Θέμα

Ένα ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε κατάσταση όπου υπάρχει ίση πιθανότητα να βρούμε τις τιμές $+\hbar/2$, $-\hbar/2$ σε μια μέτρηση του S_x.
(α) Να προσδιοριστεί η κυματοσυνάρτηση του σπιν.
(β) Να υπολογιστεί η μέση τιμή του $\langle S_y \rangle$ καθώς και το ΔS_y.

α) Έστω η κυματοσυνάρτηση του spin του ηλεκτρονίου : $\chi = \begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix}$ (1)

Συνθήκη κανονικοποίησης: $\chi^\dagger \chi = 1 \rightarrow (\alpha^* \;\; b^*) \begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix} = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \alpha^* \alpha + b^* b = 1 \rightarrow |\alpha|^2 + |b|^2 = 1$ (2)

Τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα του τελεστή S_x είναι:

$$\chi_+^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \chi_-^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Συνεπώς η κυματοσυνάρτηση spin μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των ιδιοδιανυσμάτων χ_+, χ_- ως:

$$\chi = c_+ \chi_+^{(x)} + c_- \chi_-^{(x)} \quad (4)$$

όπου $|c_+|^2$ η πιθανότητα να βρεθεί η τιμή $+\frac{\hbar}{2}$ σε μια μέτρηση του S_x και $|c_-|^2$ η πιθανότητα να βρεθεί η τιμή $-\frac{\hbar}{2}$ σε μια μέτρηση του S_x. και είναι:

$$c_+ = \chi_+^{(x)\dagger} \chi \overset{(1,3)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \;\; 1)\begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix} \rightarrow c_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + b) \quad (5)$$

www.pmoiras.weebly.com panmoiras@gmail.com 6932 946778

$$c_- = \chi_-^{(x)\dagger}\chi \overset{(1,3)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ b\end{pmatrix} \to c_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha-b) \quad (6)$$

Επειδή υπάρχει ίση πιθανότητα να βρούμε τις τιμές $+\frac{\hbar}{2}, -\frac{\hbar}{2}$ σε μια μέτρηση του S_x ισχύει:

$$|c_+|^2 = |c_-|^2 \xrightarrow{(5,6)} \frac{1}{2}|\alpha+b|^2 = \frac{1}{2}|\alpha-b|^2 \to$$

$$\to \alpha+b = \alpha-b \to 2b=0 \to b=0 \quad (7)$$

Ενώ η (2) λόγω της (7) είναι: $|\alpha|^2 = 1 \to \alpha = 1$.

Άρα η κυματοσυνάρτηση σπίν είναι: $\boxed{\chi = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}}$ (8)

β) Η μέση τιμή του S_y είναι:

$$\langle S_y\rangle = \chi^\dagger S_y \chi = \chi^\dagger \frac{\hbar}{2}\sigma_y \chi \overset{(8)}{=} \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ i\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}[0+0] \to \boxed{\langle S_y\rangle = 0} \quad (9)$$

www.pmoiras.weebly.com ✉ panmoiras@gmail.com ☎ 6932 946778

και $\langle S_y^2\rangle = \chi^\dagger S_y^2 \chi = \chi^\dagger S_y S_y \chi = \chi^\dagger \frac{\hbar}{2}\sigma_y \frac{\hbar}{2}\sigma_y \chi =$

$$= \frac{\hbar^2}{4}\chi^\dagger \sigma_y\sigma_y\chi = \frac{\hbar^2}{4}\chi^\dagger \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\chi =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}\chi^\dagger\begin{pmatrix}-i^2&0\\0&-i^2\end{pmatrix}\chi = \frac{\hbar^2}{4}\chi^\dagger \underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}_{I:\ \text{μοναδιαίος πίνακας}}\chi = \frac{\hbar^2}{4}\cancelto{1}{\chi^\dagger\chi} \rightarrow$$

$$\rightarrow \langle S_y^2\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \quad (10)$$

Άρα: $\Delta S_y = \sqrt{\langle S_y^2\rangle - \langle S_y\rangle^2} \overset{(9),(10)}{=} \sqrt{\frac{\hbar^2}{4} - 0} \rightarrow$

$$\rightarrow \boxed{\Delta S_y = \frac{\hbar}{2}}.$$