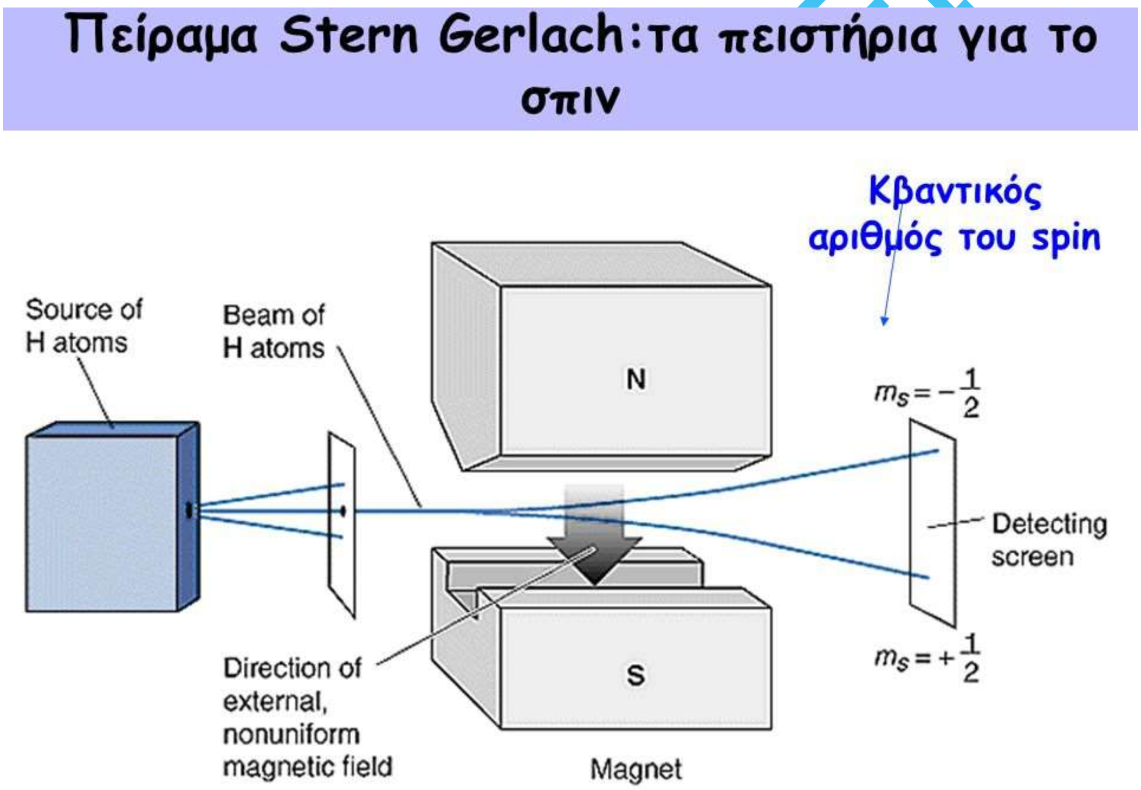
ΤΟ SPIN ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

Το πείραμα Stern – Gerlach ανέδειξε μια απ΄ τις βασικότερες κβαντικές έννοιες, το spin ή ιδιοστροφορμή των σωματιδίων. Τα αποτελέσματα του πειράματος αυτού, κατά το οποίο μία δέσμη ηλεκτρονίων εκτρέπεται κατά τη διέλευσή της μέσα από μαγνητικό πεδίο, δεν μπορούσαν να εξηγηθούν με τις αρχές της μέχρι τότε κβαντικής θεωρίας.
Μόνο με την εισαγωγή της έννοιας του spin έγινε δυνατή η ερμηνεία των αποτελεσμάτων του πειράματος Stern - Gerlach καθώς και πάρα πολλών άλλων φαινομένων, μεταξύ των οποίων και η κατάταξη των στοιχείων στο γνωστό περιοδικό πίνακα.



Το spin θεωρείται ως καθαρά κβαντομηχανικό μέγεθος χωρίς κλασικό ανάλογο (η απόδοση του spin στην ιδιοπεριστροφή του σωματιδίου είναι εντελώς λανθασμένη) και αποτελεί χαρακτηριστικό γνώρισμα κάθε σωματιδίου.

Οι τελεστές του spin $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z, \hat{S}^2$ ικανοποιούν την άλγεβρα της στροφορμής. Δηλαδή:

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z, \qquad [\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hbar\hat{S}_x, \qquad [\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hbar\hat{S}_y \;\; \kappa\alpha\iota \;\; [\hat{S}^2, \hat{S}_i] = 0$$

Συνεπώς δεν είναι δυνατή η ταυτόχρονη μέτρηση δύο προβολών του spin, αλλά μόνο το μέτρο του spin και μία εκ των τριών προβολών.

Όπως σε κάθε φυσικό μέγεθος έτσι και στο spin αντιστοιχούν ερμιτιανοί τελεστές.Το μέτρο του spin S και η προβολή του στον άξονα z S_z συνδέονται με τους κβαντικούς αριθμούς s και m_s σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$S^2 = s(s+1)\hbar^2 \qquad \text{και} \qquad S_z = \mathrm{m}_s\hbar$$

Για το ηλεκτρόνιο είναι: s=1/2 και $\mathrm{m}_s = \pm 1/2$.

Οι τελεστές των τριών προβολών του spin γράφονται υπό μορφή πινάκων 2x2 ως:

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

όπου $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ οι πίνακες Pauli.
Παρατηρούμε ότι:

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 \Rightarrow \hat{S}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές και των τριών τελεστών είναι $\pm\hbar/2$ με τα ακόλουθα ιδιοδιανύσματα:

- **Για τον $\hat{S}_x$:**

$$\text{Ιδιοτιμή: } +\frac{\hbar}{2} \qquad \text{ιδιοδιάνυσμα: } \quad X_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ιδιοτιμή: } -\frac{\hbar}{2} \qquad \text{ιδιοδιάνυσμα: } \quad X_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- **Για τον $\hat{S}_y$:**

$Ιδιοτιμή: +\frac{\hbar}{2}$ $\quad ιδιοδιάνυσμα: \quad X_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}$

$Ιδιοτιμή: -\frac{\hbar}{2}$ $\quad ιδιοδιάνυσμα: \quad X_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix}$

- **Για τον $\hat{S}_z$:**

$Ιδιοτιμή: +\frac{\hbar}{2}$ $\quad ιδιοδιάνυσμα: \quad X_+ = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$

$Ιδιοτιμή: -\frac{\hbar}{2}$ $\quad ιδιοδιάνυσμα: \quad X_- = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$

Οι εξισώσεις ιδιοτιμών για τους τελεστές $\hat{S}^2$ και $\hat{S}_z$ που ικανοποιούν οι ιδιοσυναρτήσεις $X_\pm = X_s^{\mathrm{m_s}} = X_{1/2}^{\pm 1/2}$ είναι:

$\boldsymbol{\hat{S}^2 X_\pm = s(s+1)\hbar^2 X_\pm}$, όπου s=1/2 ο κβαντικός αριθμός spin

και

$\boldsymbol{\hat{S}_z X_\pm = \mathrm{m_s}\hbar X_\pm}$, όπου $\mathrm{m_s} = \pm 1/2$ ο μαγνητικός κβαντικός αριθμός spin

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας