# ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
# ΕΡΓΟ - ΕΝΕΡΓΕΙΑ

*Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας*

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

## Θέμα 1

Σώμα μάζας m κινείται στο επίπεδο xy με διάνυσμα θέσης $\vec{r} = A\cos\omega t\hat{x} + B\sin\omega t\hat{y}$ όπου A, B θετικές σταθερές.
**α)** Να δείξετε ότι το σώμα κινείται σε έλλειψη.
**β)** Να δείξετε ότι η δύναμη που δρα στο σώμα είναι διατηρητική και να σχεδιάσετε την κατεύθυνσή της.
**γ)** Να υπολογίσετε το έργο που παράγεται από τη δύναμη κατά την κίνηση του σώματος από το A στο B, όπου τα A και B είναι τα άκρα των ημιαξόνων της έλλειψης.

***(Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)***

## Λύση

**α)** Είναι: $x = A\cos\omega t \Rightarrow \cos^2\omega t = x^2/A^2$
και $y = B\sin\omega t \Rightarrow \sin^2\omega t = y^2/B^2$
Προσθέτοντας τις παραπάνω κατά μέλη και σύμφωνα με τη βασική τριγωνομετρική σχέση $\cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1$ προκύπτει:
$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$, η οποία αποτελεί την εξίσωση τροχιάς και παριστάνει έλλειψη.

**β)** Η δύναμη που δρα στο σώμα είναι :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m(-A\omega^2\cos\omega t\hat{x} - B\omega^2\sin\omega t\hat{y}) =$$

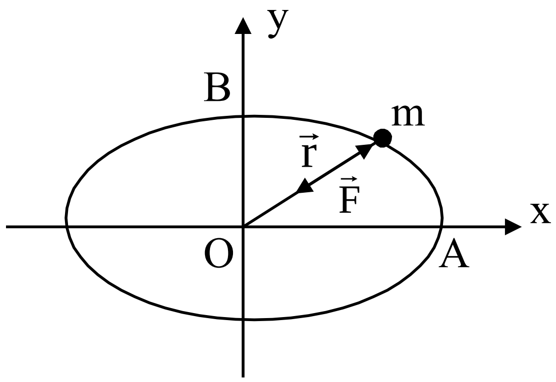
$$= -m\omega^2(A\cos\omega t\hat{x} + B\sin\omega t\hat{y}) \Rightarrow \vec{F} = -m\omega^2\vec{r} = -m\omega^2(x\hat{x} + y\hat{y})$$

Για να είναι η παραπάνω δύναμη διατηρητική θα πρέπει να είναι αστρόβιλη. Άρα ο στροβιλισμός της είναι :

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -m\omega^2 x & -m\omega^2 y & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{x} - 0\hat{y} + 0\hat{z} = 0$$

Συνεπώς αφού $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ η $\vec{F}$ είναι συντηρητική.

Επειδή η δύναμη είναι της μορφής $\vec{F} = F(r)\hat{r} = -m\omega^2 r\hat{r}$ είναι κεντρική και συγκεκριμένα ελκτική αφού $F(r) < 0$. Δηλαδή η $\vec{F}$ έχει την διεύθυνση του διανύσματος θέσης $\vec{r}$ και αντίθετη φορά από αυτό, όπως φαίνεται στο σχήμα.




**γ)** Η δυναμική ενέργεια της δύναμης $\vec{F}$ υπολογίζεται ως εξής :

$$F = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow \int_0^V dV = -\int_0^r F dr \Rightarrow V = m\omega^2 \int_0^r r dr \Rightarrow V(r) = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$$

Άρα το έργο της δύναμης για μετακίνηση από το σημείο Α στο Β ισούται με τη διαφορά της δυναμικής ενέργειας στα σημεία αυτά. Δηλαδή :

$$W_{A\to B} = V_A - V_B = \frac{1}{2} m\omega^2 r_A^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 r_B^2 \Rightarrow W_{A\to B} = \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - B^2)$$

## Θέμα 2

Σώμα μάζας m κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα $\upsilon = c\sqrt{x}$, όπου c σταθερά και x η απόσταση που διανύει το σώμα. Να υπολογιστεί το έργο των δυνάμεων συναρτήσει του χρόνου.

***(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)***

## Λύση

Από το θεώρημα έργου – κινητικής ενέργειας προκύπτει :

$$W = \Delta K = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_o^2$$

Αλλά επειδή $\upsilon = c\sqrt{x}$ για x=0 είναι $\upsilon_o = 0$ οπότε : $W = \frac{1}{2}mc^2x$ **(1)**

Επίσης από τον ορισμό της ταχύτητας προκύπτει :

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} \Rightarrow c\sqrt{x} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}} = c\int_0^t dt \Rightarrow 2\sqrt{x} = ct \Rightarrow x = \frac{c^2t^2}{4} \qquad \textbf{(2)}$$

Άρα η **(1)** λόγω της **(2)** δίνει :

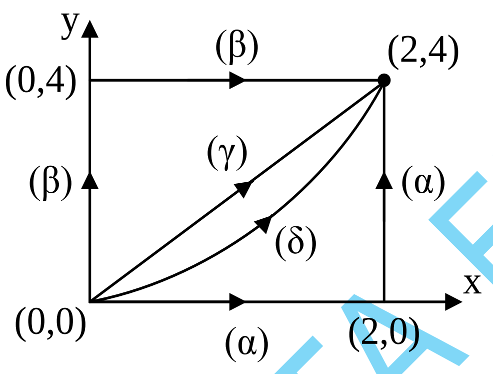
$$W = \frac{1}{2}mc^2\frac{c^2t^2}{4} \Rightarrow W(t) = \frac{mc^4t^2}{8}$$

## Θέμα 3

Σώμα κινείται υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{F} = (y - x^2)\hat{x} + 3xy\hat{y}$.
Να υπολογισθεί το έργο της δύναμης αυτής για μετακίνηση του σώματος από το σημείο (0,0) μέχρι το σημείο (2,4) ακολουθώντας τις εξής διαδρομές:
**α)** Πάνω στον άξονα x από το (0,0) ως το (2,0) και παράλληλα προς τον άξονα y ως το (2,4).
**β)** Πάνω στον άξονα y από το (0,0) ως το (0,4) και παράλληλα προς τον άξονα x ως το (2,4).
**γ)** Την ευθεία από το (0,0) στο (2,4).
**δ)** Την παραβολή $y=x^2$.

***(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)***

## Λύση




Γενικά το έργο της δύναμης είναι:

$$W = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_{(0,0)}^{(2,4)} [(y - x^2)\hat{x} + 3xy\hat{y}] \cdot (dx\hat{x} + dy\hat{y}) =$$

$$= \int_{(0,0)}^{(2,4)} (y - x^2)dx + 3xydy \qquad \textbf{(1)}$$

**α)** Κατά μήκος της διαδρομής από το (0,0) στο (2,0) είναι y=0 και dy=0 ενώ στη διαδρομή από το (2,0) στο (2,4) είναι x=2 και dx=0, οπότε διαχωρίζοντας το ολοκλήρωμα **(1)** προκύπτει :

$$W = \int_{(0,0)}^{(2,0)} (y - x^2)dx + 3xydy + \int_{(2,0)}^{(2,4)} (y - x^2)dx + 3xydy =$$

$$= -\int_0^2 x^2 dx + 6\int_0^4 ydy = \left[-\frac{x^3}{3}\right]_0^3 + 6\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^4 = -\frac{8}{3} + 48 = \frac{136}{3} \text{ Joule}$$

**β)** Ανάλογα κατά μήκος της διαδρομής από το (0,0) στο (0,4) είναι x=0 και dx=0 ενώ στη διαδρομή από το (0,4) στο (2,4) είναι y=4 και dy=0.

Επομένως διαχωρίζοντας το ολοκλήρωμα **(1)** προκύπτει :

$$W = \int_{(0,0)}^{(0,4)} (y - x^2)dx + 3xydy + \int_{(0,4)}^{(2,4)} (y - x^2)dx + 3xydy =$$

$$= 0 + \int_0^2 (4 - x^2)dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \text{Joule}$$

**γ)** Η ευθεία που περνά από τα σημεία (0,0) και (2,4) περιγράφεται από την εξίσωση y=2x κι από αυτήν προκύπτει dy=2dx.
Συνεπώς αντικαθιστώντας τα y,dy στην **(1)** προκύπτει το απλό ολοκλήρωμα ως προς x:

$$W = \int_0^2 (2x - x^2)dx + 3x2x2dx = \int_0^2 (11x^2 + 2x)\, dx = \left[11\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = \frac{100}{3} \text{Joule}$$

**δ)** Στην περίπτωση αυτή είναι: $y=x^2$ και dy=2xdx, οπότε η **(1)** γίνεται:

$$W = \int_0^2 (x^2 - x^2)dx + 3xx^2 2xdx = \int_0^2 6x^4 dx = \left[\frac{6}{5}x^5\right]_0^2 = \frac{192}{5} \text{ Joule}$$

Παρατηρείται ότι επειδή το έργο είναι διαφορετικό στις τέσσερις αυτές διαδρομές η δοθείσα δύναμη $\vec{F}$ είναι μη συντηρητική, πράγμα το οποίο αποδεικνύεται εύκολα δείχνοντας ότι $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$.

## Θέμα 4

Σωματίδιο κινείται υπό την επίδραση της δύναμης

$$\vec{F} = (2x - y + z)\hat{x} + (x + y - z^2)\hat{y} + (3x - 2y + 4z)\hat{z}$$

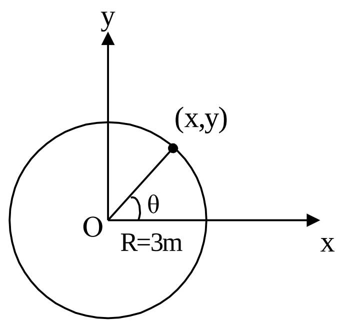
πάνω στο επίπεδο xy και διαγράφει περιφέρεια κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 3m. Υπολογίστε το έργο της δύναμης για πλήρη περιστροφή.

***(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)***

## Λύση

Είναι:

$$W = \oint_c \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_c (2x - y + z)dx + (x + y - z^2)dy + (3x - 2y + 4z)dz \qquad \textbf{(1)}$$




Αλλά επειδή το σωματίδιο κινείται σε κυκλική τροχιά στο επίπεδο xy οι παραμετρικές εξισώσεις είναι:

$x = 3\cos\theta$, $y = 3\sin\theta$ και $z=0$ με

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

Επίσης από τις παραπάνω προκύπτει: $dx=-3\sin\theta\, d\theta$, $dy= 3\cos\theta d\theta$ και $dz=0$

Οπότε η **(1)** γίνεται:

$$W = \int_0^{2\pi} (6\cos\theta - 3\sin\theta)(-3\sin\theta)d\theta + (3\cos\theta + 3\sin\theta)3\cos\theta d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} (9\sin^2\theta - 18\sin\theta\cos\theta + 9\cos^2\theta + 9\sin\theta\cos\theta)d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[9(\sin^2\theta + \cos^2\theta) - 9\sin\theta\cos\theta\right]d\theta = 9\int_0^{2\pi}(1 - \sin\theta\cos\theta)d\theta$$

Αλλά : $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ οπότε :

$$W = 9\int_0^{2\pi}\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)d\theta = 9\left[\theta + \frac{1}{2}\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 9\left(2\pi + \frac{1}{4} - 0 - \frac{1}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = 18\pi \text{ Joule}$$

## Θέμα 5

Εξετάστε κατά πόσο το έργο του πεδίου που παράγει την δύναμη:

$$\vec{F} = (y^2z^3 - 6xz^2)\hat{x} + 2xyz^3\hat{y} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\hat{z}$$

που ασκείται σε κάποιο σωματίδιο από μια θέση Α ως μια Β θα εξαρτάται από την καμπύλη που συνδέει τα σημεία Α και Β.

***(Τμήμα Μηχανικών Μεταλλείων – Μεταλλουργών Ε.Μ.Π.)***

## Λύση

Ο στροβιλισμός της $\vec{F}$ είναι:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2z^3 - 6xz^2 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 - 6x^2z \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{x}(6xyz^2 - 6xyz^2) - \hat{y}(3y^2z^2 - 12xz - 3y^2z^2 + 12xz) + \hat{z}(2yz^3 - 2yz^3) = 0$$

Άρα αφού $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ η δύναμη $\vec{F}$ είναι συντηρητική κι επομένως το έργο της για την μετακίνηση σωματιδίου μεταξύ των σημείων Α και Β δεν θα εξαρτάται από την καμπύλη που συνδέει τα σημεία αυτά.

## Θέμα 6

**α)** Βρείτε τη δύναμη $\vec{F}$, που προσδιορίζεται από το διατηρητικό (συντηρητικό) δυναμικό πεδίο: $V(x,y,z) = k(y\cos z + x^2 e^{-y})$, όπου k είναι μια σταθερά.
**β)** Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ στην περιοχή του δυναμικού πεδίου που ορίστηκε στο σκέλος **(α)**. Την χρονική στιγμή $t_A$ βρίσκεται στο σημείο $\vec{r}_A = \hat{y}$ και επιδρά πάνω του μια εξωτερική δύναμη $\vec{f} = \alpha\vec{\upsilon}\times\vec{\Omega}$, (όπου α είναι μια θετική σταθερά, $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητα του σωματιδίου και $\vec{\Omega}$ μια σταθερά διανυσματική ποσότητα). Την χρονική στιγμή $t_B$ το σωματίδιο βρίσκεται στο σημείο $\vec{r}_B = 2\hat{x} + (7\pi/5)\hat{z}$. Υπολογίστε την μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου από το σημείο Α στο σημείο Β.

***(Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)***

## Λύση

**α)** Η ζητούμενη δύναμη $\vec{F}$ δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}\right) =$$

$$= -\left[2kxe^{-y}\hat{x} + k(\cos z - x^2 e^{-y})\hat{y} - ky\sin z\hat{z}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -2kxe^{-y}\hat{x} - k(\cos z - x^2 e^{-y})\hat{y} + ky\sin z\hat{z}$$

**β)** Σύμφωνα με το θεώρημα έργου – κινητικής ενέργειας για την μετακίνηση του σωματιδίου από το σημείο Α στο Β ισχύει:

$$\Sigma W_{A\to B} = \Delta K \Rightarrow \Delta K = W_{\vec{F}} + W_{\vec{f}} \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά: $W_{\vec{f}} = \int_A^B \vec{f}\cdot d\vec{r} = \int_A^B (\alpha\vec{\upsilon}\times\vec{\Omega})\cdot d\vec{r} = \int_A^B (\alpha\vec{\upsilon}\times\vec{\Omega})\cdot\vec{\upsilon}dt$

(επειδή $\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{\upsilon}dt$)

Όμως αφού το διάνυσμα $\vec{\upsilon}\times\vec{\Omega}$ είναι κάθετο στο $\vec{\upsilon}$ είναι $(\vec{\upsilon}\times\vec{\Omega})\cdot\vec{\upsilon} = 0$ κι επομένως $W_{\vec{f}} = 0$.

Επίσης επειδή η $\vec{F}$ είναι συντηρητική το έργο της μεταξύ των σημείων Α και Β θα ισούται με τη διαφορά της δυναμικής της ενέργειας. Δηλαδή:

$$W_{\vec{F}} = V(\vec{r}_A) - V(\vec{r}_B) = V(0,1,0) - V(2,0,7\pi/5) = k\cos 0 - k4e^0 = k - 4k = -3k$$

Άρα η **(1)** δίνει: $\Delta K = -3k$

## Θέμα 7

Σωματίδιο μάζας m και ηλεκτρικού φορτίου q κινείται σε περιοχή του χώρου όπου υπάρχει ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο. Το μαγνητικό πεδίο είναι ομογενές $\vec{B} = B\hat{z}$. Η δύναμη που ασκείται από το ηλεκτρικό πεδίο είναι διατηρητική. Η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια είναι:

$$V(x,y,z) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + b_1 y + b_2 y^2 + c_1 z + c_2 z^2$$

όπου $\alpha_1$, $\alpha_2$, $b_1$, $b_2$, $c_1$, $c_2$ είναι σταθερές με κατάλληλες διαστάσεις.
Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σωματίδιο βρίσκεται στην αρχή των αξόνων ($x = y = z = 0$) με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o = \upsilon_o(\hat{x} + \hat{y})$.

**α)** Βρείτε την ολική δύναμη $\vec{F} = F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z}$ που ασκείται στο σωματίδιο τη χρονική στιγμή $t = 0$.

**β)** Τη χρονική στιγμή $t_A$ το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση $\vec{r}_A = x_A\hat{x} + y_A\hat{y} + z_A\hat{z}$. Βρείτε την κινητική του ενέργεια τη χρονική αυτή στιγμή.

***(Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)***

## Λύση

**α)** Η ηλεκτρική δύναμη $\vec{F}_e$ εφόσον δίνεται η δυναμική της ενέργεια είναι:

$$\vec{F}_e = -\vec{\nabla}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}\right) =$$

$$= -(\alpha_1 + 2\alpha_2 x)\hat{x} - (b_1 + 2b_2 y)\hat{y} - (c_1 + 2c_2 z)\hat{z}$$

Άρα τη χρονική στιγμή $t = 0$ όπου $x = y = z = 0$ είναι:

$$\vec{F}_e = -\alpha_1\hat{x} - b_1\hat{y} - c_1\hat{z}$$

Η μαγνητική δύναμη $\vec{F}_m$ τη χρονική στιγμή $t = 0$ όπου $\vec{\upsilon}_o = \upsilon_o(\hat{x} + \hat{y})$ είναι:

$$\vec{F}_m = q\vec{\upsilon}_o \times \vec{B} = q\upsilon_o(\hat{x} + \hat{y}) \times B\hat{z} = q\upsilon_o B(\hat{x} \times \hat{z} + \hat{y} \times \hat{z}) \Rightarrow \vec{F}_m = q\upsilon_o B(\hat{x} - \hat{y})$$

Άρα η ολική δύναμη τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = (q\upsilon_o B - \alpha_1)\hat{x} - (q\upsilon_o B + b_1)\hat{y} - c_1\hat{z}$$

**β)** Σύμφωνα με το θεώρημα έργου – κινητικής ενέργειας για τη μετακίνηση του σωματιδίου από τη θέση $\vec{r}_o=(0,0,0)$ ως τη $\vec{r}_A=\left(x_A,y_A,z_A\right)$ ισχύει:

$$\Sigma W=\Delta K \Rightarrow W_{\vec{F}_e}+W_{\vec{F}_m}=K_A-K_O \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά: $$W_{\vec{F}_m}=\int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}_A}\vec{F}_m\cdot d\vec{r}=\int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}_A}q(\vec{\upsilon}\times\vec{B})\cdot d\vec{r}=\int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}_A}q(\vec{\upsilon}\times\vec{B})\cdot\vec{\upsilon}dt=0$$

επειδή $\vec{\upsilon}\perp\vec{\upsilon}\times\vec{B}$ είναι $(\vec{\upsilon}\times\vec{B})\cdot\vec{\upsilon}=0$

και επειδή η $\vec{F}_e$ είναι συντηρητική:

$$W_{\vec{F}_e}=V(\vec{r}_o)-V(\vec{r}_A)=V(0,0,0)-V(x_A,y_A,z_A)=$$

$$=0-\left(\alpha_1x_A+\alpha_2x_A^2+b_1y_A+b_2y_A^2+c_1z_A+c_2z_A^2\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{\vec{F}_e}=-\alpha_1x_A-\alpha_2x_A^2-b_1y_A-b_2y_A^2-c_1z_A-c_2z_A^2$$

Επίσης: $$K_o=\frac{1}{2}m|\vec{\upsilon}_o|^2=\frac{1}{2}m\left(\sqrt{\upsilon_o^2+\upsilon_o^2}\right)^2=\frac{1}{2}m2\upsilon_o^2\Rightarrow K_o=m\upsilon_o^2$$

Άρα η **(1)** δίνει για την κινητική ενέργεια του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t_A$:

$$K_A=m\upsilon_o^2-\alpha_1x_A-\alpha_2x_A^2-b_1y_A-b_2y_A^2-c_1z_A-c_2z_A^2$$

## Θέμα 8

Σωματίδιο μάζας m κινείται στο επίπεδο υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{F} = \alpha(\sin\omega t\hat{x} + \cos\omega t\hat{y})$. Αν για t=0 το σωματίδιο ηρεμεί στην αρχή των αξόνων O, να αποδειχθεί ότι το παραγόμενο έργο σε χρόνο t είναι:

$$W = \frac{\alpha^2}{m\omega^2}(1-\cos\omega t).$$

***(Τμήμα Τοπογράφων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)***

## Λύση

Από το θεώρημα έργου – κινητικής ενέργειας προκύπτει:

$$W_F = \Delta K = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - 0 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \qquad \textbf{(1)}$$

Εφαρμόζοντας τον 2$^{o}$ νόμο του Newton στους δύο άξονες της κίνησης ξεχωριστά προκύπτει για την ταχύτητα:

$$F_x = m\alpha_x \Rightarrow \alpha\sin\omega t = m\frac{d\upsilon_x}{dt} \Rightarrow \int_0^{\upsilon_x} d\upsilon_x = \frac{\alpha}{m}\int_0^t \sin\omega t dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_x = -\frac{\alpha}{m\omega}\cos\omega t\Big|_0^t = -\frac{\alpha}{m\omega}(\cos\omega t - 1) \Rightarrow \upsilon_x = \frac{\alpha}{m\omega}(1-\cos\omega t)$$

και $$F_y = m\alpha_y \Rightarrow \alpha\cos\omega t = m\frac{d\upsilon_y}{dt} \Rightarrow \int_0^{\upsilon_y} d\upsilon_y = \frac{\alpha}{m}\int_0^t \cos\omega t dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_y = \frac{\alpha}{m\omega}\sin\omega t$$

Άρα: $$\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 = \frac{\alpha^2}{m^2\omega^2}(1+\cos^2\omega t - 2\cos\omega t + \sin^2\omega t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon^2 = \frac{2\alpha^2}{m^2\omega^2}(1-\cos\omega t)$$

Επομένως η **(1)** γίνεται: $$W_F = \frac{\alpha^2}{m\omega^2}(1-\cos\omega t)$$

## Θέμα 9

Δίνεται η δύναμη $\vec{F} = (x + 2y + \alpha z)\hat{x} + (bx - 3y - z)\hat{y} + (4x + cy + 2z)\hat{z}$.
**α)** Να βρεθούν τα a, b, c ώστε η δύναμη να είναι συντηρητική.
**β)** Να βρεθεί η δυναμική της ενέργεια V(x, y, z).

***(Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)***

## Λύση

**α)** Η δύναμη θα είναι συντηρητική εάν:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) - \hat{y}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = 0$$

όπου $F_x = x + 2y + \alpha z$, $F_y = bx - 3y - z$ και $F_z = 4x + cy + 2z$

Οπότε: $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \hat{x}\,(c + 1) - \hat{y}(4 - \alpha) + \hat{z}(b - 2) = 0$

Επομένως για να είναι $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$, δηλαδή η δύναμη συντηρητική

πρέπει: $\alpha = 4$, $b = 2$, και $c = -1$

**β)** Αφού η δύναμη $\vec{F} = (x + 2y + 4z)\hat{x} + (2x - 3y - z)\hat{y} + (4x - y + 2z)\hat{z}$ είναι συντηρητική απορρέει από δυναμική ενέργεια έτσι ώστε:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + 2y + 4z)\hat{x} + (2x - 3y - z)\hat{y} + (4x - y + 2z)\hat{z} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}\right)$$

και εξισώνοντας τις συνιστώσες των δυο μελών προκύπτουν οι:

$$x + 2y + 4z = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad \textbf{(1)}$$

$$2x - 3y - z = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad \textbf{(2)}$$

$$4x - y + 2z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad \textbf{(3)}$$

Ολοκληρώνοντας την **(1)** ως προς x κρατώντας τα y, z σταθερά προκύπτει:

$$-\int dV = \int (x + 2y + 4z)dx \Rightarrow -V = \frac{x^2}{2} + 2yx + 4zx + c(y, z) \qquad \textbf{(4)}$$

όπου η σταθερά ολοκλήρωσης c(y, z) είναι συνάρτηση των μεταβλητών y, z.
Παραγωγίζοντας την **(4)** ως προς y προκύπτει:

$$-\frac{\partial V}{\partial y} = 2x + \frac{\partial c(y,z)}{\partial y} \overset{(2)}{=} 2x - 3y - z \Rightarrow \frac{\partial c(y,z)}{\partial y} = -3y - z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c(y, z) = \int (-3y - z)dy \Rightarrow c(y, z) = -3\frac{y^2}{2} - zy + c(z)$$

Άρα η **(4)** γράφεται:

$$-V = \frac{x^2}{2} + 2yx + 4zx - \frac{3}{2}y^2 - zy + c(z) \qquad \textbf{(5)}$$

και παραγωγίζοντας την **(5)** ως προς z προκύπτει :

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = 4x - y + \frac{\partial c(z)}{\partial z} \overset{(3)}{=} 4x - y + 2z \Rightarrow \frac{\partial c(z)}{\partial z} = 2z \Rightarrow c(z) = \int 2z dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c(z) = z^2 + c, \quad \text{όπου c σταθερά.}$$

Συνεπώς η δυναμική ενέργεια είναι:

$$V_{(x,y,z)} = -\frac{x^2}{2} - 2yx - 4zx + \frac{3}{2}y^2 + zy - z^2 + c$$

όπου η σταθερά c καθορίζεται από τη θέση μηδενισμού της δυναμικής ενέργειας.

**Θέμα 10**

Σωματίδιο κινείται υπό την επίδραση της ελκτικής δύναμης $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}$ όπου k σταθερά. Η μάζα του σωματιδίου είναι m και η τροχιά του περιφέρεια κύκλου ακτίνας r. Ζητείται η δυναμική και η ολική ενέργεια του σωματιδίου.

***(Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)***

**Λύση**

Αφού η δύναμη $\vec{F}$ είναι κεντρική θα είναι συντηρητική. Οπότε η $\vec{F}$ απορρέει από τη δυναμική ενέργεια σύμφωνα με την σχέση:

$$F = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow -\frac{k}{r^2} = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow \int_0^V dV = k\int_\infty^r \frac{dr}{r^2} \Rightarrow V(r) = -\frac{k}{r}$$

Η κινητική ενέργεια είναι: $K = \frac{1}{2}m\upsilon^2$

Αλλά η δύναμη $\vec{F}$ παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου γιατί κατευθύνεται πάντα προς το κέντρο Ο της κυκλικής τροχιάς. Οπότε:

$$F_\kappa = m\alpha_\kappa \Rightarrow \frac{k}{r^2} = m\frac{\upsilon^2}{r} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{k}{mr}}$$

(το αρνητικό πρόσημο της $\vec{F}$ εδώ δεν γράφεται επειδή είναι ομόρροπη της κεντρομόλου επιτάχυνσης και οι δύο είναι στα αρνητικά της ακτινικής διεύθυνσης $\hat{r}$).

Άρα: $K = \frac{k}{2r}$ και η ολική ενέργεια είναι:

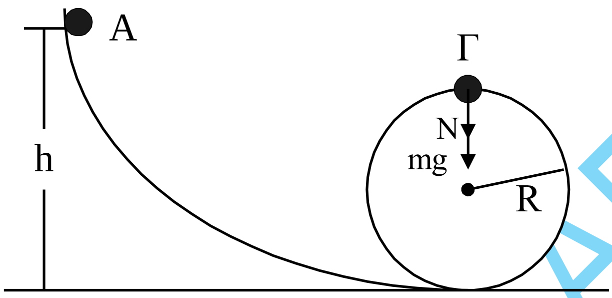
$$E = K + V = \frac{k}{2r} - \frac{k}{r} \Rightarrow E = -\frac{k}{2r}$$

**Θέμα 11**

Υπολογίστε το ελάχιστο ύψος $h_{min}$ από το οποίο πρέπει να αφεθεί κάποιο σώμα για να κάνει πλήρη περιφορά στον κύκλο του σχήματος. Οι τριβές αγνοούνται.

***(Τμήμα Χημείας Ε.Κ.Π.Α.)***

**Λύση**




Για να διαγράψει το σώμα τον κύκλο του σχήματος πρέπει να φτάσει και να περάσει το ανώτατο σημείο Γ του κύκλου. Στο σημείο Γ στο σώμα ασκούνται το βάρος του mg και η κάθετη αντίδραση N, οι οποίες παίζουν τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Δηλαδή:

$$N + mg = m\frac{\upsilon_\Gamma^2}{R} \Rightarrow N = \frac{m\upsilon_\Gamma^2}{R} - mg \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά πρέπει : $N \geq 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{m\upsilon_\Gamma^2}{R} - mg \geq 0 \Rightarrow \upsilon_\Gamma \geq \sqrt{gR}$

Οπότε : $\upsilon_{\Gamma min} = \sqrt{gR}$ είναι η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει το σώμα στο ανώτατο σημείο Γ για να κάνει ανακύκλωση (δηλαδή να διαγράψει μια πλήρη περιφορά του κύκλου) και αντιστοιχεί σε N=0 δηλαδή οριακά το σώμα να μην έρχεται σε επαφή με την επιφάνεια.

Άρα από την αρχή διατήρησης της ενέργειας στις θέσεις Α και Γ προκύπτει:

$$K_A + V_A = K_\Gamma + V_\Gamma \Rightarrow 0 + mgh_{min} = mg2R + \frac{1}{2}m\upsilon_{\Gamma min}^2 \Rightarrow$$

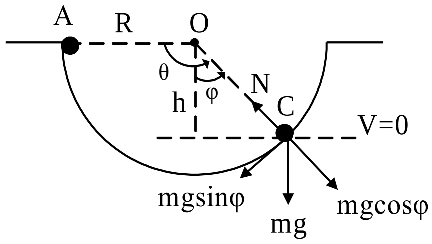
$$\Rightarrow gh_{min} = 2gR + \frac{1}{2}gR = \frac{5}{2}gR \Rightarrow h_{min} = \frac{5}{2}R$$

**Θέμα 12**

Μικρή σφαίρα μάζας m βρίσκεται αρχικά στο σημείο Α και μετά ολισθαίνει στη λεία κυκλική επιφάνεια του σχήματος. Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκεί η επιφάνεια πάνω στη σφαίρα συναρτήσει της γωνίας θ όταν αυτή βρίσκεται στο σημείο C.

***(Κατατακτήριες εξετάσεις για Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)***

## Λύση




Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ των σημείων A και C και θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που περνά από το C υπολογίζεται η ταχύτητα της σφαίρας στο C.
Δηλαδή:

$$K_A + V_A = K_C + V_C \Rightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + 0 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2gh}$$

Αλλά: $h = R\cos\varphi$ και $\cos\varphi = \cos(\theta - \pi/2) = \cos(\pi/2 - \theta) = \sin\theta$
Οπότε : $h = R\sin\theta$

Συνεπώς : $\upsilon = \sqrt{2gR\sin\theta}$ **(1)**

Στο σημείο C η κάθετη αντίδραση N και η συνιστώσα του βάρους $mg\cos\varphi = mg\sin\theta$ παίζουν το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Δηλαδή:

$$F_\kappa = m\alpha_\kappa \Rightarrow N - mg\sin\theta = m\frac{\upsilon^2}{R} \overset{(1)}{\Rightarrow} N = mg\sin\theta + \frac{m}{R}2gR\sin\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = 3mg\sin\theta$$

**Θέμα 13**

Σημειακή μάζα m κινείται στο επίπεδο xy. Η δυναμική της ενέργεια είναι: $V = \alpha x^2 + \beta y^2$ όπου α, β θετικές σταθερές.

**α)** Βρείτε τη δύναμη που δρα πάνω στη μάζα m. Είναι διατηρητική; Αν $\alpha = \beta$ είναι η δύναμη κεντρική;

**β)** Αν το σώμα κρατηθεί ακίνητο στη θέση y = 0, $x = x_o$ και αφεθεί ελεύθερο στο χρόνο t = 0 να βρεθεί η θέση $\vec{r}(t)$ του σώματος, η ταχύτητά του $\vec{\upsilon}(t)$, η κινητική ενέργεια και η ολική του ενέργεια.

***(Τμήμα Αγρονόμων – Τοπογράφων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)***

## Λύση

**α)** Είναι:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y}\right) = -2\alpha x\hat{x} - 2\beta y\hat{y}$$

Η δύναμη αυτή σαφώς και είναι διατηρητική αφού προέρχεται από τη δυναμική ενέργεια V. Για να το επιβεβαιώσετε αποδείξτε ότι $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$.

Αν $\alpha = \beta = k$ η δύναμη $\vec{F}$ γίνεται:

$$\vec{F} = -2k(x\hat{x} + y\hat{y}) = -2k\vec{r} = -2kr\hat{r}$$

Δηλαδή τότε η δύναμη $\vec{F}$ είναι κεντρική αφού είναι της μορφής $\vec{F} = F(r)\hat{r}$

**β)** Από το 2ο νόμο του Newton για τις συνιστώσες της δύναμης προκύπτει:

$$F_x = m\alpha_x \Rightarrow -2\alpha x = m\frac{d\upsilon_x}{dt} = m\frac{d\upsilon_x}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow -2\alpha x = m\frac{d\upsilon_x}{dt}\upsilon_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\upsilon_x}\upsilon_x d\upsilon_x = -\frac{2\alpha}{m}\int_{x_o}^{x} x dx \Rightarrow \frac{\upsilon_x^2}{2} = -\frac{2\alpha}{m}\left.\frac{x^2}{2}\right|_{x_o}^{x} \Rightarrow \upsilon_x^2 = -\frac{2\alpha}{m}\left(x^2 - x_o^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_x = \sqrt{\frac{2\alpha}{m}(x_o^2 - x^2)} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_o}^{x}\frac{dx}{\sqrt{x_o^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{2\alpha}{m}}\int_0^t dt \Rightarrow \left[\arcsin\frac{x}{x_o}\right]_{x_o}^{x} = \sqrt{\frac{2\alpha}{m}}t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arcsin\frac{x}{x_o} - \arcsin 1 = \sqrt{\frac{2\alpha}{m}}t \Rightarrow \arcsin\frac{x}{x_o} = \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{2\alpha}{m}}t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x_o} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{2\alpha}{m}}t\right) = \cos\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}t\right) \Rightarrow x(t) = x_o\cos\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}t\right) \qquad \textbf{(2)}$$

και $\quad F_y = m\alpha_y \Rightarrow -2\beta y = m\frac{d^2y}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2\beta}{m}y = 0$

Η γενική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$y(t) = c_1\cos\left(\sqrt{\frac{2\beta}{m}}t\right) + c_2\sin\left(\sqrt{\frac{2\beta}{m}}t\right) \qquad \textbf{(3)}$$

Άρα: $\quad \upsilon_y(t) = -c_1\sqrt{\frac{2\beta}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{2\beta}{m}}t\right) + c_2\sqrt{\frac{2\beta}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{2\beta}{m}}t\right) \qquad \textbf{(4)}$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε ότι $y(t=0)=0$ και $\upsilon_y(t=0)=0$ οπότε οι **(3)** και **(4)** δίνουν:

$$\textbf{(3)} \rightarrow 0 = c_1\cdot 1 + c_2\cdot 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\textbf{(4)} \rightarrow 0 = -c_1\cdot 0 + c_2\cdot\sqrt{\frac{2\beta}{m}}\cdot 1 \Rightarrow c_2 = 0$$

Άρα: $y(t) = 0$ και $\upsilon_y(t) = 0$

Επομένως το διάνυσμα θέσης του σώματος είναι:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} \overset{(2)}{\Rightarrow} \vec{r}(t) = x_o\cos\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}t\right)\hat{x}$$

και η ταχύτητά του είναι:

$$\vec{\upsilon}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{\upsilon}(t) = -x_o\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}t\right)\hat{x}$$

Η κινητική ενέργεια είναι:

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_x^2 = \frac{1}{2}mx_o^2\frac{2\alpha}{m}\sin^2\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}t\right) \Rightarrow K(t) = \alpha x_o^2\sin^2\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}t\right)$$

Η δυναμική ενέργεια είναι:

$$V(t) = \alpha x^2(t) \overset{(2)}{\Rightarrow} V(t) = \alpha x_o^2 \cos^2\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}t\right)$$

Κι επομένως η ολική ενέργεια είναι:

$$E = K(t) + V(t) = \alpha x_o^2 \sin^2\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}t\right) + \alpha x_o^2 \cos^2\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}t\right) \Rightarrow E = \alpha x_o^2$$

**Θέμα 14**

Υλικό σημείο μάζας m κινείται στον άξονα x υπό την επίδραση της δύναμης $F(x) = -kx + \frac{k}{\alpha}x^2$, όπου k και α θετικές σταθερές.

**α)** Να βρεθεί η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας και να καθοριστούν οι θέσεις ισορροπίας του υλικού σημείου.

**β)** Αν το υλικό σημείο ξεκινά από τη θέση x = -α χωρίς αρχική ταχύτητα, να βρεθεί η ταχύτητα με την οποία περνά από τη θέση όπου η δυναμική ενέργεια είναι μέγιστη.

***(Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)***

## Λύση

**α)** Η δυναμική ενέργεια υπολογίζεται από τη δύναμη μέσω της σχέσης :

$$F = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow \int_0^V dV = -\int_0^x F(x)dx = -\int_0^x \left(-kx + \frac{k}{\alpha}x^2\right)dx \Rightarrow V(x) = \frac{k}{2}x^2 - \frac{k}{3\alpha}x^3$$

Για τον προσδιορισμό των θέσεων ισορροπίας μηδενίζουμε την πρώτη παράγωγο της V(x). Δηλαδή:

$$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow kx - \frac{k}{\alpha}x^2 = 0 \Rightarrow kx\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{και} \quad x = \alpha$$

Άρα οι θέσεις ισορροπίας είναι οι x=0 και x = α. Για το χαρακτηρισμό αυτών ελέγχουμε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου της V(x) στα σημεία x = 0 και x = α. Δηλαδή:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = k - \frac{2k}{\alpha}x$$

Οπότε: $\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=0} = k > 0$ δηλαδή η $x = 0$ είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας

και $\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=\alpha} = k - \frac{2k}{\alpha}\alpha = -k < 0$

δηλαδή η x=α είναι θέση ασταθούς ισορροπίας.

**β)** Η δυναμική ενέργεια είναι μέγιστη στη θέση ασταθούς ισορροπίας x = α, αφού εκεί παρουσιάζει μέγιστο η συνάρτηση V(x).
Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ των θέσεων x = -α και x = α υπολογίζεται η ζητούμενη ταχύτητα. Έτσι:

$$V_{(-\alpha)} + K_{(-\alpha)} = V_{(\alpha)} + K_{(\alpha)} \Rightarrow \frac{k}{2}\alpha^2 + \frac{k}{3\alpha}\alpha^3 + 0 = \frac{k}{2}\alpha^2 - \frac{k}{3\alpha}\alpha^3 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{2k}{3}\alpha^2 \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{4k}{3m}\alpha^2 \Rightarrow \upsilon = 2\alpha\sqrt{\frac{k}{3m}}$$

**Θέμα 15**

Σώμα μάζας m κινείται σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων μέσα στο οποίο η δυναμική του ενέργεια δίνεται από τη σχέση:

$$V = A\left(-3r_o^2/r^2 + 2r_o^3/r^3\right)$$

όπου A και $r_o$ είναι θετικές σταθερές και r η απόσταση του σώματος από ακίνητο σημείο O.

**α)** Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα.

**β)** Δείξτε ότι υπάρχει θέση ευσταθούς ισορροπίας του σώματος και προσδιορίστε τη θέση αυτή.

**γ)** Αν το σώμα αφεθεί ελεύθερο με αρχική ταχύτητα μηδέν σε άπειρη απόσταση από το O, να βρεθεί η ταχύτητά του στην απόσταση $r_o$ και η απόσταση στην οποία η ταχύτητα του σώματος θα ξαναγίνει μηδέν.

***(Τμήμα Αγρονόμων – Τοπογράφων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)***

## Λύση

**α)** Η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι:

$$F = -\frac{dV}{dr} = -A\left(6\frac{r_o^2}{r^3} - 6\frac{r_o^3}{r^4}\right) \Rightarrow F = \frac{6Ar_o^2}{r^3}\left(\frac{r_o}{r} - 1\right)$$

**β)** Η θέση ισορροπίας αντιστοιχεί στο σημείο μηδενισμού της πρώτης παραγώγου της δυναμικής ενέργειας. Δηλαδή:

$$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow A\left(6\frac{r_o^2}{r^3} - 6\frac{r_o^3}{r^4}\right) = 0 \Rightarrow r = r_o$$

Ο χαρακτηρισμός της θέσης ισορροπίας γίνεται με έλεγχο του προσήμου της δεύτερης παραγώγου της δυναμικής ενέργειας στο σημείο $r = r_o$. Είναι:

$$\frac{d^2V}{dr^2} = A\left(-18\frac{r_o^2}{r^4} + 24\frac{r_o^3}{r^5}\right)$$

και $$\left.\frac{d^2V}{dr^2}\right|_{r=r_o} = A\left(-\frac{18}{r_o^2} + \frac{24}{r_o^2}\right) = \frac{6A}{r_o^2} > 0$$

Δηλαδή στη θέση $r = r_o$ παρουσιάζεται ελάχιστο κι επομένως η θέση αυτή είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας.

**γ)** Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ του απείρου και της θέσης $r = r_o$ προκύπτει:

$$K(\infty) + V(\infty) = K(r_o) + V(r_o) \Rightarrow 0 + 0 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + A\left(-3\frac{r_o^2}{r_o^2} + 2\frac{r_o^3}{r_o^3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 - A = 0 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2A}{m}} \qquad \textbf{(1)}$$

Ενώ εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ των θέσεων $r = r_o$ και της θέσης r όπου η ταχύτητα του σώματος θα ξαναγίνει μηδέν, προκύπτει:

$$K(r_o) + V(r_o) = K(r) + V(r) \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 - A = 0 + A\left(-3\frac{r_o^2}{r^2} + 2\frac{r_o^3}{r^3}\right) \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\frac{2A}{m} - A = A\left(-3\frac{r_o^2}{r^2} + 2\frac{r_o^3}{r^3}\right) \Rightarrow 0 = A\left(-3\frac{r_o^2}{r^2} + 2\frac{r_o^3}{r^3}\right) \Rightarrow r = \frac{2}{3}r_o$$

## Θέμα 16

Ένα σώμα έχει δυναμική ενέργεια που δίνεται από τις σχέσεις:

$V(r) = -1$ για $r \le 1$ και $V(r) = \frac{1}{r} - \frac{2}{r^2}$ για $r \ge 1$ ( σε μονάδες S.I.)

όπου r είναι η απόσταση του σώματος από ένα σταθερό κέντρο.

**α)** Να βρεθεί η δύναμη $\vec{F}$ που ασκεί το πεδίο πάνω στο σώμα. Που είναι ελκτική και που είναι απωστική η δύναμη;

**β)** Σχεδιάστε τη συνάρτηση $V(r)$ (αναδεικνύοντας μόνο τα κύρια χαρακτηριστικά της).

**γ)** Με ποια ταχύτητα πρέπει να εκτοξευθεί το σώμα, από απόσταση $r = \infty$ προς το κέντρο για να μπορέσει να φθάσει στο σημείο r = 0; Το σώμα έχει μάζα m = 1kgr.

**δ)** Αν σε κάποια στιγμή το σώμα βρίσκεται στο σημείο r = 0 και έχει ολική ενέργεια $E_{ολ} = 0$, σε ποια περιοχή του χώρου μπορεί να κινηθεί;

***(Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.)***

## Λύση

**α)** Η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι:

$$F = -\frac{dV}{dr} = \begin{cases} 0, & r \le 1 \\ \frac{1}{r^2} - \frac{4}{r^3}, & r \ge 1 \end{cases}$$

Για να είναι η δύναμη ελκτική πρέπει:

$$F(r) < 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2} - \frac{4}{r^3} < 0 \Rightarrow \frac{4}{r^3} > \frac{1}{r^2} \Rightarrow r < 4$$

Αντίστοιχα η δύναμη είναι απωστική όταν $F(r) > 0$ δηλαδή όταν r>4.

**β)** Η δυναμική ενέργεια μηδενίζεται όταν: $V(r) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} - \frac{2}{r^2} = 0 \Rightarrow r = 2$

Επίσης για $r \le 1$ είναι $V(r) = -1$ και για $r \to \infty$ είναι $V(r) \to 0$

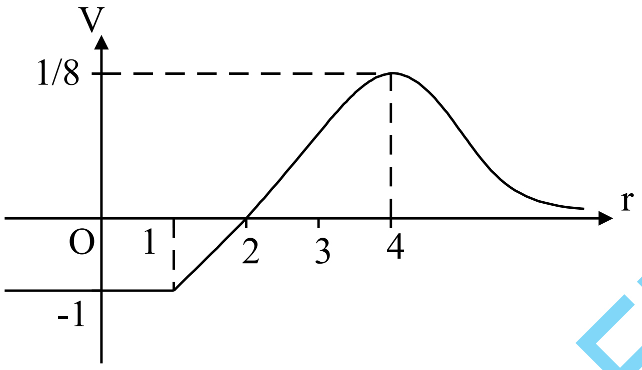
Τα σημεία ακρότατων της $V(r)$ (θέσεις ισορροπίας του σώματος) είναι:

$$\frac{dV}{dr} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{r^2} + \frac{4}{r^3} = 0 \Rightarrow r = 4$$

και $\frac{d^2V}{dr^2} = \frac{2}{r^3} - \frac{12}{r^4}$ δηλαδή :

$$\left.\frac{d^2V}{dr^2}\right|_{r=4} = \frac{2}{64} - \frac{12}{256} = \frac{8-12}{256} = -\frac{4}{256} = -\frac{1}{64} < 0$$

Άρα στο σημείο r = 4 η $V(r)$ παρουσιάζει μέγιστο, δηλαδή είναι θέση ασταθούς ισορροπίας. Για r = 4 είναι $V(r=4)=1/8$.
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $V(r)$ φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:




**γ)** Για να μπορέσει το σώμα να φθάσει από το άπειρο στο σημείο r = 0 αρκεί να φτάσει στη θέση μεγίστου r = 4, αφού μετά θα ασκηθεί ελκτική δύναμη σε αυτό. Στη θέση r = 4 είναι V = max κι επειδή Ε = Κ + V = σταθ. θα είναι K = min = 0.

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ των θέσεων $r=\infty$ και r = 4 προκύπτει:

$$K_{(\infty)}+V_{(\infty)}=K_{(4)}+V_{(4)}\Rightarrow\frac{1}{2}m\upsilon^2+0=0+\frac{1}{8}\overset{(m=1kg)}{\Rightarrow}\upsilon^2=\frac{1}{4}\Rightarrow\upsilon=\frac{1}{2}\,m/sec$$

**δ)** Αν το σώμα βρεθεί στη θέση r = 0 με ολική ενέργεια Ε = 0, τότε όπως παρατηρείται από το παραπάνω διάγραμμα δυναμικής ενέργειας αυτό μπορεί να κινηθεί στην περιοχή $-\infty\le r\le 2$.

## Θέμα 17

Η δυναμική ενέργεια για τη δύναμη μεταξύ των δύο ατόμων Α και Β ενός διατομικού μορίου δίνεται προσεγγιστικά από τη σχέση:

$$V(x) = -C\left[\left(\frac{\alpha}{x}\right)^6 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^{12}\right]$$

όπου α και C είναι θετικές σταθερές και x είναι η απόσταση ανάμεσα στα δύο άτομα. Η μάζα του ατόμου Α είναι ίση με m ενώ το άτομο Β έχει αρκετά μεγαλύτερη μάζα ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ακίνητο. Το άτομο Α κινείται πάνω στον άξονα +x.

**α)** Σχεδιάστε τη συνάρτηση $V(x)$ .

**β)** Βρείτε τη δύναμη που ασκείται πάνω στο άτομο Α.

**γ)** Τι είδους κίνηση θα επακολουθήσει αν το άτομο Α είναι αρχικά ακίνητο στο σημείο x = 2α και αφεθεί ελεύθερο;

***(Τμήμα Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)***

## Λύση

**α)** Είναι:

$$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow -C\left(-6\frac{\alpha^6}{x^7} + \frac{12\alpha^{12}}{x^{13}}\right) = 0 \Rightarrow 12\frac{\alpha^{12}}{x^{13}} = 6\frac{\alpha^6}{x^7} \Rightarrow x^6 = 2\alpha^6 \Rightarrow x = 2^{1/6}\alpha$$

και $$\frac{d^2V}{dx^2} = -C\left(42\frac{\alpha^6}{x^8} - 156\frac{\alpha^{12}}{x^{14}}\right) = C\left(156\frac{\alpha^{12}}{x^{14}} - 42\frac{\alpha^6}{x^8}\right)$$

Άρα: $$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=2^{1/6}\alpha} = C\left(156\frac{\alpha^{12}}{2^{14/6}\alpha^{14}} - 42\frac{\alpha^6}{2^{8/6}\alpha^8}\right) = C\left(\frac{156}{2^{7/3}\alpha^2} - \frac{42}{2^{4/3}\alpha^2}\right) =$$

$$= C\left(\frac{156}{\sqrt[3]{128\alpha^2}} - \frac{42}{\sqrt[3]{16\alpha^2}}\right) = C\left(\frac{156}{5{,}04\alpha^2} - \frac{42}{2{,}52\alpha^2}\right) = C\left(\frac{31}{\alpha^2} - \frac{16{,}6}{\alpha^2}\right) = 14{,}4\frac{C}{\alpha^2} > 0$$

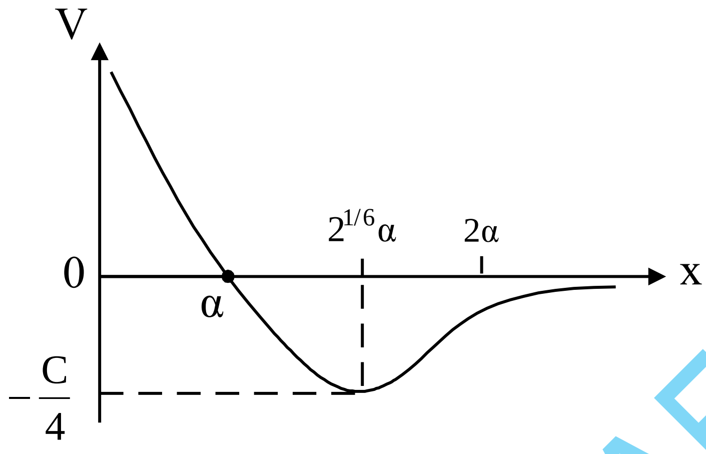
ηλαδή η $x = 2^{1/6}\alpha$ είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας.

Η $V(x)$ μηδενίζεται όταν:

$$V(x) = 0 \Rightarrow \frac{\alpha^6}{x^6} = \frac{\alpha^{12}}{x^{12}} \Rightarrow x^6 = \alpha^6 \Rightarrow x = \alpha$$

Ενώ για $x \to 0$ είναι $V(x) \to \infty$ και για $x \to \infty$ είναι $V(x) \to 0$.

Η γραφική παράσταση της V(x) φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα:




**β)** Η δύναμη που ασκείται πάνω στο άτομο Α είναι:

$$F = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow F = C\left(-6\frac{\alpha^6}{x^7} + 12\frac{\alpha^{12}}{x^{13}}\right)$$

**γ)** Αν το σώμα αφεθεί ελεύθερο από την ακινησία στη θέση x = 2α , τότε όπως φαίνεται και από το διάγραμμα δυναμικής ενέργειας αυτό θα εκτελέσει μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας.

## Θέμα 18

Σώμα κινείται πάνω στον άξονα x, έχει μάζα m = 2kgr και δυναμική ενέργεια που δίνεται από τη σχέση : $V(x) = x^2 (x-4)^2$ (σε μονάδες S.I.)

**α)** Να βρεθεί η δύναμη F(x) που ασκεί το πεδίο στο σώμα. Να σχεδιαστεί πρόχειρα η συνάρτηση V(x), αφού βρεθούν τα χαρακτηριστικά της σημεία.

**β)** Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του σώματος και να εξετασθεί αν είναι σημεία ευσταθούς ή ασταθούς ισορροπίας.

**γ)** Αν το σώμα έχει ολική ενέργεια E = 8, να σχεδιαστούν προσεγγιστικά στο διάγραμμα V(x) τα όρια των τιμών του x ανάμεσα στα οποία μπορεί να κινηθεί το σώμα (δεν χρειάζονται αριθμητικές τιμές).

**δ)** Αν σε κάποια στιγμή το σώμα βρίσκεται στο σημείο x = 0, ποια είναι η ελάχιστη αρχική ταχύτητα που πρέπει να του δώσουμε ώστε να περάσει από το σημείο x = 4;

***(Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.)***

## Λύση

**α)** Η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι:

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow F(x) = -4x^3 + 24x^2 - 32x$$

Είναι:

$$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow 4x^3 - 24x^2 + 32x = 0 \Rightarrow x(4x^2 - 24x + 32) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0, \quad x = 2, \quad x = 4 \ \text{(ακρότατα)}$$

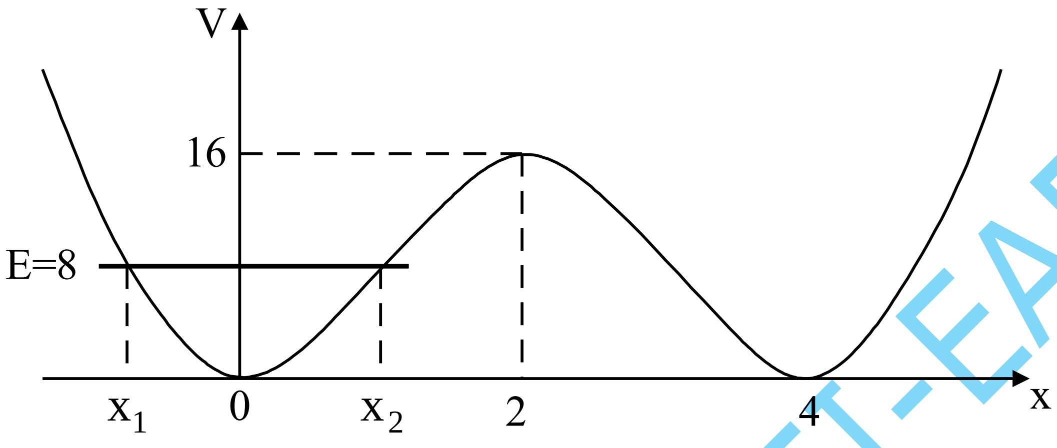
και $\frac{d^2V}{dx^2} = 12x^2 - 48x + 32$ οπότε: $\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=0} = 32 > 0$, $\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=2} = -16 < 0$

και $\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=4} = 32 > 0$

Δηλαδή στα σημεία x = 0 και x = 4 η συνάρτηση V(x) παρουσιάζει ελάχιστο, ενώ στο σημείο x = 2 μέγιστο.

Επίσης είναι: $V(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \ x = 4$

Η γραφική παράσταση της V(x) φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:




**β)** Από την παραπάνω ανάλυση παρατηρείται ότι τα σημεία ακροτάτων αποτελούν τις θέσεις ισορροπίας του σώματος και συγκεκριμένα τα σημεία ελαχίστων x = 0 και x = 4 είναι σημεία ευσταθούς ισορροπίας, ενώ το σημείο μεγίστου x = 2 είναι σημείο ασταθούς ισορροπίας.

**γ)** Η περιοχή κίνησης του σώματος $x_1 \le x \le x_2$ όταν αυτό έχει ολική ενέργεια E = 8 φαίνεται πάνω στο διάγραμμα V(x).

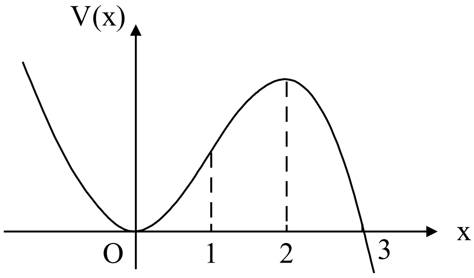
**δ)** Αν το σώμα βρίσκεται στο σημείο x = 0 για να φτάσει στο x = 4 αρκεί να περάσει το σημείο μεγίστου x = 2. Έτσι η ελάχιστη αρχική ταχύτητα αντιστοιχεί στο να φτάσει το σώμα με μηδενική ταχύτητα στο x = 2.

Εφαρμόζοντας λοιπόν την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ των σημείων x = 0 και x = 2 προκύπτει:

$$K(0)+V(0)=K(2)+V(2) \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2+0=0+16 \Rightarrow \frac{1}{2}2\upsilon^2=16 \Rightarrow \upsilon=4m/sec$$

## Θέμα 19

Ένα σώμα με μάζα m = 1kgr κινείται σε μια διάσταση υπό την επίδραση δυναμικής ενέργειας $V(x) = kx^2 - k'x^3$, όπου $k = 1\text{N/m}$ και $k' = (1/3)\text{N}/\text{m}^2$ (βλ. σχήμα).




**α)** Να βρείτε τα σημεία ισορροπίας της $V(x)$, καθώς και τα σημεία που μηδενίζεται.
**β)** Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε τη δύναμη $F(x)$.
**γ)** Το σώμα ξεκινά από τη θέση x = 1 με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon} = -1\hat{x}\text{m/s}$. Να περιγράψετε την κίνησή του.

***(Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)***

## Λύση

**α)** Είναι: $\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow 2kx - 3k'x^2 = 0 \Rightarrow x(2k - 3k'x) = 0 \Rightarrow x(2 - x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0, x = 2$ (σημεία ισορροπίας)

Όπως φαίνεται από το σχήμα το σημείο x = 0 είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας και το x = 2 σημείο ασταθούς ισορροπίας. Αυτό αποδεικνύεται και σύμφωνα με το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου $d^2V/dx^2$.
Τα σημεία όπου μηδενίζεται η $V(x)$ είναι:

$$V(x) = 0 \Rightarrow kx^2 - k'x^3 = 0 \Rightarrow x^2(k - k'x) = 0 \Rightarrow x^2\left(1 - \frac{x}{3}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0,\ x = 3$$

**β)** Η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι:

$$F = -\frac{dV}{dx} = -2kx + 3k'x^2 \Rightarrow F(x) = -2x + x^2$$

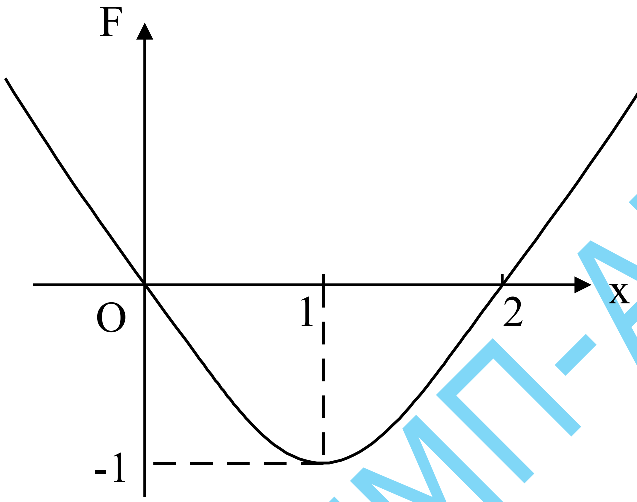
Μελέτη της συνάρτησης $F(x)$:

$$\frac{dF}{dx} = 0 \Rightarrow -2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$\frac{d^2F}{dx^2} = 2 > 0$ δηλαδή στο σημείο x = 1 η F(x) παρουσιάζει ελάχιστο.

$F(x) = 0 \Rightarrow -2x + x^2 = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 2$

Η γραφική παράσταση της $F(x)$ φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:




**γ)** Όπως φαίνεται από το διάγραμμα της $V(x)$, αν το σώμα ξεκινήσει από το σημείο x = 1 με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon} = -1\hat{x} m/s$ (δηλαδή κινούμενο προς τα αριστερά) τότε αυτό θα εκτελέσει μικρές ταλαντώσεις περί τη θέση ευσταθούς ισορροπίας x = 0.

## Θέμα 20

Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται σε ένα μονοδιάστατο δυναμικό πεδίο. Η δυναμική του ενέργεια είναι:

$$V(x) = D\left[e^{-2\alpha(x-x_o)} - 2e^{-\alpha(x-x_o)}\right]$$

όπου $x_o$, D και α θετικές ποσότητες.

**α)** Βρείτε την ελάχιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας και τη θέση που συμβαίνει.

**β)** Βρείτε τις οριακές τιμές της $V(x)$ για $x \to -\infty$ και $x \to +\infty$ και σχεδιάστε ποιοτικά την $V(x)$.

**γ)** Για ποιες τιμές της ολικής ενέργειας E το σωματίδιο θα παραμένει φραγμένο σε μια περιοχή του χώρου; Σχεδιάστε την αντίστοιχη περιοχή σε μια τυπική περίπτωση.

**δ)** Για ποιες τιμές της ολικής ενέργειας το σωματίδιο διαφεύγει στο άπειρο; Υπολογίστε την οριακή ταχύτητα (σε άπειρη απόσταση) από το θεώρημα διατήρησης της ενέργειας.

***(Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)***

### Λύση

**α)** Η συνάρτηση $V(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο όταν:

$$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow D\left[-2\alpha e^{-2\alpha(x-x_o)} + 2\alpha e^{-\alpha(x-x_o)}\right] = 0 \Rightarrow e^{-2\alpha(x-x_o)} = e^{-\alpha(x-x_o)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\alpha(x-x_o) = -\alpha(x-x_o) \Rightarrow -2\alpha x + 2\alpha x_o = -\alpha x + \alpha x_o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha x = \alpha x_o \Rightarrow x = x_o$$

και $\dfrac{d^2V}{dx^2} = D\left[4\alpha^2 e^{-2\alpha(x-x_o)} - 2\alpha^2 e^{-\alpha(x-x_o)}\right]$ οπότε:

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_o} = D(4\alpha^2 e^0 - 2\alpha^2 e^0) = D(4\alpha^2 - 2\alpha^2) = 2D\alpha^2 > 0$$

Δηλαδή στη θέση $x = x_o$ (η οποία είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας) η $V(x)$ έχει ελάχιστη τιμή η οποία είναι:

$$V(x = x_o) = D(e^0 - 2e^0) = D(1-2) \Rightarrow V(x = x_o) = -D$$

**β)** Όταν $x \to -\infty$ είναι: $e^{-2\alpha(x-x_0)} = e^{-\alpha(x-x_0)} = e^{+\infty} \to \infty$
οπότε η $V(x) \to \infty$,

ενώ όταν $x \to +\infty$ είναι: $e^{-2\alpha(x-x_0)} = e^{-\alpha(x-x_0)} = e^{-\infty} \to 0$

οπότε η $V(x) \to 0$.

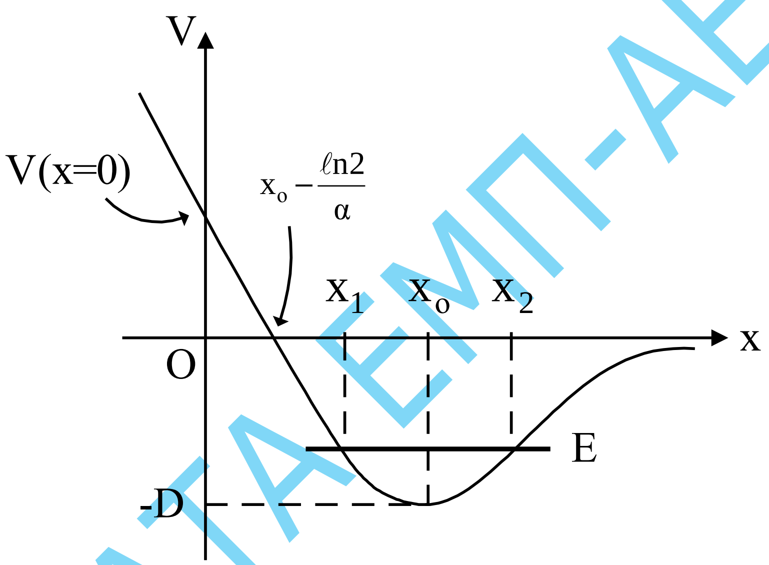
Η $V(x)$ μηδενίζεται όταν:

$$V(x) = 0 \Rightarrow e^{-2\alpha(x-x_o)} = 2e^{-\alpha(x-x_o)} \Rightarrow -2\alpha^{(x-x_o)} = \ell n2 - \alpha(x - x_o) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = x_o - \frac{\ell n2}{\alpha}$$

Και για $x = 0$ είναι: $V(x=0) = D(e^{2\alpha x_o} - 2e^{\alpha x_o})$

Στο ακόλουθο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $V(x)$:




**γ)** Από το παραπάνω διάγραμμα της δυναμικής ενέργειας συμπεραίνεται ότι αν η ολική ενέργεια του σωματιδίου είναι $-D \le E \le 0$ τότε η κίνηση του σωματιδίου θα είναι φραγμένη σε μια περιοχή γύρω από τη θέση ισορροπίας $x = x_o$.
Μια τυπική περίπτωση φαίνεται στο σχήμα όπου για τη συγκεκριμένη ολική ενέργεια E το σωματίδιο δύναται να κινηθεί στην περιοχή $x_1 \le x \le x_2$.

**δ)** Για να διαφύγει το σωματίδιο στο άπειρο θα πρέπει η ολική του ενέργεια να είναι $E \ge 0$. Οπότε η οριακή περίπτωση αντιστοιχεί στη θέση όπου είναι E = 0. Άρα εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ της θέσης όπου E = 0 και του απείρου προκύπτει ότι η οριακή ταχύτητα του σωματιδίου στο άπειρο είναι:

$$E = K(\infty) + V(\infty) \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} m\upsilon_{op}^2 + 0 \Rightarrow \upsilon_{op} = 0$$