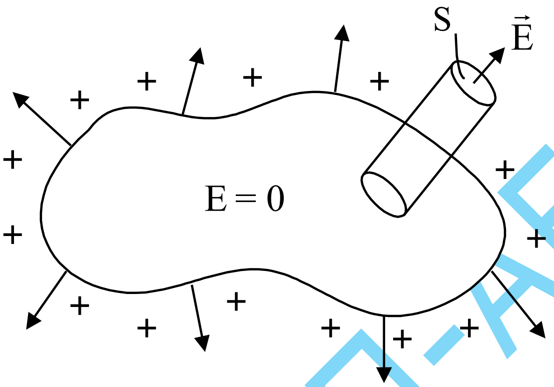
Σχήμα 3.1

Αν η ένταση $\vec{E}$ δεν ήταν κάθετη στην επιφάνεια του αγωγού αλλά υπό κλίση, τότε θα αναλυόταν σε δυο συνιστώσες, μια κάθετη στον αγωγό και μια εφαπτόμενη στον αγωγό, η οποία θα κινούσε τα φορτία κατά την διεύθυνση αυτή. Αλλά κάτι τέτοιο αντιβαίνει στην συνθήκη ισορροπίας των φορτίων (ηλεκτροστατική). Άρα πράγματι το διάνυσμα της έντασης $\vec{E}$ είναι πάντα κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού.

Παράδειγμα:

Να υπολογιστεί η ένταση και το δυναμικό του ηλεκτρικού πεδίου κοντά στην επιφάνεια αγωγού οποιουδήποτε σχήματος με θετική επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ.

Λύση



Σχήμα 3.2

Τονίζεται ότι για έναν τυχαίο αγωγό η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου δεν είναι σταθερή, αλλά μπορεί να θεωρηθεί σταθερή σε μια σχετικά μικρή περιοχή. Σύμφωνα με την ιδιότητα **(ε)** των αγωγών, η ένταση κοντά στον αγωγό είναι κάθετη στην επιφάνειά του.

Επομένως λαμβάνοντας ως επιφάνεια Gauss στοιχειώδη κλειστό κύλινδρο με άξονα κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού, παρατηρείται ότι η ηλεκτρική ροή που διέρχεται τόσο από την επιφάνεια του κυλίνδρου που βρίσκεται στο εσωτερικό του αγωγού, όπου E = 0, όσο και από την εκτός του αγωγού παράπλευρη επιφάνεια αυτού, προς την οποία η ένταση είναι παράλληλη, είναι μηδέν. Δηλαδή ροή εξέρχεται μόνο από την εξωτερική βάση του κυλίνδρου. Άρα ο νόμος του Gauss δίνει:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{encl}}{\varepsilon_o} \Rightarrow ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \qquad \textbf{(1)}$$

Το δυναμικό υπολογίζεται από την σχέση :

$$E = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow dV = -Edx \overset{(3-1)}{\Rightarrow} \int_0^V dV = -\frac{\sigma}{\varepsilon_o}\int_0^x dx \Rightarrow V = -\frac{\sigma}{\varepsilon_o}x$$

2. Πυκνωτές

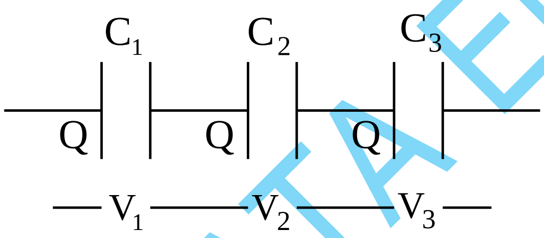
Μια διάταξη δυο γειτονικών αγωγών οποιουδήποτε σχήματος, που φέρουν ίσα και αντίθετα φορτία $\pm Q$ λέγεται **πυκνωτής** και οι αγωγοί **οπλισμοί** αυτού.
Χαρακτηριστικό μέγεθος κάθε πυκνωτή είναι η **χωρητικότητα C**, η οποία ορίζεται ως το πηλίκο του μέτρου του φορτίου Q του κάθε οπλισμού προς τη διαφορά δυναμικού V μεταξύ των οπλισμών. Δηλαδή :

$$\boxed{C = \frac{Q}{V}} \qquad \textbf{(2)}$$

Η χωρητικότητα κάθε πυκνωτή εξαρτάται από το σχήμα κάθε οπλισμού, τη διάταξη των οπλισμών στο χώρο και το υλικό μέσα στο οποίο βρίσκονται οι οπλισμοί. Μονάδα μέτρησης της χωρητικότητας στο S.I. είναι το Farad (1F = 1Cb/Volt).

Συνδεσμολογία πυκνωτών

α) Σύνδεση πυκνωτών σε σειρά :



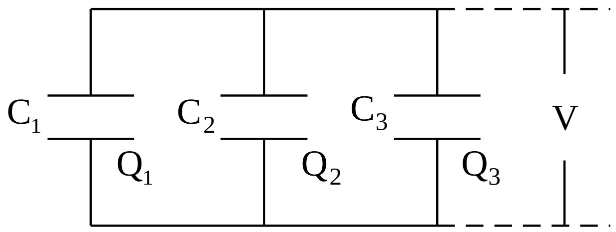
Σχήμα 3.3

Πυκνωτές συνδεδεμένοι σε σειρά παρουσιάζουν το ίδιο φορτίο στους οπλισμούς τους και διαφορετική διαφορά δυναμικού σε αυτούς. Από αυτή την ιδιότητα προκύπτει ότι το αντίστροφο της ισοδύναμης χωρητικότητας C_{eq} του συνδυασμού σε σειρά ισούται με το άθροισμα των αντιστρόφων των επί μέρους χωρητικοτήτων. Δηλαδή :

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots} \qquad \textbf{(3)}$$

β) Παράλληλη σύνδεση πυκνωτών :

Πυκνωτές συνδεδεμένοι παράλληλα παρουσιάζουν την ίδια διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών τους και διαφορετικό φορτίο σε αυτούς.



Σχήμα 3.4

Από την ιδιότητα αυτή προκύπτει ότι η ισοδύναμη χωρητικότητα C_{eq} του συνδυασμού παράλληλης σύνδεσης ισούται με το άθροισμα των επί μέρους χωρητικοτήτων.
Δηλαδή :

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots} \quad \textbf{(4)}$$

Ενέργεια πυκνωτή

Κάθε φορτισμένος πυκνωτής έχει αποθηκευμένη δυναμική ενέργεια U ίση με το έργο που απαιτείται για τη φόρτισή του. Η ενέργεια αυτή αποδίδεται αν επιτραπεί στον πυκνωτή να εκφορτιστεί.
Υποθέτοντας ότι σε χρόνο t έχει μεταφερθεί στον πυκνωτή φορτίο q, η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του είναι σύμφωνα με την **(2)** : V = q/C. Το στοιχειώδες έργο dW που απαιτείται για να μεταφερθεί επιπλέον φορτίο dq στον πυκνωτή είναι:

$$dW = Vdq = \frac{q}{C}dq$$

Επομένως το ολικό έργο W που απαιτείται για να αυξηθεί το φορτίο q από το μηδέν ως την τελική τιμή Q είναι :

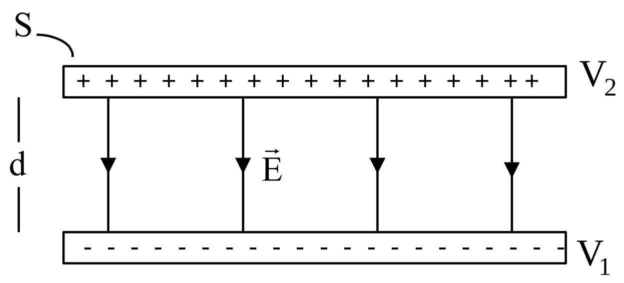
$$W = \int_0^W dW = \frac{1}{C}\int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C} = U$$

Άρα η ενέργεια U ενός πυκνωτή, χρησιμοποιώντας και την **(2)** μπορεί να εκφραστεί ως :

$$\boxed{U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV} \quad \textbf{(5)}$$

Εφαρμογές

1. Χωρητικότητα επίπεδου πυκνωτή



Σχήμα 3.5

Θεωρούμε έναν επίπεδο πυκνωτή, δηλαδή σύστημα από δυο μεταλλικές αγώγιμες παράλληλες επίπεδες πλάκες εμβαδού S, σε απόσταση d μεταξύ τους, φορτισμένες με ίσα και αντίθετα φορτία $\pm Q$. Λόγω αμοιβαίας έλξεως τα φορτία κατανέμονται στην εσωτερική επιφάνεια των πλακών.

Αν παραβλέψουμε την ανωμαλία στις άκρες των πλακών, η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ είναι σταθερή σε ολόκληρη την έκταση της εσωτερικής επιφάνειας κάθε πλάκας.
Συνεπώς μεταξύ των δυο πλακών δημιουργείται ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, που σύμφωνα με το παράδειγμα της παραγράφου **1** είναι :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} = \frac{Q}{S\varepsilon_o} \quad (\text{επειδή } \sigma = Q/S)$$

Άρα η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών είναι :

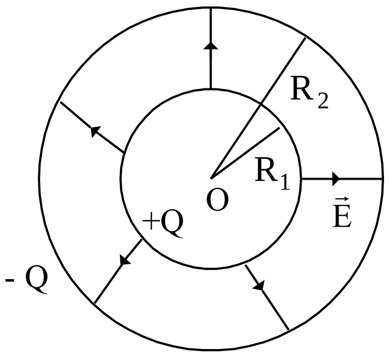
$$E = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow \int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_{d}^{0} E dx \Rightarrow \Delta V = V_2 - V_1 = \frac{Qd}{S\varepsilon_o}$$

Επομένως σύμφωνα με την **(3 – 2)** η χωρητικότητα επίπεδου πυκνωτή είναι:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{Qd/S\varepsilon_o} \Rightarrow \boxed{C = \varepsilon_o \frac{S}{d}} \qquad \textbf{(6)}$$

Παρατηρείται ότι η χωρητικότητα επίπεδου πυκνωτή εξαρτάται μόνο από τις γεωμετρικές παραμέτρους και από το παρεμβαλλόμενο υλικό μεταξύ των οπλισμών.

2. Χωρητικότητα σφαιρικού πυκνωτή



Σχήμα 3.6

Ένας σφαιρικός πυκνωτής αποτελείται από δυο ομόκεντρους σφαιρικούς αγωγούς ακτίνων R_1 και R_2, φορτισμένων με ίσα και αντίθετα φορτία $\pm Q$.
Για τον υπολογισμό της έντασης του πεδίου μεταξύ των οπλισμών (σε οποιαδήποτε άλλη περιοχή είναι E=0), λαμβάνεται μια σφαιρική κλειστή επιφάνεια ακτίνας $R_1 < r < R_2$, οπότε ο νόμος Gauss δίνει :

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{encl}}{\varepsilon_o} \Rightarrow E4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}$$

Επομένως η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών είναι :

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow \int_{V_2}^{V_1} dV = -\int_{R_2}^{R_1} Edr \Rightarrow \Delta V = V_1 - V_2 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\int_{R_2}^{R_1}\frac{dr}{r^2} =$$

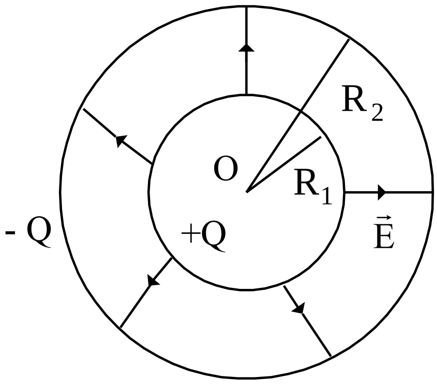
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

Προσέξτε ότι η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών κάθε πυκνωτή είναι το δυναμικό του θετικού αγωγού μείον το δυναμικό του αρνητικού.
Άρα σύμφωνα με την **(3 – 2)** η χωρητικότητα σφαιρικού πυκνωτή είναι :

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}} \Rightarrow \boxed{C = 4\pi\varepsilon_o\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}} \qquad \textbf{(7)}$$

Δηλαδή εξαρτάται μόνο από τα γεωμετρικά στοιχεία του και το υλικό μεταξύ των οπλισμών του.

3. Χωρητικότητα κυλινδρικού πυκνωτή



Σχήμα 3.7

Ένας κυλινδρικός πυκνωτής αποτελείται από δυο ομοαξονικούς κυλινδρικούς αγωγούς απείρου μήκους και ακτινών R_1, R_2, φορτισμένους με ίσα και αντίθετα φορτία $\pm Q$.

Θεωρώντας ως επιφάνεια Gauss ομοαξονικό κύλινδρο ακτίνας $R_1 < r < R_2$ και μήκους ℓ κι εφαρμόζοντας το νόμο Gauss, υπολογίζεται η ένταση του πεδίου μεταξύ των οπλισμών ως εξής :

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc\ell}}{\varepsilon_o} \Rightarrow E2\pi r\ell = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o \ell r}$$

Επομένως η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών είναι :

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow \int_{V_2}^{V_1} dV = -\int_{R_2}^{R_1} E dr \Rightarrow \Delta V = V_1 - V_2 = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_o \ell}\int_{R_2}^{R_1}\frac{dr}{r} =$$

$$= -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_o \ell}\ell n\frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o \ell}\ell n\frac{R_2}{R_1}$$

Άρα σύμφωνα με την **(2)** η χωρητικότητα κυλινδρικού πυκνωτή ανά μονάδα μήκους είναι :

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\varepsilon_o \ell}\ell n\frac{R_2}{R_1}} \Rightarrow \boxed{\frac{C}{\ell} = \frac{2\pi\varepsilon_o}{\ell n(R_2/R_1)}} \qquad \textbf{(8)}$$

Δηλαδή και στον κυλινδρικό πυκνωτή η χωρητικότητα είναι συνάρτηση των γεωμετρικών στοιχείων του και του υλικού που παρεμβάλλεται μεταξύ των οπλισμών του.