ΟΔΕΥΟΝΤΑ ΚΥΜΑΤΑ – ΚΥΜΑΤΟΜΑΔΕΣ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

EMC²

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ **6932 946778**

www.pmoiras.weebly.com

1. Κυματοσυνάρτηση οδεύοντος κύματος

Μια κυματική διαταραχή διαδίδεται από ένα σημείο του χώρου σε κάποιο άλλο, χρησιμοποιώντας ως φορέα το μέσο στο οποίο παρατηρείται, χωρίς όμως να μετακινείται το ίδιο το μέσο. Αυτή είναι η βάση της **κυματικής κίνησης**.
Για την επίδειξη της κυματικής κίνησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια χορδή, η οποία διεγείρεται στο ένα άκρο της από μια αρμονική εξωτερική δύναμη. Αν η χορδή έχει άπειρο μήκος τότε τα κύματα που διαδίδονται στο μέσο αυτό, χωρίς να ανακλώνται πουθενά ονομάζονται **οδεύοντα κύματα**.
Αντίθετα αν η χορδή έχει σταθερά και τα δύο άκρα, τότε τα οδεύοντα κύματα που διαδίδονται πάνω στη χορδή θα ανακλώνται και στα δύο άκρα και επομένως η ταλάντωση της χορδής προκύπτει από το συνδυασμό τέτοιων κυμάτων, που κινούνται εκατέρωθεν κατά μήκος της χορδής και θα σχηματίζονται **στάσιμα κύματα**.
Κύματα σε χορδές είναι **εγκάρσια κύματα** γιατί οι μετατοπίσεις ή ταλαντώσεις του μέσου είναι κάθετες στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Αντίθετα όταν οι ταλαντώσεις του μέσου είναι παράλληλες με τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος, τα κύματα λέγονται **διαμήκη** (π.χ. τα ηχητικά κύματα).
Έστω μια χορδή απείρου μήκους και στο άκρο της (x=0) ασκείται μια αρμονική εξωτερική δύναμη $F(t) = F_o \sin\omega t$. Η εξίσωση που περιγράφει την κίνηση της χορδής είναι ανεξάρτητη από το μήκος της και από τον τρόπο με τον οποίο διεγείρεται και είναι η γνωστή κυματική εξίσωση **(2-21)**:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \qquad \textbf{(5-1)}$$

Επειδή όλα τα σημεία της χορδής πρέπει να εκτελούν εξαναγκασμένη ταλάντωση με συχνότητα ω, αν το πλάτος της ταλάντωσης στο άκρο x=0 της χορδής είναι A, τότε η κίνηση εκεί (αφού δεν υπάρχουν τριβές) πρέπει να γίνεται σε φάση με τη διεγείρουσα δύναμη και να περιγράφεται από τη σχέση:

$$y(0,t_o) = A\sin\omega t_o \qquad \textbf{(5-2)}$$

όπου $y(0,t_o)$ είναι η τιμή της κυματοσυνάρτησης y(x,t) στο σημείο x=0 σε κάθε χρονική στιγμή t_o. Η εξαναγκασμένη ταλάντωση που προκαλείται στο άκρο της χορδής από την εξωτερική δύναμη τη χρονική στιγμή t_o, διαδίδεται κατά μήκος της και φτάνει, έχοντας το ίδιο σχήμα εφόσον δεν υπάρχει απόσβεση, στο σημείο x σε κάποια μεταγενέστερη χρονική στιγμή t. Δηλαδή πρέπει να ισχύει:

$$y(0,t_o) = y(x,t) \overset{(5-2)}{\Rightarrow} y(x,t) = A\sin\omega t_o \qquad \textbf{(5-3)}$$

Η απόσταση x διανύεται από το κύμα σε χρόνο $\Delta t = t - t_o$. Αν η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται το κύμα είναι υ τότε θα ισχύει:

$$t - t_o = \frac{x}{\upsilon} \Rightarrow t_o = t - \frac{x}{\upsilon}$$

Άρα η **(5-3)** γίνεται:

$$y(x,t) = A\sin\omega(t - x/\upsilon) \Rightarrow y(x,t) = A\sin\left(\omega t - \frac{\omega}{\upsilon}x\right) \qquad \textbf{(5-4)}$$

Αν υπολογιστούν οι δεύτερες παράγωγοι της y(x,t) ως προς x και t και αντικατασταθούν στην κυματική εξίσωση **(5-1)** προκύπτει:

$$\upsilon^2 = \frac{T}{\rho} \qquad \textbf{(5-5)}$$

Δηλαδή η ταχύτητα διάδοσης του αρμονικού κύματος είναι ίση με την τετραγωνική ρίζα του λόγου T/ρ της τάσης της χορδής προς τη γραμμική της πυκνότητα, όπως έχει αποδειχθεί και στην παράγραφο 2.3. για τα στάσιμα κύματα χορδής μήκους L.
Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μήκους κύματος, ως το μήκος εκείνο στο οποίο η φάση του κύματος μεταβάλλεται κατά 2π και από την θεμελιώδη κυματική εξίσωση προκύπτει:

$$\upsilon = \lambda\nu \Rightarrow \lambda = \frac{\upsilon}{\nu} \Rightarrow \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\upsilon}{2\pi\nu} \Rightarrow \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\upsilon}{\omega} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{\upsilon} \Rightarrow k = \frac{\omega}{\upsilon}$$

όπου $k = 2\pi/\lambda = \omega/\upsilon$ ο κυματάριθμος.
Συνεπώς η κυματοσυνάρτηση **(5-4)** ενός αρμονικού κύματος παίρνει τελικά τη μορφή:

$$y(x,t) = A\sin(\omega t - kx) \qquad \textbf{(5-6)}$$

Το μέγεθος $\varphi(x,t) = \omega t - kx$ είναι η φάση του κύματος. Παρατηρείται ότι σε ένα σταθερό σημείο η φάση αυξάνει κατά 2π μέσα σε χρόνο μιας περιόδου, δηλαδή είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου σε κάποια σταθερή θέση. Επίσης σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, η φάση κατά τη θετική διεύθυνση x ελαττώνεται κατά 2π σε μια απόσταση ίση με το μήκος κύματος, δηλαδή είναι φθίνουσα συνάρτηση της απόστασης από την πηγή της διεγείρουσας δύναμης για σταθερό χρόνο.
Συνεπώς η φάση στο σημείο x σε κάποια χρονική στιγμή t είναι ίση με τη φάση στο σημείο x=0 σε κάποια προγενέστερη χρονική στιγμή t-x/υ. Έτσι αν παρατηρείται π.χ. η κορυφή ενός κύματος καθώς αυτό διαδίδεται στο χώρο, παρατηρείται ουσιαστικά ένα σημείο σταθερής φάσης κατά τη μετατόπισή του στο χώρο. Αλλά επειδή η φάση εκεί είναι σταθερή, τότε το διαφορικό της συνάρτησης φ θα πρέπει να είναι ίσο με μηδέν. Δηλαδή:

$$d\varphi = \omega dt - kdx = 0$$

Προφανώς η σχέση αυτή ορίζει την ταχύτητα με την οποία μετατοπίζεται στο χώρο το σημείο σταθερής φάσης που παρατηρείται, οπότε:

$$\upsilon_{ph} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \qquad \textbf{(5-7)}$$

Δηλαδή ο λόγος ω/k είναι ίσος με την ταχύτητα διάδοσης υ του αρμονικού κύματος που περιγράφει η σχέση **(5-6)** και ονομάζεται **φασική ταχύτητα**, αφού συνδυάζεται με την ταχύτητα μετατόπισης στο χώρο ενός σημείου σταθερής φάσης.

Σημείωση : Μόνο στην περίπτωση που μια διαταραχή μπορεί να παρασταθεί σαν ένα αρμονικό κύμα, η φασική ταχύτητα ταυτίζεται με την ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής αυτής στο χώρο. Αν η διαταραχή είναι μη αρμονική (π.χ. ένας παλμός), τότε ορίζεται σαν ταχύτητα διάδοσής της η λεγόμενη **ταχύτητα ομάδας**, όπως θα παρουσιαστεί στη συνέχεια.

Παρατηρήσεις :

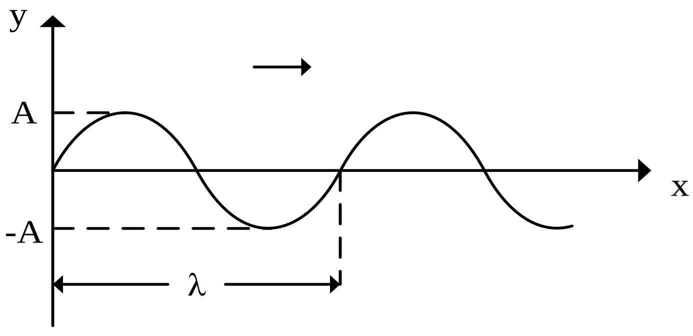
1) Αν το κύμα διαδίδεται κατά την αρνητική φορά του άξονα x, επειδή η φάση θα πρέπει, για την ίδια χρονική στιγμή t, να μειώνεται όσο πιο πολύ απομακρύνεται από το σημείο εφαρμογής της εξωτερικής δύναμης, η κυματοσυνάρτηση που περιγράφει στην περίπτωση αυτή το οδεύον κύμα, θα είναι:

$$y(x,t) = A\sin(\omega t + kx) \qquad \textbf{(5-8)}$$

Ισοδύναμες κυματοσυναρτήσεις των **(5-6)** ή **(5-8)** είναι οι:

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t) \quad \text{ή} \quad y(x,t) = A\sin(kx + \omega t)$$

Η γραφική αναπαράσταση της κυματοσυνάρτησης ενός ημιτονοειδούς αρμονικού κύματος αποδίδεται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 5.1

Η μέγιστη τιμή του y λέγεται **πλάτος** Α του κύματος, ενώ η απόσταση μεταξύ δύο συνεχόμενων σημείων με την ίδια φάση είναι το **μήκος κύματος λ**.
Τέλος ο χρόνος που απαιτείται για να διαδοθεί το κύμα μεταξύ δύο συνεχόμενων σημείων ίδιας φάσης λέγεται **περίοδος Τ**.

2) Οι κυματοσυναρτήσεις **(5-6)**, **(5-8)** μπορεί να είναι συνημιτονοειδείς, αφού και αυτές αποτελούν λύσεις της κυματικής εξίσωσης **(5-1)**.
Πολλές φορές για διευκόλυνση της μελέτης των ημιτονοειδών ή συνημιτονοειδών κυμάτων οι κυματοσυναρτήσεις τους μπορούν να γραφούν σε μιγαδική μορφή ως:

$$y(x,t) = Ae^{i(\omega t \pm kx)} = A\cos(\omega t \pm kx) + iA\sin(\omega t \pm kx) \qquad \textbf{(5-9)}$$

όπου το + αντιστοιχεί σε διάδοση κύματος προς τα αριστερά και το – προς τα δεξιά ενώ το i είναι η φανταστική μονάδα $(i^2 = -1)$.
Σημειώνεται ότι η κυματοσυνάρτηση **(5-9)** δεν περιγράφει ένα υπαρκτό κύμα, αλλά το πραγματικό της μέρος περιγράφει ένα συνημιτονοειδές κύμα, ενώ το φανταστικό της μέρος ένα ημιτονοειδές κύμα.
3) Η γενική λύση της κυματικής εξίσωσης **(5-1)**, όπως μπορεί να δειχτεί, είναι κάθε συνάρτηση που είναι γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων $f(\upsilon t - x)$ και g(υt+x) ή f(x-υt) και g(x+υt), όπου υ η ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής.
4) Καθεμία από τις παραπάνω κυματοσυναρτήσεις είναι μια λύση της κυματικής εξίσωσης και δίνει την απομάκρυνση ενός ταλαντωτή και τη φάση του ως προς ένα ταλαντωτή αναφοράς. Οι μεταβολές των μετατοπίσεων των ταλαντωτών και η διάδοση των φάσεών τους είναι αυτό που παρατηρείται σαν κυματική κίνηση.
5)

✎ Εφαρμογή

Να δειχτεί ότι κάθε συνάρτηση της μορφής y=f(υt-x) είναι λύση της κυματικής εξίσωσης **(5-1)**.

Λύση

Αν f' παριστάνει παραγώγιση της συνάρτησης ως προς το όρισμα (υt-x) τότε είναι:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -f'(\upsilon t - x) \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''(\upsilon t - x) \qquad \textbf{(1)}$$

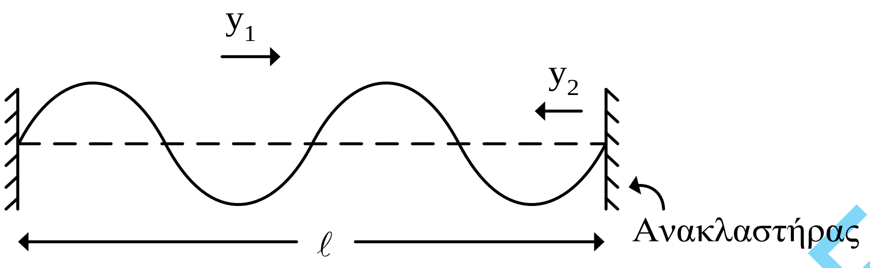
και $$\frac{\partial y}{\partial t} = \upsilon f'(\upsilon t - x) \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \upsilon^2 f''(\upsilon t - x) \Rightarrow \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f''(\upsilon t - x) \qquad \textbf{(2)}$$

Άρα εξισώνοντας τις **(1)** και **(2)** προκύπτει η κυματική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Όμοιο αποτέλεσμα προκύπτει και για τη συνάρτηση y=g(υt+x).

2. Στάσιμα κύματα σε χορδή σταθερού μήκους



Σχήμα 5.2

Έστω ότι κατά μήκος μιας χορδής σταθερού μήκους ℓ διαδίδονται δύο ημιτονοειδή οδεύοντα κύματα ίδιου πλάτους A και ίδιας συχνότητας ω. Δηλαδή:

$$y_1(x,t) = A\sin(kx - \omega t)\ ,\ y_2(x,t) = A\sin(kx + \omega t)$$

Η κυματοσυνάρτηση $y_1(x,t)$ αντιστοιχεί σε ένα οδεύον κύμα που διαδίδεται προς τα δεξιά (προσπίπτον κύμα) και η $y_2(x,t)$ σε κύμα που διαδίδεται προς τα αριστερά (ανακλώμενο κύμα), το οποίο έχει ανακλαστεί τελείως στο σταθερό άκρο $x = \ell$ της χορδής.
Συνεπώς η επαλληλία των δύο αυτών κυμάτων δίνει την ολική μετατόπιση y(x,t) ενός τυχαίου σημείου της χορδής ως:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) \Rightarrow y(x,t) = A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx + \omega t)$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα:

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ η τελευταία σχέση γράφεται:

$$y(x,t) = A\sin kx\cos\omega t - A\cos kx\sin\omega t + A\sin kx\cos\omega t + A\cos kx\sin\omega t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x,t) = 2A\sin kx\cos\omega t \qquad \textbf{(5-10)}$$

Από τη σχέση **(5-10)** προκύπτει ότι ένα τυχαίο σημείο x της χορδής εκτελεί ταλάντωση με πλάτος που μεταβάλλεται συνημιτονοειδώς με το χρόνο κατά απόλυτη τιμή από 0 ως 2A.
Επίσης ο όρος sinkx δείχνει ότι κάθε χρονική στιγμή η μορφή της χορδής είναι μια ημιτονοειδής καμπύλη.
Άρα η μορφή του κύματος δεν κινείται κατά μήκος της χορδής, αλλά παραμένει στην ίδια θέση και το πλάτος αυξομειώνεται με το χρόνο. Για το λόγο αυτό η κυματική αυτή μορφή ονομάζεται **στάσιμο κύμα**.

Παρατηρείται ότι υπάρχουν ιδιαίτερα σημεία της χορδής, τα οποία είναι ακίνητα και λέγονται **κόμβοι (ή δεσμοί)**. Για τον υπολογισμό της θέσης των κόμβων, λαμβάνεται υπόψη ότι η μετατόπιση y(x,t) εκεί είναι πάντοτε μηδέν, οπότε σύμφωνα και με την **(5-10)** προκύπτει:

$$y(x,t)=0 \overset{(5-10)}{\Rightarrow} \sin kx = 0 \Rightarrow kx = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\pi}{k} \Rightarrow x = \frac{n\pi}{2\pi/\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = n\frac{\lambda}{2}, \quad n = 0,1,2,...} \qquad \textbf{(5-11)}$$

όπου k=2π/λ είναι ο κυματάριθμος.
Άρα δύο διαδοχικοί κόμβοι απέχουν μεταξύ τους κατά λ/2.

Επίσης υπάρχουν σημεία της χορδής, τα οποία ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος 2Α και λέγονται **κοιλίες (ή αντιδεσμοί)**. Για τον υπολογισμό της θέσης των κοιλιών, λαμβάνεται υπόψη ότι η μετατόπιση y(x,t) εκεί είναι πάντοτε μέγιστη, οπότε σύμφωνα και με την **(5-10)** προκύπτει:

$$y(x,t)=\max \overset{(5-10)}{\Rightarrow} \sin kx = 1 \Rightarrow kx = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \Rightarrow x = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2\pi/\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}, \quad n = 0,1,2,...} \qquad \textbf{(5-12)}$$

Συνεπώς οι κοιλίες εμφανίζονται στις θέσεις όπου είναι ημιακέραιος αριθμός ημιμηκών κύματος ή αλλιώς στο ενδιάμεσο μεταξύ δύο κόμβων υπάρχει μια κοιλία.
Επειδή και τα δύο άκρα της χορδής είναι κόμβοι και δύο γειτονικοί κόμβοι βρίσκονται μεταξύ τους σε απόσταση μισού μήκους κύματος λ/2, σύμφωνα με την **(5-11)**, προκύπτει ότι το μήκος της χορδής θα πρέπει να είναι γενικά κάποιος ακέραιος αριθμός ημιμηκών κύματος. Δηλαδή μπορεί να υπάρχει ένα στάσιμο κύμα σε χορδή μήκους ℓ, η οποία έχει δύο ακλόνητα άκρα, μόνο όταν το μήκος κύματος ικανοποιεί την εξίσωση:

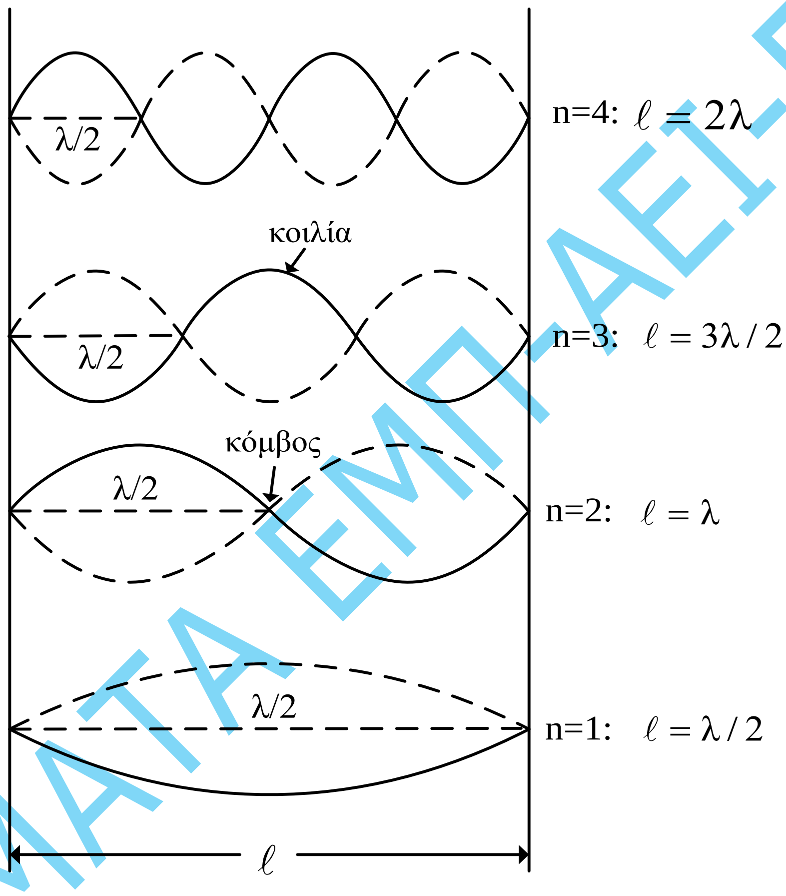
$$\ell = n\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2\ell}{n}, \quad n = 1,2,3,... \qquad \textbf{(5-13)}$$

Η εξίσωση **(5-13)** δίνει τα επιτρεπόμενα μήκη κύματος για τα οποία είναι δυνατή η ύπαρξη στάσιμου κύματος σε ακλόνητη χορδή μήκους ℓ.
Για τον υπολογισμό τώρα των επιτρεπτών συχνοτήτων ν_n, χρησιμοποιώντας τη θεμελιώδη κυματική εξίσωση υ=λν στη σχέση **(5-13)** προκύπτει:

$$\frac{\upsilon}{\nu_n} = \frac{2\ell}{n} \Rightarrow \nu_n = n\frac{\upsilon}{2\ell}, \quad n = 1,2,3,... \qquad \textbf{(5-14)}$$

Για n=1 είναι $\nu_1 = \upsilon/2\ell$ και ονομάζεται **θεμελιώδης συχνότητα**, ενώ όλες οι άλλες συχνότητες, που είναι ακέραια πολλαπλάσια της ν_1, ονομάζονται **αρμονικές**.
Δηλαδή για n=2 είναι $\nu_2 = \upsilon/\ell$ (2^{η} αρμονική), για n=3 είναι $\nu_3 = 3\upsilon/2\ell$ (3^{η} αρμονική) κ.ο.κ.

Στο ακόλουθο σχήμα παριστάνονται οι τέσσερις πρώτες αρμονικές (n=1,2,3,4) των στάσιμων κυμάτων που επιτρέπονται μεταξύ των δύο σταθερών άκρων μιας χορδής.



Σχήμα 5.3

3. Κυματομάδες και ομαδική ταχύτητα

Στα προηγούμενα η ανάλυση περιορίστηκε μόνο σε μονοχρωματικά κύματα, δηλαδή κύματα με μία μόνο συχνότητα και ένα μήκος κύματος. Είναι όμως πολύ πιο συνηθισμένο να εμφανίζονται τα κύματα με τη μορφή μίγματος ενός πλήθους ή μιας ομάδας συνιστωσών συχνοτήτων, που ονομάζονται **κυματομάδες ή παλμοί**. Δηλαδή παλμός είναι μια μη αρμονική διαταραχή, η οποία μπορεί να αναλυθεί στις αρμονικές συνιστώσες της. Στη συνέχεια θα εξεταστεί η συμπεριφορά μιας τέτοιας κυματομάδας.
Σε κάποια μέσα, όπως για παράδειγμα σε μια ομογενή χορδή, η σχέση διασποράς $\omega=\omega(k)$ είναι μια γραμμική συνάρτηση [δείτε σχέση **(2-31)**] κι αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα διάδοσης είναι σταθερή και ίδια για όλες τις αρμονικές συνιστώσες που διαδίδονται στο μέσο. Τότε ο παλμός διατηρεί το σχήμα του καθώς διαδίδεται στο μέσο και η ταχύτητα διάδοσής του είναι ίδια με την κοινή ταχύτητα όλων των αρμονικών συνιστωσών, δηλαδή με τη φασική ταχύτητα.
Σε άλλα μέσα όμως, όπως π.χ. σε μια χορδή με σφαιρίδια η σχέση διασποράς δεν είναι γραμμική [δείτε σχέση **(2-18)**] και επομένως η ταχύτητα διάδοσης της κάθε αρμονικής συνιστώσας εξαρτάται από τη συχνότητά της. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την αλλαγή του σχήματος του παλμού κατά τη διάδοσή του στο μέσο.
Είναι προφανές ότι στην περίπτωση αυτή υπάρχει ανάγκη να καθοριστεί η ταχύτητα διάδοσης του παλμού. Για το λόγο αυτό ορίζεται η ταχύτητα με την οποία μετατοπίζεται το μέγιστο ενός παλμού στο χώρο ως:

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} \qquad \textbf{(5-15)}$$

Η ταχύτητα αυτή ονομάζεται **ομαδική ταχύτητα** και είναι ίση με την κλίση της καμπύλης $\omega=\omega(k)$.

Σημείωση: Επειδή η ενέργεια σε μια ταλάντωση είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους και εφόσον η ομαδική ταχύτητα είναι η ταχύτητα με την οποία μετατοπίζεται στο χώρο το μέγιστο πλάτος του παλμού, συμπεραίνεται ότι η ομαδική ταχύτητα είναι η ταχύτητα διάδοσης της ενέργειας που μεταφέρει ο παλμός.

Παρατηρείται ότι από τον ορισμό της φασικής ταχύτητας **(5-7)** είναι $\omega=k\upsilon_{ph}$, οπότε η ομαδική ταχύτητα σύμφωνα με την **(5-15)** είναι:

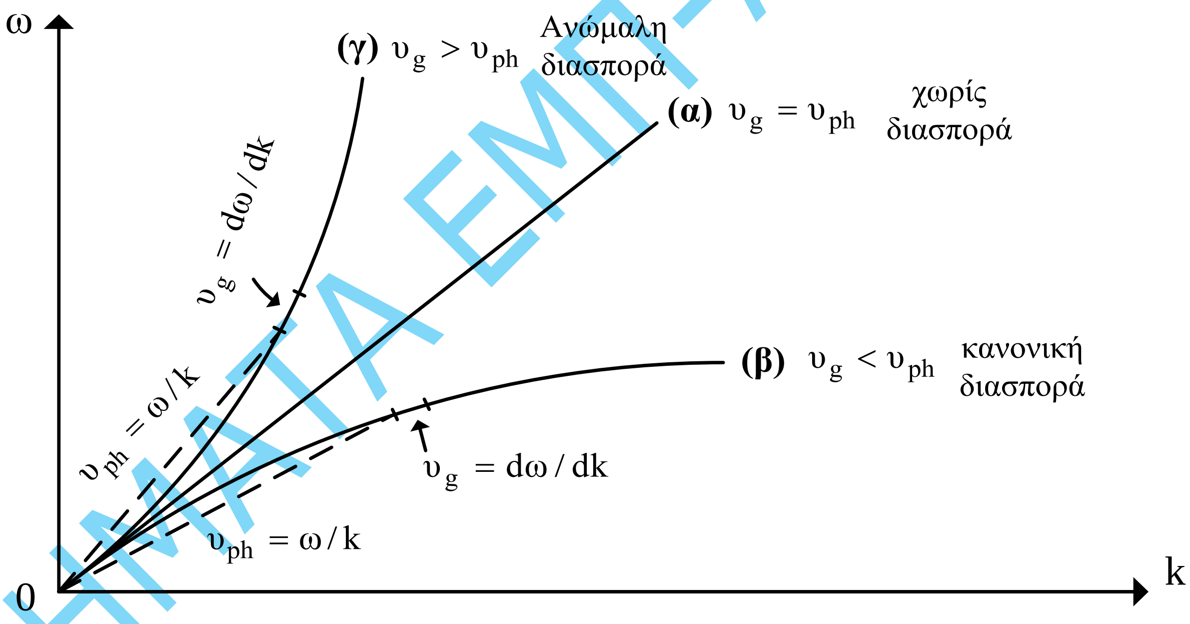
$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(k\upsilon_{ph}) = \upsilon_{ph} + k\frac{d\upsilon_{ph}}{dk} \qquad \textbf{(5-16)}$$

Η εξίσωση **(5-16)** είναι η σχέση της ομαδικής υ_g και της φασικής υ_{ph} ταχύτητας. Όταν το $d\upsilon_{ph}/dk$ είναι αρνητικό τότε είναι $\upsilon_g<\upsilon_{ph}$ και αυτό ονομάζεται **κανονική διασπορά**, ενώ όταν το $d\upsilon_{ph}/dk$ είναι θετικό τότε $\upsilon_g>\upsilon_{ph}$ και αυτό ονομάζεται **ανώμαλη διασπορά**.

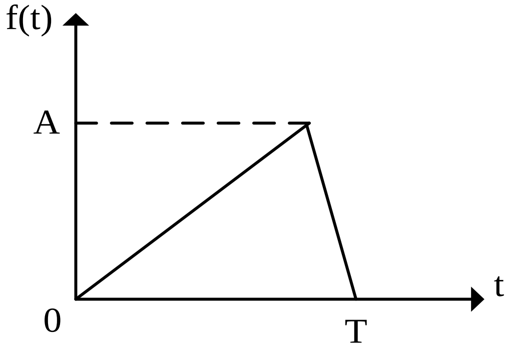
Στο ακόλουθο σχήμα οι τρεις καμπύλες απεικονίζουν σχέσεις διασποράς:
α) μια ευθεία γραμμή που παριστάνει ένα μη διασκορπιστικό μέσο, όπου το ω/k είναι σταθερό, δηλαδή $\upsilon_g=\upsilon_{ph}$,

β) μια σχέση κανονικής διασποράς, όπου η παράγωγος
$\upsilon_g = d\omega/dk < \upsilon_{ph} = \omega/k$ και

γ) μια σχέση ανώμαλης διασποράς, όπου $\upsilon_g>\upsilon_{ph}$.



Σχήμα 5.4



Σχήμα 5.5

Έστω τώρα ότι ένας παλμός είναι μια μη περιοδική συνάρτηση του χρόνου, όπως η συνάρτηση f(t) του **Σχήματος 5.5**. Η συνάρτηση f(t) είναι μη μηδενική για 0<t<T και ο χρόνος Δt=T ονομάζεται **διάρκεια** του παλμού.

Σύμφωνα με το ολοκληρωτικό θεώρημα του Fourier η συνάρτηση f(t) γράφεται στη μορφή:

$$f(t)=\int_{0}^{+\infty}A(\omega)\sin\omega t d\omega+\int_{0}^{+\infty}B(\omega)\cos\omega t d\omega \qquad \textbf{(5-17)}$$

Η σχέση **(5-17)** λέγεται **ολοκλήρωμα Fourier** και η ολοκλήρωση γίνεται ως προς τη μεταβλητή ω, κρατώντας το t σταθερό, οπότε τελικά προκύπτει συνάρτηση του t. Οι συντελεστές Fourier A(ω), B(ω) της σχέσης **(5-17)** δίνονται από τις σχέσεις:

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t dt \quad \text{και} \quad B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t dt \qquad \textbf{(5-18)}$$

Τα δύο ολοκληρώματα της **(5-18)** υπολογίζονται ως προς t, κρατώντας το ω σταθερό.
Το διάστημα Δω όπου ένας τουλάχιστον από τους συντελεστές A(ω), B(ω) είναι μη μηδενικός ονομάζεται **εύρος συχνοτήτων**. Αν Δt είναι η διάρκεια ενός παλμού και Δω το εύρος συχνοτήτων του, τότε ισχύει η προσεγγιστική σχέση:

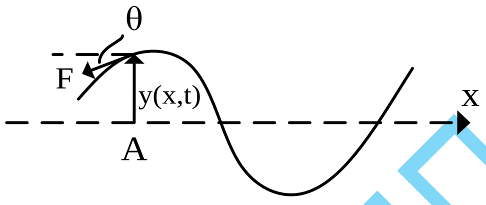
$$\Delta\omega\cdot\Delta t\cong 2\pi \quad \text{ή} \quad \Delta\nu\cdot\Delta t\cong 1 \qquad \textbf{(5-19)}$$

Η προσέγγιση **(5-19)** είναι γνωστή ως **θεώρημα εύρους ζώνης** και σύμφωνα με αυτό ένας παλμός διάρκειας Δt είναι το αποτέλεσμα της επαλληλίας συνιστωσών με συχνότητες που περιέχονται μέσα στο διάστημα Δω. Δηλαδή όσο βραχύτερο είναι το διάστημα Δt του παλμού, τόσο πλατύτερο είναι το διάστημα συχνοτήτων Δω που χρειάζονται για την παράστασή του. Παρατηρείται ότι όταν το Δω είναι μηδέν προκύπτει μια μοναδική συχνότητα, δηλαδή μονοχρωματικό κύμα, που πρέπει θεωρητικά να έχει άπειρη χρονική έκταση.

4. Χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση ή εμπέδηση χορδής και μετάδοση ενέργειας

Κάθε μέσο στο οποίο μεταδίδονται κύματα εμφανίζει μια σύνθετη αντίσταση σε αυτά τα κύματα.
Μια χορδή παρουσιάζει μια τέτοια σύνθετη αντίσταση ή εμπέδηση σε οδεύοντα κύματα και ορίζεται ως:

$$Z = \frac{\text{εγκάρσια δύναμη}}{\text{εγκάρσια ταχύτητα}} = \frac{F_y}{\upsilon_y} \qquad \textbf{(5-20)}$$



Σχήμα 5.6

Έστω η ομογενής ελαστική χορδή γραμμικής πυκνότητας ρ, του **Σχήματος 5.6**, η οποία είναι τεντωμένη με τάση T. Έναν οδεύον κύμα y(x,t) διαδίδεται κατά μήκος της χορδής.
Θεωρώντας το τμήμα εκείνο της χορδής που βρίσκεται δεξιότερα ενός σημείου A(x), το τμήμα αυτό δέχεται από το αριστερό τμήμα της χορδής μια δύναμη F που έχει τη διεύθυνση της εφαπτομένης στο σημείο αυτό. Η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης F έχει μέτρο ίσο με την τάση T με την οποία έχει τεντωθεί η χορδή και λόγω της εγκάρσιας ταλάντωσης της χορδής στην οριζόντια διεύθυνση x υπάρχει ισορροπία. Δηλαδή:

$$F_x = T \Rightarrow F\cos\theta = T \Rightarrow F = T/\cos\theta \qquad \textbf{(5-21)}$$

Επίσης η κάθετη συνιστώσα της δύναμης F είναι:

$F_y = -F\sin\theta$ και λόγω της **(5-21)** γίνεται:

$$F_y = -T\tan\theta \Rightarrow F_y = -T\frac{\partial y}{\partial x} \qquad \textbf{(5-22)}$$

αφού η κλίση $\tan\theta$ σε οποιαδήποτε θέση είναι $\partial y/\partial x$.

Η εγκάρσια ταχύτητα του σημείου A της χορδής, η οποία προσέξτε ότι είναι τελείως διαφορετική από την ταχύτητα διάδοσης του κύματος στη χορδή, είναι:

$$\upsilon_y = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \qquad \textbf{(5-23)}$$

Συνεπώς η **(5-20)** λόγω των **(5-22)** και **(5-23)** δίνει:

$$Z = \frac{-T\dfrac{\partial y}{\partial x}}{\partial y/\partial t} \qquad \textbf{(5-24)}$$

Επειδή ένα κύμα που διαδίδεται στη χορδή προς τα δεξιά, δηλαδή προς τα θετικά, με ταχύτητα διάδοσης υ έχει τη μορφή: $y(x,t) = f(x-\upsilon t)$ προκύπτει ότι οι παράγωγοι της κυματοσυνάρτησης αυτής ως προς x και t είναι:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f'(x-\upsilon t) \quad \text{και} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -\upsilon f'(x-\upsilon t) \qquad \textbf{(5-25)}$$

Άρα αντικαθιστώντας τα **(5-25)** στην **(5-24)** τελικά προκύπτει:

$$Z = \frac{-Tf'(x-\upsilon t)}{-\upsilon f'(x-\upsilon t)} \Rightarrow \boxed{Z = \frac{T}{\upsilon} = \sqrt{T\rho} = \rho\upsilon} \qquad \textbf{(5-26)}$$

όπου $\upsilon = \sqrt{T/\rho}$ είναι η ταχύτητα διάδοσης κύματος στη χορδή.

Η σχέση **(5-26)** αποτελεί τη **χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση ή εμπέδηση** χορδής και καθορίζεται από την αδράνεια και την ελαστικότητα της χορδής.
Η ισχύς της δύναμης F_y, δηλαδή ο ρυθμός παραγωγής ενέργειας, είναι ίση με το γινόμενο της εγκάρσιας δύναμης F_y επί την εγκάρσια ταχύτητα υ_y και ισούται με την ισχύ που μεταδίδεται στο δεξιό τμήμα της χορδής. Άρα η ισχύς που διαδίδεται μέσω του κύματος είναι:

$$P(x,t) = F_x \upsilon_y \overset{(5-20)}{\Rightarrow} P(x,t) = Z\upsilon_y^2 \overset{(5-23)}{\Rightarrow} P(x,t) = Z\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \qquad \textbf{(5-27)}$$

Η έκφραση αυτή ισχύει για κάθε κύμα, ημιτονοειδές ή μη και έχει σπουδαία σημασία στην Κυματική.
Για ημιτονοειδές κύμα με κυματοσυνάρτηση $y(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$, που διαδίδεται σε χορδή με σύνθετη αντίσταση Z, η σχέση **(5-27)** που δίνει την διαδιδόμενη ισχύ γίνεται:

$$P(x,t) = Z\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = Z(A\omega\cos(\omega t - kx))^2 \Rightarrow$$

$$P(x,t) = ZA^2\omega^2\cos^2(\omega t - kx) \qquad \textbf{(5-28)}$$

Η εξίσωση **(5-28)** δίνει τον στιγμιαίο ρυθμό μεταφοράς ενέργειας κατά μήκος της χορδής και είναι ανάλογος προς το τετράγωνο του πλάτους και προς το τετράγωνο της συχνότητας.

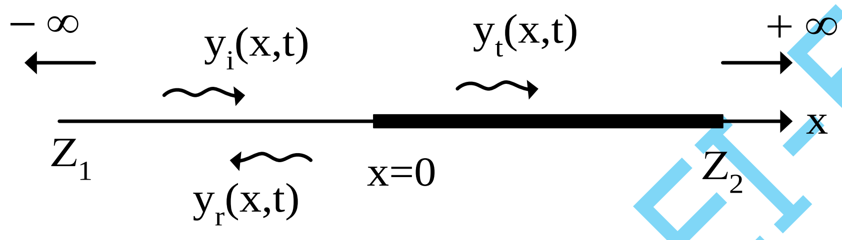
Άρα η μέση διαδιδόμενη ισχύς είναι:

$$< P(x,t) >= ZA^2\omega^2 < \cos^2(\omega t - kx) > \Rightarrow < P(x,t) >= \frac{1}{2} ZA^2\omega^2 \qquad \textbf{(5-29)}$$

αφού $\quad < \cos^2(\omega t - kx) >= \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \cos^2(\omega t - kx)dt = \dfrac{1}{2}$

5. Ανάκλαση και μετάδοση κυμάτων χορδής σε ένα σύνορο

Στην προηγούμενη παράγραφο αναφέρθηκε ότι μια χορδή προβάλλει χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση Z=ρυ στα κύματα που μεταδίδονται κατά μήκος της. Στη συνέχεια θα εξεταστεί η συμπεριφορά των κυμάτων σε μια ξαφνική αλλαγή της σύνθετης αντίστασης, δηλαδή της τιμής ρυ.



Σχήμα 5.7

Έστω μια χορδή απείρου μήκους, που αποτελείται από δύο τμήματα συνδεδεμένα με ομαλό τρόπο στο σημείο x=0 και τείνονται με σταθερή τάση T σε όλο το μήκος της χορδής.

Τα δύο τμήματα έχουν διαφορετικές γραμμικές πυκνότητες ρ_1 και ρ_2 και επομένως διαφορετικές ταχύτητες κύματος $\upsilon_1^2 = T/\rho_1$ και $\upsilon_2^2 = T/\rho_2$, ενώ οι χαρακτηριστικές σύνθετες αντιστάσεις τους είναι $Z_1 = \rho_1\upsilon_1$ και $Z_2 = \rho_2\upsilon_2$ αντίστοιχα.
Ένα προσπίπτον ημιτονοειδές κύμα που οδεύει κατά μήκος της χορδής συναντάει την ασυνέχεια της σύνθετης αντίστασης στη θέση x=0, με αποτέλεσμα ένα μέρος του προσπίπτοντος κύματος να ανακλαστεί και ένα μέρος να μεταδοθεί στην περιοχή με σύνθετη αντίσταση Z_2.

Η κυματοσυνάρτηση του προσπίπτοντος κύματος είναι $y_i(x,t) = Ae^{i(\omega t - k_1 x)}$, δηλαδή ένα κύμα με πλάτος A και συχνότητα ω που οδεύει κατά τη θετική κατεύθυνση x με ταχύτητα υ_1 . Η κυματοσυνάρτηση του ανακλώμενου κύματος είναι $y_r(x,t) = Be^{i(\omega t + k_1 x)}$, δηλαδή ένα κύμα με πλάτος B και συχνότητα ω, που οδεύει κατά την αρνητική κατεύθυνση x με ταχύτητα υ_1. Τέλος η κυματοσυνάρτηση του μεταδιδόμενου κύματος είναι $y_t(x,t) = Ce^{i(\omega t - k_2 x)}$, δηλαδή ένα κύμα με πλάτος C και συχνότητα ω, που οδεύει κατά τη θετική κατεύθυνση x με ταχύτητα υ_2. Παρατηρείται ότι τα τρία κύματα έχουν την ίδια συχνότητα ω, η οποία είναι και η συχνότητα της πηγής που δημιούργησε το προσπίπτον κύμα $y_i(x,t)$, ενώ ο κυματάριθμος είναι διαφορετικός για κύματα τα οποία διαδίδονται σε διαφορετικές περιοχές, δηλαδή τα κύματα $y_i(x,t)$, $y_r(x,t)$ έχουν ίδιο κυματάριθμο k_1 γιατί διαδίδονται στην περιοχή σύνθετης αντίστασης Z_1, ενώ το κύμα $y_t(x,t)$ έχει κυματάριθμο k_2 γιατί διαδίδεται στην περιοχή σύνθετης αντίστασης Z_2.

Για τον προσδιορισμό των συντελεστών ανάκλασης και μετάδοσης πλάτους, δηλαδή των λόγων των πλατών B/A και C/A εφαρμόζονται δύο συνοριακές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται στο σημείο ασυνέχειας της σύνθετης αντίστασης x=0.

α) Η γεωμετρική συνθήκη, ότι η απομάκρυνση είναι η ίδια αμέσως αριστερά και αμέσως δεξιά από το x=0 κάθε χρονική στιγμή, έτσι ώστε να μην υπάρχει ασυνέχεια στην απομάκρυνση δίνει:

$$y_i + y_r = y_t \Rightarrow Ae^{i(\omega t - k_1 x)} + Be^{i(\omega t + k_1 x)} = Ce^{i(\omega t - k_2 x)}$$

Έτσι στο x=0 απαλείφονται οι εκθετικοί όροι και η παραπάνω γίνεται:

$$A+B=C \qquad \textbf{(5-30)}$$

β) Η δυναμική συνθήκη, ότι υπάρχει συνέχεια στην εγκάρσια δύναμη $T(\partial y/\partial x)$ στο x=0 και επομένως η παράγωγος είναι συνεχής δίνει:

$$T\frac{\partial(y_i + y_r)}{\partial x} = T\frac{\partial y_t}{\partial x} \Rightarrow -k_1 TAe^{i(\omega t - k_1 x)} + k_1 TBe^{i(\omega t + k_1 x)} = -k_2 TCe^{i(\omega t - k_2 x)}$$

Έτσι στο x=0 για κάθε t απαλείφονται οι εκθετικοί όροι και η παραπάνω γίνεται:

$$-k_1 TA + k_1 TB = -k_2 TC \Rightarrow -\frac{\omega}{\upsilon_1}TA + \frac{\omega}{\upsilon_1}TB = -\frac{\omega}{\upsilon_2}TC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T}{\upsilon_1}(A-B) = \frac{T}{\upsilon_2}C \Rightarrow Z_1(A-B) = Z_2 C \qquad \textbf{(5-31)}$$

όπου $k_1 = \omega/\upsilon_1$, $k_2 = \omega/\upsilon_2$ είναι οι κυματάριθμοι και $Z_1 = T/\upsilon_1$, $Z_2 = T/\upsilon_2$ είναι οι σύνθετες αντιστάσεις στις δύο περιοχές της χορδής.
Άρα οι εξισώσεις **(5-30)** και **(5-31)** δίνουν τους συντελεστές ανάκλασης και μετάδοσης ως:

Συντελεστής ανάκλασης: $$R = \frac{B}{A} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \qquad \textbf{(5-32)}$$

Συντελεστής μετάδοσης: $$T = \frac{C}{A} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \qquad \textbf{(5-33)}$$

Οι συντελεστές R, T συνδέονται με τη σχέση: T=1+R **(5-34)**

Παρατηρήσεις:

1) Οι συντελεστές R, T δεν εξαρτώνται από το ω και επομένως ισχύουν για κύματα όλων των συχνοτήτων. Επιπλέον οι συντελεστές αυτοί εξαρτώνται αποκλειστικά από τις σύνθετες αντιστάσεις.

2) Αν $z_2 = \infty$ τότε το x=0 είναι ένα σταθερό άκρο της χορδής, γιατί δεν υπάρχει μεταδιδόμενο κύμα (T=0), ενώ R=B/A= -1, δηλαδή το προσπίπτον κύμα ανακλάται εντελώς με αντιστροφή φάσης. Αποτέλεσμα αυτού είναι η δημιουργία στάσιμων κυμάτων.

3) Αν $z_2 = 0$, τότε το x=0 είναι ένα ελεύθερο άκρο της χορδής και είναι R=1 και T=2. Αυτό εξηγεί το τίναγμα στο άκρο ενός μαστιγίου ή στο ελεύθερο άκρο μιας χορδής όταν σε αυτό φτάνει ένα κύμα.

6. Διαμήκη κύματα

Όταν οι ταλαντώσεις του μέσου διάδοσης των κυμάτων γίνονται πάνω στη διεύθυνση διάδοσης των κυμάτων τότε τα κύματα αυτά ονομάζονται **διαμήκη**. Για παράδειγμα όταν ένα κατακόρυφο τεντωμένο ελατήριο τεθεί σε ταλάντωση πάνω-κάτω στο ένα άκρο, κατά μήκος του ελατηρίου διαδίδεται ένα διαμήκες κύμα, αφού οι σπείρες ταλαντώνονται μπροστά-πίσω στη διεύθυνση στην οποία διαδίδεται η διαταραχή κατά μήκος του ελατηρίου. Επίσης τα ηχητικά κύματα σε ένα αέριο είναι διαμήκη κύματα, επειδή τα μόρια του αερίου ταλαντώνονται κατά μήκος της διεύθυνσης διάδοσης του κύματος.
Σε ένα αέριο αν y(x,t) είναι η μετατόπιση ενός μορίου του τότε αποδεικνύεται ότι η y(x,t) ικανοποιεί την κλασική κυματική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \upsilon^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Η ταχύτητα διάδοσης υ ενός διαμήκους κύματος σε αέριο εξαρτάται μόνο από το μέτρο ελαστικότητας B και την πυκνότητα ρ του μέσου και δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad \textbf{(5-35)}$$

Δηλαδή η ταχύτητα διάδοσης των διαμήκων, όπως και των εγκάρσιων κυμάτων, καθορίζεται από τις μηχανικές ιδιότητες του μέσου.
Για ηχητικά κύματα στον αέρα θεωρώντας τον ως ιδανικό αέριο η **(5-35)** παίρνει τη μορφή:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \qquad \textbf{(5-36)}$$

όπου γ είναι ο λόγος Poisson του αέρα, P η πίεση και ρ η πυκνότητα του αέρα.
Όταν η συχνότητα ενός διαμήκους κύματος εμπίπτει στην περιοχή της ανθρώπινης ακοής (από 20 Hz ως 20000 Hz περίπου) ονομάζεται **ήχος** και η περιοχή αυτή **ακουστική περιοχή**. Αν η συχνότητα διαμήκους κύματος είναι κάτω από την ακουστική περιοχή λέγεται **υποηχητικό κύμα**, ενώ αν είναι πάνω από αυτήν λέγεται **υπερηχητικό κύμα**. Η κυματοσυνάρτηση που περιγράφει ένα ηχητικό κύμα, που οδεύει μόνο προς μια κατεύθυνση δίνεται από τη σχέση:

$$P(x,t) = P_o \sin(\omega t - kx) = BkA \sin(\omega t - kx) \qquad \textbf{(5-37)}$$

όπου P_o είναι το πλάτος πίεσης, το οποίο είναι ανάλογο του πλάτους μετατόπισης A, του κυματάριθμου k και του μέτρου ελαστικότητας B.

Παρατηρείται ότι η εξίσωση ενός ηχητικού κύματος εκφράζεται για ευκολία συναρτήσει της μεταβολής της πίεσης αντί της μετατόπισης των σωματίων που μεταβιβάζουν το κύμα.
Όπως και όλα τα άλλα κύματα, τα ηχητικά κύματα μεταφέρουν ενέργεια από μια περιοχή του χώρου σε άλλη. Ορίζεται ως **ένταση I** ενός κύματος ο μέσος χρονικός ρυθμός με τον οποίο μεταφέρεται ενέργεια από το κύμα ανά μονάδα εμβαδού δια μέσω μιας επιφάνειας κάθετης προς την κατεύθυνση διάδοσης, δηλαδή είναι η μέση μεταφερόμενη ισχύς ανά μονάδα εμβαδού. Για ηχητικά κύματα είναι:

$$I = \frac{1}{2}\omega B k A^2 = \frac{P_o^2}{2\sqrt{\rho B}} = \frac{P_o^2}{2\rho\upsilon} \qquad \textbf{(5-38)}$$

Επειδή το ανθρώπινο αυτί είναι ευαίσθητο σε μια εκτεταμένη περιοχή εντάσεως (ακουστική περιοχή), χρησιμοποιείται συνήθως η **λογαριθμική κλίμακα έντασης** ή **κλίμακα decibel**. Η **στάθμη έντασης β** ενός ηχητικού κύματος ορίζεται ως:

$$\beta = 10\ell og\frac{I}{I_o} \quad (\text{dB}) \qquad \textbf{(5-39)}$$

όπου $I_o = 10^{-12}\, W/m^2$ είναι μια ένταση αναφοράς επιλεγμένη στο κατώφλι της ανθρώπινης ακοής στο 1 kHz περίπου. Μονάδες μέτρησης της στάθμης έντασης είναι τα decibels(dB).

✎ **Εφαρμογή**

Δύο ηχητικά κύματα έχουν ακουστότητες που διαφέρουν κατά 10 dB. Βρείτε τους λόγους των εντάσεών τους και των πλατών πιέσεών τους.

Λύση

Η διαφορά της ακουστότητας των δύο ηχητικών κυμάτων είναι:

$$\beta_1 - \beta_2 = 10\text{dB} \overset{(5-39)}{\Rightarrow} 10\ell og\frac{I_1}{I_o} - 10\ell og\frac{I_2}{I_o} = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10\ell og\frac{I_1/I_o}{I_2/I_o} = 10 \Rightarrow \ell og\frac{I_1}{I_2} = 1 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = 10$$

Σύμφωνα με τη σχέση **(5-38)** ο παραπάνω λόγος των εντάσεων γράφεται:

$$\frac{P_{o1}^2/2\rho\upsilon}{P_{o2}^2/2\rho\upsilon} = 10 \Rightarrow \frac{P_{o1}^2}{P_{o2}^2} = 10 \Rightarrow \frac{P_{o1}}{P_{o2}} = \sqrt{10}$$