ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 1

Σώμα εκτελεί ευθύγραμμη επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση $\alpha = -k\sqrt{\upsilon}$, όπου k θετική σταθερά και υ το μέτρο της ταχύτητας.
Αν για $t = 0$ είναι $\upsilon = \upsilon_o$ και $x = 0$,να υπολογιστούν:
α) η ταχύτητα υ ως συνάρτηση του χρόνου.
β) η ταχύτητα υ ως συνάρτηση του διαστήματος x που διανύει το σώμα
γ) το διάστημα x που διανύει το σώμα ως συνάρτηση του χρόνου
δ) ο ολικός χρόνος $t_{ολ}$ που απαιτείται για να σταματήσει το σώμα και το ολικό διάστημα $x_{ολ}$ που θα έχει διανύσει.

(Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Κατατακτήριες εξετάσεις από Α.Ε.Ι. για το 3º εξάμηνο Πολιτικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση

α) $$\alpha = \frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow -k\sqrt{\upsilon} = \frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow \int_{\upsilon_o}^{\upsilon} \frac{d\upsilon}{\sqrt{\upsilon}} = -k\int_0^t dt \Rightarrow \left[2\sqrt{\upsilon}\right]_{\upsilon_0}^{\upsilon} = -k\left[t\right]_0^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(\sqrt{\upsilon} - \sqrt{\upsilon_o}\right) = -kt \Rightarrow \sqrt{\upsilon} = \sqrt{\upsilon_o} - \frac{k}{2}t \Rightarrow \upsilon(t) = \left(\sqrt{\upsilon_o} - \frac{k}{2}t\right)^2$$

β) $$\alpha = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow -k\sqrt{\upsilon} = \frac{d\upsilon}{dx}\upsilon \Rightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \sqrt{\upsilon}d\upsilon = -k\int_0^x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\left[\upsilon^{3/2}\right]_{\upsilon_0}^{\upsilon} = -k\left[x\right]_0^x \Rightarrow \frac{2}{3}\left(\upsilon^{3/2} - \upsilon_o^{3/2}\right) = -kx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon^{3/2} = \upsilon_o^{3/2} - \frac{3}{2}kx \Rightarrow \upsilon(x) = \left(\upsilon_o^{3/2} - \frac{3}{2}kx\right)^{2/3}$$

γ) $$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \left(\sqrt{\upsilon_o} - \frac{k}{2}t\right)^2 = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = \left(\sqrt{\upsilon_o} - \frac{k}{2}t\right)^2 dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t \left(\upsilon_o + \frac{k^2}{4}t^2 - k\sqrt{\upsilon_o}\,t\right)dt \Rightarrow x(t) = \upsilon_o t + \frac{k^2}{12}t^3 - \frac{k}{2}\sqrt{\upsilon_o}\,t^2$$

δ) Ο ολικός χρόνος $t_{ολ}$ και το ολικό διάστημα $x_{ολ}$ μέχρι να σταματήσει το σώμα υπολογίζονται εύκολα με μηδενισμό των συναρτήσεων της ταχύτητας $\upsilon(t)$ και $\upsilon(x)$:

$$\upsilon(t) = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{\upsilon_o} - \frac{k}{2}t_{ολ}\right)^2 = 0 \Rightarrow t_{ολ} = \frac{2\sqrt{\upsilon_o}}{k}$$

$$\upsilon(x) = 0 \Rightarrow \left(\upsilon_o^{3/2} - \frac{3}{2}kx_{ολ}\right)^{2/3} = 0 \Rightarrow x_{ολ} = \frac{2\upsilon_o^{3/2}}{3k}$$

ΘΕΜΑ 2

Η επιτάχυνση ενός κινητού είναι $\alpha = 32 - 4\upsilon$. Αν για $t = 0$ είναι $\upsilon_o = 4\text{m}/\text{sec}$ και $x = 0$ να υπολογιστούν :

α) η ταχύτητα υ συναρτήσει του χρόνου
β) το διάστημα x συναρτήσει του χρόνου
γ) το διάστημα x συναρτήσει της ταχύτητας.

(Κατατακτήριες εξετάσεις από Α.Τ.Ε.Ι. για Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και από Α.Τ.Ε.Ι. για Τοπογράφων Μηχανικών).

Λύση

α) $$\alpha = \frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow 32 - 4\upsilon = \frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow \int_4^{\upsilon} \frac{d\upsilon}{32 - 4\upsilon} = \int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{4}\ell n(32 - 4\upsilon)\Big|_4^{\upsilon} = t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}\ell n(32 - 4\upsilon) + \frac{1}{4}\ell n16 = t \Rightarrow \ell n\frac{32 - 4\upsilon}{16} = -4t \Rightarrow \frac{32 - 4\upsilon}{16} = e^{-4t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 32 - 4\upsilon = 16e^{-4t} \Rightarrow 4\upsilon = 32 - 16e^{-4t} \Rightarrow \upsilon(t) = 8 - 4e^{-4t}$$

β)

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} \Rightarrow 8 - 4e^{-4t} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t (8 - 4e^{-4t})dt \Rightarrow x = \left[\ 8t + e^{-4t}\right]_0^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = 8t + e^{-4t} - 1$$

γ) $$\alpha = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\upsilon \Rightarrow 32 - 4\upsilon = \frac{d\upsilon}{dx}\upsilon \Rightarrow \int_0^x dx = \int_4^{\upsilon} \frac{\upsilon d\upsilon}{32 - 4\upsilon} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{4}\int_4^{\upsilon} \frac{32 - 4\upsilon + 32}{32 - 4\upsilon} d\upsilon = -\frac{1}{4}\int_4^{\upsilon}\left(1 - \frac{32}{32 - 4\upsilon}\right)d\upsilon =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\upsilon - \frac{32}{(-4)}\ell n(32 - 4\upsilon)\right]_4^{\upsilon} = -\frac{1}{4}\left[\upsilon + 8\ell n(32 - 4\upsilon)\right]_4^{\upsilon} =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\upsilon + 8\ell n(32 - 4\upsilon) - 4 - 8\ell n16\right) = -\frac{\upsilon}{4} + 1 - 2\ell n\frac{32 - 4\upsilon}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(\upsilon) = 1 - \frac{\upsilon}{4} - 2\ell n\frac{8 - \upsilon}{4}$$

ΘΕΜΑ 3

Σώμα κινείται σε οριζόντια ευθεία με επιτάχυνση που δίνεται από τη σχέση $\alpha = 6\sqrt[3]{x}\ \ m/sec^2$. Αν για $t = 2\sec$ ισχύει $\upsilon_o = 27m/sec$ και $x_o = 27m$, να υπολογιστούν η ταχύτητα, η επιτάχυνση του σώματος και το διάστημα που διήνυσε συναρτήσει του χρόνου.

(Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση

$$\alpha = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow 6\sqrt[3]{x} = \frac{d\upsilon}{dx}\upsilon \Rightarrow \int_{27}^{\upsilon} \upsilon d\upsilon = 6\int_{27}^{x} x^{1/3}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\upsilon^2}{2}\right]_{27}^{\upsilon} = 6\frac{3}{4}\left[x^{4/3}\right]_{27}^{x} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\upsilon^2 - 27^2\right) = \frac{9}{2}\left(x^{4/3} - 27^{4/3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon^2 - 27^2 = 9x^{4/3} - 9\cdot 3^4 = 9x^{4/3} - 3^2\cdot 3^4 = 9x^{4/3} - 3^6 = 9x^{4/3} - (3^3)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon^2 - 27^2 = 9x^{4/3} - 27^2 \Rightarrow \upsilon^2 = 9x^{4/3} \Rightarrow \upsilon(x) = 3x^{2/3}$$

Αλλά:

$$\upsilon(x) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow 3x^{2/3} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{27}^{x} \frac{dx}{x^{2/3}} = 3\int_{2}^{t} dt \Rightarrow \int_{27}^{x} x^{-2/3}dx = 3\left[x^{1/3}\right]_{27}^{x} = 3[t]_2^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{1/3} - 27^{1/3} = t - 2 \Rightarrow x^{1/3} - 3 = t - 2 \Rightarrow x^{1/3} = t + 1 \Rightarrow x(t) = (t+1)^3$$

Κι επομένως:

$$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} = 3(t+1)^2 \qquad \text{και} \qquad \alpha(t) = \frac{d\upsilon}{dt} = 6(t+1)$$

ΘΕΜΑ 4

Σωματίδιο κινείται ευθύγραμμα και υφίσταται επιβράδυνση $\alpha=-k\upsilon^n$, όπου υ η ταχύτητά του. Δείξτε ότι αν $n<1$ το σωματίδιο θα ηρεμήσει σε απόσταση $x=\dfrac{\upsilon_o^{2-n}}{k(2-n)}$ από το σημείο εκκίνησης σε χρόνο $t=\dfrac{\upsilon_o^{1-n}}{k(1-n)}$, όπου υ_o η αρχική του ταχύτητα.

(Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π., Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)

Λύση

Είναι:

$$\alpha=\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt}\Rightarrow -k\upsilon^n=\frac{d\upsilon}{dx}\upsilon\Rightarrow\frac{d\upsilon}{dx}=-k\upsilon^{n-1}\Rightarrow\int_{\upsilon_o}^{0}\frac{d\upsilon}{\upsilon^{n-1}}=-k\int_0^x dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\frac{\upsilon^{1-n+1}}{1-n+1}\right|_{\upsilon_o}^{0}=\left.\frac{\upsilon^{2-n}}{2-n}\right|_{\upsilon_o}^{0}=-\frac{\upsilon_o^{2-n}}{2-n}=-kx\Rightarrow x=\frac{\upsilon_o^{2-n}}{k(2-n)}$$

Επίσης:

$$\alpha=\frac{d\upsilon}{dt}=-k\upsilon^n\Rightarrow\int_{\upsilon_o}^{0}\frac{d\upsilon}{\upsilon^n}=-k\int_0^t dt\Rightarrow\left.\frac{\upsilon^{-n+1}}{-n+1}\right|_{\upsilon_o}^{0}=-\frac{\upsilon^{1-n}}{1-n}=-kt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{\upsilon_o^{1-n}}{k(1-n)}$$

ΘΕΜΑ 5

Σωματίδιο αρχίζει να κινείται ευθύγραμμα κι ομαλά. Όταν διανύσει απόσταση L αρχίζει να κινείται με σταθερή επιβράδυνση α μέχρι να σταματήσει. Πόση πρέπει να είναι η αρχική ταχύτητα του σωματιδίου ώστε ο ολικός χρόνος της κίνησής του να είναι ο ελάχιστος;

(Τμήμα Φυσικής Αθήνας)

Λύση

Ο χρόνος t_1 που το σωματίδιο κινείται με σταθερή ταχύτητα υ για απόσταση L είναι:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^L dx = \upsilon \int_0^{t_1} dt \Rightarrow L = \upsilon t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{L}{\upsilon} \qquad \textbf{(1)}$$

Στη συνέχεια από τον ορισμό της επιβράδυνσης θα υπολογιστεί ο χρόνος που απαιτείται μέχρι να σταματήσει το σωματίδιο, συναρτήσει της αρχικής του ταχύτητας υ.

$$\alpha = -\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow \int_\upsilon^0 d\upsilon = -\alpha \int_{t_1}^t dt \Rightarrow -\upsilon = -\alpha(t - t_1) \overset{(1)}{\Rightarrow} \upsilon = \alpha\left(t - \frac{L}{\upsilon}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon = \alpha t - \frac{L\alpha}{\upsilon} \Rightarrow t = \frac{\upsilon}{\alpha} + \frac{L}{\upsilon}$$

Τέλος για τον υπολογισμό της αρχικής ταχύτητας u ώστε ο ολικός χρόνος κίνησης να είναι ελάχιστος βρίσκουμε το σημείο ελαχίστου της παραπάνω συνάρτησης.
Δηλαδή:

$$\frac{dt}{d\upsilon} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} - \frac{L}{\upsilon^2} = 0 \Rightarrow \frac{L}{\upsilon^2} = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \upsilon^2 = L\alpha \Rightarrow \upsilon = \sqrt{L\alpha}$$

Κι επειδή σύμφωνα με το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου:

$$\frac{d^2t}{d\upsilon^2} = \frac{2L}{\upsilon^3} \qquad \text{και} \qquad \left.\frac{d^2t}{d\upsilon^2}\right|_{\upsilon=\sqrt{L\alpha}} = \frac{2L}{(L\alpha)^{3/2}} > 0$$

για $\upsilon = \sqrt{L\alpha}$ ο χρόνος t είναι ελάχιστος.

ΘΕΜΑ 6

Το διάνυσμα θέσης ενός κινητού δίνεται από τη σχέση:
$\vec{r} = \alpha t\hat{x} - bt^3\hat{y}$, όπου α και b σταθερές. Να υπολογιστούν :
α) η εξίσωση τροχιάς
β) η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ και η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ συναρτήσει του χρόνου , καθώς και τα μέτρα τους
γ) η χρονική εξάρτηση της γωνίας φ μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{\upsilon}$ και $\vec{\alpha}$.

(Κατατακτήριες εξετάσεις από Α.Ε.Ι. για το 3ο και 5ο εξάμηνο Πολιτικών Μηχανικών Ε.Μ.Π., Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση

α) Η εξίσωση τροχιάς υπολογίζεται με απαλοιφή του χρόνου από τις συνιστώσες της θέσης. Δηλαδή:

$$x = \alpha t \Rightarrow t = \frac{x}{\alpha} \qquad \textbf{(1)}$$

και $y = -bt^3 \overset{(1)}{\Rightarrow} y = -\frac{b}{\alpha^3}x^3$, η οποία παριστάνει υπερβολή.

β) Η ταχύτητα είναι:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \alpha\hat{x} - 3bt^2\hat{y} \qquad \text{με μέτρο} \quad \upsilon = \sqrt{\alpha^2 + 9b^2t^4}$$

ενώ η επιτάχυνση είναι:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -6bt\hat{y} \qquad \text{με μέτρο} \quad \alpha = \sqrt{36b^2t^2} = 6bt$$

γ) Η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{\upsilon}$ και $\vec{\alpha}$ υπολογίζεται μέσω του εσωτερικού τους γινομένου. Από το γεωμετρικό ορισμό του εσωτερικού τους γινομένου ισχύει:

$$\vec{\upsilon}\cdot\vec{\alpha} = \upsilon\alpha\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\vec{\upsilon}\cdot\vec{\alpha}}{\upsilon\alpha} = \frac{\vec{\upsilon}\cdot\vec{\alpha}}{6bt\sqrt{\alpha^2 + 9b^2t^4}} \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά από τον αλγεβρικό ορισμό του εσωτερικού γινομένου είναι:

$$\vec{\upsilon}\cdot\vec{\alpha} = (\alpha\hat{x} - 3bt^2\hat{y})\cdot(-6bt\hat{y}) = \alpha\cdot 0 + (-3bt^2)\ (-6bt) = 18b^2t^3$$

Άρα η **(1)** δίνει :

$$\cos\varphi = \frac{18b^2t^3}{6bt\sqrt{\alpha^2+9b^2t^4}} = \frac{3bt^2}{\sqrt{\alpha^2+9b^2t^4}} \Rightarrow \varphi(t) = \alpha rc\cos\left(\frac{3bt^2}{\sqrt{\alpha^2+9b^2t^4}}\right)$$

ΘΕΜΑ 7

Ένα σώμα κινείται σε τροχιά $y = x^2$ με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_x = 3\text{m/sec}$ για κάθε χρονική στιγμή t. Να βρεθεί το μέτρο και η κατεύθυνση της ταχύτητας και της επιτάχυνσης για x = 2/3 m.

(Κατατακτήριες εξετάσεις από Α.Τ.Ε.Ι. για Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και από Α.Τ.Ε.Ι. για Χημικών Μηχανικών)

Λύση

Η ταχύτητα διανυσματικά δίνεται από τη σχέση :

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x \hat{x} + \upsilon_y \hat{y}$$

όπου $\upsilon_x = 3\text{m/s}$ και $\upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(x^2) = 2x\frac{dx}{dt} = 2x\upsilon_x = 6x \text{ m/sec}$

Άρα: $\vec{\upsilon} = 3\hat{x} + 6x\hat{y}$ και το μέτρο της είναι:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{9 + 36x^2}$$

Επομένως για x = 2/3 m είναι : $\upsilon = \sqrt{9 + 36\frac{4}{9}} = \sqrt{25} \Rightarrow \upsilon = 5 \text{ m/sec}$

Και η κατεύθυνση της ταχύτητας τη στιγμή αυτή σχηματίζει γωνία με τον άξονα x:

$$\tan\theta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \frac{6x}{3} = 2x = 2\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(4/3) = 53°$$

Επίσης η επιτάχυνση είναι :

$$\vec{\alpha} = \alpha_x \hat{x} + \alpha_y \hat{y}$$

όπου $\alpha_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = 0$ (αφού $\upsilon_x = \sigma\tau\alpha\theta.$) και

$$\alpha_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d}{dt}(6x) = 6\frac{dx}{dt} = 6\upsilon_x = 6\cdot 3 = 18 \text{ m/sec}^2$$

Άρα: $\vec{\alpha} = 18\hat{y}$ με μέτρο $\alpha = 18\text{m/sec}^2$ και κατεύθυνση παράλληλη πάντα προς τον άξονα y.

ΘΕΜΑ 8

Οι συνιστώσες της ταχύτητας σωματιδίου που κινείται στο επίπεδο είναι $\upsilon_x = 3\cos t$ και $\upsilon_y = 4\sin t$. Αν η θέση του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $\vec{r}_o = 3\hat{y}$ να υπολογιστεί η επιτάχυνση του $\vec{\alpha}$ τη χρονική στιγμή $t = \pi/4$ sec και η εξίσωση τροχιάς.

(Κατατακτήριες εξετάσεις από Α.Τ.Ε.Ι. για Χημικό)

Λύση

Είναι: $\alpha_x = \dfrac{d\upsilon_x}{dt} = -3\sin t$ και $\alpha_y = \dfrac{d\upsilon_y}{dt} = 4\cos t$

Άρα: $\vec{\alpha} = -3\sin t\hat{x} + 4\cos t\hat{y}$

Για $t = \pi/4$ sec: $\vec{\alpha} = -3\sin\dfrac{\pi}{4}\hat{x} + 4\cos\dfrac{\pi}{4}\hat{y} = -3\dfrac{\sqrt{2}}{2}\hat{x} + 2\sqrt{2}\hat{y}$

Με μέτρο : $\alpha = \sqrt{\dfrac{9}{2} + 8} = \sqrt{\dfrac{25}{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$ m/sec^2

Επίσης:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = \upsilon_x dt \Rightarrow \int_0^x dx = 3\int_0^t \cos t dt \Rightarrow x = 3\sin t \qquad \textbf{(1)}$$

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow dy = \upsilon_y dt \Rightarrow \int_3^y dy = 4\int_0^t \sin t dt \Rightarrow y - 3 = 4[-\cos t]_0^t =$$

$$= 4(-\cos t + 1) \Rightarrow y = 7 - 4\cos t \qquad \textbf{(2)}$$

Η εξίσωση τροχιάς υπολογίζεται με απαλοιφή του χρόνου από τις σχέσεις **(1)** και **(2)**:

(1) $\rightarrow \sin t = \dfrac{x}{3} \Rightarrow \sin^2 t = \dfrac{x^2}{9}$

(2) $\rightarrow \cos t = \frac{y-7}{-4} \Rightarrow \cos^2 t = \frac{(y-7)^2}{16}$

Προσθέτοντας τις παραπάνω κατά μέλη προκύπτει η εξίσωση τροχιάς:

$\frac{x^2}{9} + \frac{(y-7)^2}{16} = 1$, η οποία παριστάνει έλλειψη με κέντρο K(0, 7).

ΘΕΜΑ 9

Σωματίδιο κινείται στο επίπεδο xy , έτσι ώστε οι συντεταγμένες του να δίνονται από τις σχέσεις : $x = kt$ και $y = kt(1-nt)$, όπου k και n γνωστές σταθερές.
Να υπολογιστούν:
α) Η εξίσωση τροχιάς.
β) Η ταχύτητα και η επιτάχυνση ως συναρτήσεις του χρόνου.
γ) Ο χρόνος τ που απαιτείται για να γίνει η γωνία μεταξύ ταχύτητας κι επιτάχυνσης ίση με π/4.

(Τμήμα Φυσικής Αθήνας)

Λύση

α) $x = kt \Rightarrow t = \dfrac{x}{k}$

Κι επομένως : $y = kt(1-nt) = k\dfrac{x}{k}\left(1 - n\dfrac{x}{k}\right) \Rightarrow y = x - \dfrac{n}{k}x^2$ (παραβολή)

β) $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\hat{x} + \dfrac{dy}{dt}\hat{y} = k\hat{x} + k(1-2nt)\hat{y}$

με μέτρο $\upsilon = \sqrt{k^2 + k^2(1-2nt)^2} = k\sqrt{1+(1-2nt)^2}$

$\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = 0\hat{x} - 2kn\hat{y} = -2kn\hat{y}$ με μέτρο $\alpha = 2kn$

γ) Από το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\upsilon}$ και $\vec{\alpha}$ προκύπτει:

$$\vec{\upsilon}\cdot\vec{\alpha} = \upsilon\alpha\cos\varphi$$

Αλλά $\vec{\upsilon}\cdot\vec{\alpha} = [k\hat{x} + k(1-2nt)\hat{y}]\cdot(-2kn\hat{y}) = -2k^2n(1-2nt)$

Άρα: $-2k^2n(1-2nt) = 2k^2n\sqrt{1+(1-2nt)^2}\cos\varphi \Rightarrow$

$$\Rightarrow -(1-2nt) = \sqrt{1+(1-2nt)^2}\cos\varphi$$

Για $t = \tau$ είναι $\varphi = \pi/4$ και η παραπάνω γίνεται:

$$-(1-2n\tau)=\sqrt{1+(1-2n\tau)^2}\cos\frac{\pi}{4}\Rightarrow(1-2n\tau)^2=\left[1+(1-2n\tau)^2\right]\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+(1-2n\tau)^2\right]\Rightarrow(1-2n\tau)^2=1\Rightarrow 1+4n^2\tau^2-4n\tau=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4n^2\tau^2-4n\tau=0\Rightarrow 4n\tau(n\tau-1)=0\Rightarrow n\tau-1=0\Rightarrow\tau=\frac{1}{n}$$

ΘΕΜΑ 10

Οι εξισώσεις κίνησης ενός σωματιδίου δίνονται από τις σχέσεις:
$x = t^2$ και $y = t^4 - 2t^2 - 3$

α) Να γραφεί η εξίσωση τροχιάς του και να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του τη χρονική στιγμή $t = 2\,\text{sec}$.

β) Να υπολογιστούν η επιτρόχια και η κεντρομόλος επιτάχυνση την ίδια χρονική στιγμή.

(Κατατακτήριες εξετάσεις από Α.Τ.Ε.Ι. για Ηλεκτρολόγων Μηχανικών, Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.).

Λύση

α) Με απαλοιφή του χρόνου από τις δοθείσες συναρτήσεις $x(t)$ και $y(t)$ προκύπτει η εξίσωση τροχιάς $y = x^2 - 2x - 3$, η οποία παριστάνει παραβολή.

Η ταχύτητα είναι:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} = 2t\hat{x} + (4t^3 - 4t)\hat{y}$$

με μέτρο : $\upsilon = \sqrt{4t^2 + (4t^3 - 4t)^2}$

Για $t = 2$ sec : $\vec{\upsilon} = 4\hat{x} + 24\hat{y}$ και $\upsilon = \sqrt{16 + 576} = \sqrt{592} = 24{,}3$ m/sec

Η επιτάχυνση είναι :

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = 2\hat{x} + (12t^2 - 4)\hat{y} \quad \text{με μέτρο} \quad \alpha = \sqrt{4 + (12t^2 - 4)^2}$$

Για $t = 2\,\text{sec}$: $\vec{\alpha} = 2\hat{x} + 44\hat{y}$ και $\alpha = \sqrt{4 + 1936} = \sqrt{1940} = 44{,}04$ m/sec^2

β) Η επιτρόχια επιτάχυνση είναι:

$$\alpha_\varepsilon = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sqrt{4t^2 + (4t^3 - 4t)^2}\right] = \frac{8t + 2(4t^3 - 4t)(12t^2 - 4)}{2\sqrt{4t^2 + (4t^3 - 4t)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_\varepsilon = \frac{4t + (4t^3 - 4t)(12t^2 - 4)}{\sqrt{4t^2 + (4t^3 - 4t)^2}}$$

Για $t = 2\,\text{sec}$: $\alpha_\varepsilon = \dfrac{8 + 24 \cdot 44}{\sqrt{16 + 24^2}} = \dfrac{1064}{\sqrt{592}} = 43{,}8$ m/sec^2

Η κεντρομόλος επιτάχυνση τη χρονική στιγμή $t = 2\sec$ βρίσκεται από τη σχέση:

$$\alpha = \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2} = \sqrt{\alpha_\varepsilon^2 + \alpha_\kappa^2} \Rightarrow \sqrt{1940} = \sqrt{\alpha_\varepsilon^2 + \alpha_\kappa^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1940 = 1918{,}44 + \alpha_\kappa^2 \Rightarrow \alpha_\kappa^2 = 1940 - 1918{,}44 = 21{,}56 \Rightarrow \alpha_\kappa = 4{,}64\ \mathrm{m/sec^2}$$

ΘΕΜΑ 11

Οι εξισώσεις κίνησης ενός σώματος είναι:
$x = 2t^3 - 3t^2$ και $y = t^2 - 2t + 1$.

α) Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του συναρτήσει του χρόνου.
β) Για ποιες τιμές του χρόνου t η ταχύτητα μηδενίζεται;
γ) Για ποιες τιμές του χρόνου t η επιτάχυνση είναι παράλληλη στον άξονα y;
δ) Να βρεθούν η επιτρόχια και κεντρομόλος επιτάχυνση τη χρονική στιγμή $t = 0$.

(Κατατακτήριες εξετάσεις από Α.Τ.Ε.Ι. για Χημικών Μηχανικών)

Λύση

α) $$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} = (6t^2 - 6t)\hat{x} + (2t-2)\hat{y}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = (12t-6)\hat{x} + 2\hat{y}$$

β) Η ταχύτητα μηδενίζεται όταν είναι $\upsilon_x = 0$ και $\upsilon_y = 0$. Δηλαδή:

$$\upsilon_x = 0 \Rightarrow 6t^2 - 6t = 0 \Rightarrow 6t(t-1) = 0 \Rightarrow t = 0 \quad \text{ή} \quad t = 1\,\text{sec}$$

$$\upsilon_y = 0 \Rightarrow 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1\,\text{sec}$$

Άρα για $t = 1\,\text{sec}$ η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ είναι μηδέν.

γ) Η επιτάχυνση είναι παράλληλη στον άξονα y όταν:

$$\alpha_x = 0 \Rightarrow 12t - 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{6}{12} \Rightarrow t = 0{,}5\,\text{sec}$$

δ) Το μέτρο της ταχύτητας είναι:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{36t^2(t-1)^2 + 4(t-1)^2} = \sqrt{(t-1)^2(36t^2+4)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon = (t-1)\sqrt{36t^2+4}$$

Άρα η επιτρόχια επιτάχυνση είναι:

$$\alpha_\varepsilon = \frac{d\upsilon}{dt} = \sqrt{36t^2+4} + \frac{(t-1)\cdot 72t}{2\sqrt{36t^2+4}} = \frac{(t-1)(36t^2+4) + (t-1)^2 \cdot 36t}{(t-1)\sqrt{36t^2+4}}$$

Για $t=0$: $\alpha_\varepsilon = \dfrac{-4}{-2} = 2\ \text{m/sec}^2$

Κι επειδή το μέτρο της επιτάχυνσης είναι : $\alpha = \sqrt{\alpha_x^2+\alpha_y^2} = \sqrt{(12t-6)^2+4}$

Για $t=0$: $\alpha = \sqrt{40}\ \text{m/sec}^2$

Επομένως :

$$\alpha = \sqrt{\alpha_\kappa^2+\alpha_\varepsilon^2} \Rightarrow \alpha^2 = \alpha_\kappa^2+\alpha_\varepsilon^2 \Rightarrow \alpha_\kappa^2 = \alpha^2-\alpha_\varepsilon^2 = 40-4=36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_\kappa = 6\ \text{m/sec}^2$$

ΘΕΜΑ 12

Το διάνυσμα θέσης κινούμενου σωματιδίου δίνεται από τη σχέση:
$\vec{r} = \alpha\cos\omega t\hat{x} + \alpha\sin\omega t\hat{y}$, όπου α και ω θετικές σταθερές.

α) Να δειχθεί ότι το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα κάθετο στο διάνυσμα θέσης.

β) Να δειχθεί ότι το διάνυσμα της επιτάχυνσης κατευθύνεται πάντοτε προς την αρχή των συντεταγμένων και είναι ανάλογο του διανύσματος θέσης.

(Κατατακτήριες εξετάσεις από Α.Τ.Ε.Ι. για Χημικών Μηχανικών)

Λύση

α) Η ταχύτητα του σωματιδίου είναι:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\alpha\omega\sin\omega t\hat{x} + \alpha\omega\cos\omega t\hat{y}$$

Από τον αλγεβρικό ορισμό του εσωτερικού γινομένου των διανυσμάτων $\vec{r}$ και $\vec{\upsilon}$ προκύπτει:

$$\vec{r}\cdot\vec{\upsilon} = \left(\alpha\cos\omega t\hat{x} + \alpha\sin\omega t\hat{y}\right)\cdot\left(-\alpha\omega\sin\omega t\hat{x} + \alpha\omega\cos\omega t\hat{y}\right) =$$

$$= -\alpha^2\omega\cos\omega t\sin\omega t + \alpha^2\omega\sin\omega t\cos\omega t = 0$$

Συνεπώς σύμφωνα με το κριτήριο καθετότητας τα διανύσματα $\vec{r}$ και $\vec{\upsilon}$ είναι πάντα κάθετα μεταξύ τους.

β) Η επιτάχυνση του σωματιδίου είναι:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -\alpha\omega^2\cos\omega t\hat{x} - \alpha\omega^2\sin\omega t\hat{y} = -\omega^2\left(\alpha\cos\omega t\hat{x} + \alpha\sin\omega t\hat{y}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha} = -\omega^2\vec{r}$$

Άρα η επιτάχυνση είναι ανάλογη του διανύσματος θέσης και αντίθετης φοράς, δηλαδή κατευθύνεται πάντα προς την αρχή των συντεταγμένων.

ΘΕΜΑ 13

Σωματίδιο κινείται επιταχυνόμενο σε κυκλική τροχιά ακτίνας R με σταθερή επιτρόχια επιτάχυνση α_ε.

α) Να βρεθεί ο χρόνος τ που απαιτείται ώστε η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ και της επιτάχυνσης $\vec{\alpha}$ να γίνει φ.

β) Να βρεθεί το διάστημα s που διανύει το σωματίδιο στο χρόνο αυτό.

(Τμήμα Φυσικής Αθήνας)

Λύση

α) Από το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\upsilon}$ και $\vec{\alpha}$ προκύπτει:

$$\vec{\upsilon}\cdot\vec{\alpha} = \upsilon\alpha\cos\varphi \qquad \textbf{(1)}$$

Κι επειδή $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_\varepsilon + \vec{\alpha}_\kappa$ ισχύει:

$$\vec{\upsilon}\cdot\vec{\alpha} = \vec{\upsilon}\cdot\left(\vec{\alpha}_\varepsilon + \vec{\alpha}_\kappa\right) = \vec{\upsilon}\cdot\vec{\alpha}_\varepsilon + \vec{\upsilon}\cdot\vec{\alpha}_\kappa = \upsilon\alpha_\varepsilon \qquad \textbf{(2)}$$

(αφού $\vec{\upsilon}\,//\,\vec{\alpha}_\varepsilon$ και $\vec{\upsilon}\perp\vec{\alpha}_\kappa \Rightarrow \vec{\upsilon}\cdot\vec{\alpha}_\kappa = 0$)

Άρα από τις **(1)** και **(2)**:

$$\upsilon\alpha_\varepsilon = \upsilon\alpha\cos\varphi \Rightarrow \alpha_\varepsilon = \alpha\cos\varphi \qquad \textbf{(3)}$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης είναι:

$$\alpha = \sqrt{\alpha_\kappa^2 + \alpha_\varepsilon^2} = \sqrt{\frac{\upsilon^4}{R^2} + \alpha_\varepsilon^2}$$

Η ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή τ, που η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{\upsilon}$ και $\vec{\alpha}$ γίνεται φ υπολογίζεται μέσω της επιτρόχιας επιτάχυνσης:

$$\alpha_\varepsilon = \frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow \int_0^{\upsilon} d\upsilon = \alpha_\varepsilon \int_0^{\tau} dt \Rightarrow \upsilon = \alpha_\varepsilon \tau$$

Άρα: $\alpha = \sqrt{\dfrac{\alpha_\varepsilon^4\tau^4}{R^2} + \alpha_\varepsilon^2}$ και η **(3)** δίνει:

$$\alpha_\varepsilon = \sqrt{\frac{\alpha_\varepsilon^4\tau^4}{R^2} + \alpha_\varepsilon^2}\,\cos\varphi \Rightarrow \alpha_\varepsilon^2 = \left(\frac{\alpha_\varepsilon^4\tau^4}{R^2} + \alpha_\varepsilon^2\right)\cos^2\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{\alpha_\varepsilon^2 \tau^4}{R^2} + 1\right)\cos^2\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_\varepsilon^2 \tau^4}{R^2} = \frac{1}{\cos^2\varphi} - 1 = \frac{1-\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} \Rightarrow \frac{\alpha_\varepsilon^2 \tau^4}{R^2} = \tan^2\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau^4 = \frac{R^2\tan^2\varphi}{\alpha_\varepsilon^2} \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{R\tan\varphi}{\alpha_\varepsilon}} \qquad \textbf{(4)}$$

β) Επειδή η επιτρόχιος επιτάχυνση είναι σταθερή, η ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου δίνεται από τη σχέση: $\upsilon(t) = \alpha_\varepsilon t$.

Κι έτσι από τον ορισμό της ταχύτητας προκύπτει:

$$\upsilon(t) = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = \upsilon(t)dt \Rightarrow \int_0^s ds = \alpha_\varepsilon \int_0^\tau tdt \Rightarrow s = \alpha_\varepsilon \frac{\tau^2}{2} \overset{(4)}{=} \frac{\alpha_\varepsilon}{2}\frac{R\tan\varphi}{\alpha_\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = \frac{R\tan\varphi}{2}$$

ΘΕΜΑ 14

Η τροχιά (διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα) που διαγράφει ένα σημείο M(x,y) της περιφέρειας ενός τροχού ακτίνας R, κατά την κύλισή του σε οριζόντια επιφάνεια στην κατεύθυνση $\hat{x}$ με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω, περιγράφεται από τις παραμετρικές εξισώσεις της κυκλοειδούς καμπύλης: $x = R(\omega t - \sin\omega t), y = R(1-\cos\omega t)$, όπου t ο χρόνος.

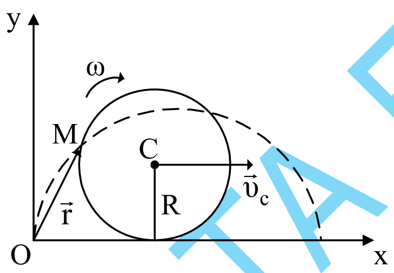
α) Βρείτε την ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ και την επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ του σημείου M, ως συναρτήσεις του χρόνου.

β) Να δείξετε ότι αν το M αποτελεί σημείο επαφής του τροχού, δηλαδή M(2kπR,0) όπου k ακέραιος, τότε αυτό θα βρίσκεται στιγμιαία σε ηρεμία κατά τη διεύθυνση του άξονα x.

γ) Βρείτε την επιτρόχιο α_ε και την κεντρομόλο α_κ επιτάχυνση του σημείου M(x,y) ως συναρτήσεις του χρόνου. Σε ποιους χρόνους τα μέτρα των συνιστωσών αυτών γίνονται ίσα;

(Τμήμα Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



α) Είναι: $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\hat{x} + \dfrac{dy}{dt}\hat{y} \Rightarrow$

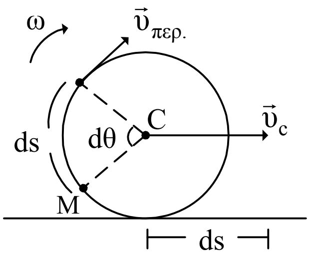
$$\Rightarrow \vec{\upsilon} = \omega R(1-\cos\omega t)\hat{x} + \omega R\sin\omega t\hat{y}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \omega^2 R\sin\omega t\hat{x} + \omega^2 R\cos\omega t\hat{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha} = \omega^2 R(\sin\omega t\hat{x} + \cos\omega t\hat{y})$$

β) Ο τροχός εκτελεί συγχρόνως δύο κινήσεις: μια περιστροφική με γωνιακή ταχύτητα ω κι επομένως κάθε σημείο της περιφέρειας εκτελεί κυκλική κίνηση με γραμμική ταχύτητα $\upsilon_{\pi\varepsilon\rho} = \omega R$ και μια μεταφορική κίνηση κατά την οποία το κέντρο μάζας του μετατοπίζεται με γραμμική ταχύτητα υ_c (δηλαδή εκτελεί σύνθετη κίνηση ή κύλιση). Συνεπώς η γραμμική ταχύτητα κάθε σημείου του τροχού θα δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_c + \vec{\upsilon}_{\pi\varepsilon\rho} \qquad \textbf{(1)}$$



Σχήμα 1

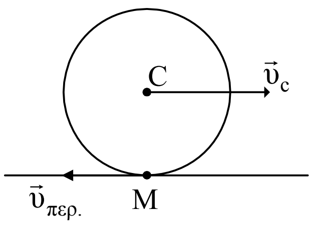
Αν σε χρόνο dt το σημείο έχει περιστραφεί κατά τόξο ds στο οποίο αντιστοιχεί γωνία dθ τότε κατά την ίδια απόσταση ds θα έχει μετατοπιστεί το κέντρο μάζας C προς τα δεξιά **(Σχήμα 1)**.

Άρα είναι:

$$\upsilon_c = \frac{ds}{dt} = \frac{R d\theta}{dt} \Rightarrow \upsilon_c = \omega R$$

Συνεπώς αν το M αποτελεί σημείο επαφής του τροχού με το οριζόντιο επίπεδο **(Σχήμα 2)** τότε η **(1)** δίνει:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_c + \vec{\upsilon}_{\pi\varepsilon\rho} \Rightarrow \upsilon = \upsilon_c - \upsilon_{\pi\varepsilon\rho} = \omega R - \omega R \Rightarrow \upsilon = 0$$



Σχήμα 2

Άρα κάθε σημείο επαφής M(2kπR,0) βρίσκεται στιγμιαία σε ηρεμία κατά τη διεύθυνση του άξονα x.

γ) Το μέτρο της ταχύτητας είναι:

$$\upsilon = \sqrt{\omega^2 R^2 (1-\cos\omega t)^2 + \omega^2 R^2 \sin^2\omega t} =$$

$$= \omega R\sqrt{1+\cos^2\omega t - 2\cos\omega t + \sin^2\omega t} \Rightarrow \upsilon = \omega R\sqrt{2(1-\cos\omega t)}$$

Άρα η επιτρόχιος επιτάχυνση είναι:

$$\alpha_\varepsilon = \frac{d\upsilon}{dt} = \omega R \frac{2\omega \sin\omega t}{2\sqrt{2(1-\cos\omega t)}} \Rightarrow \alpha_\varepsilon = \frac{\omega^2 R \sin\omega t}{\sqrt{2(1-\cos\omega t)}} \qquad \textbf{(2)}$$

Η ακτίνα καμπυλότητας είναι:

$$\rho = \frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}} = \frac{\left[\omega^2 R^2 (1-\cos\omega t)^2 + \omega^2 R^2 \sin^2\omega t\right]^{3/2}}{\omega R(1-\cos\omega t)\omega^2 R\cos\omega t - \omega^2 R \sin\omega t\, \omega R \sin\omega t} =$$

$$= \frac{\left[2\omega^2 R^2 (1-\cos\omega t)\right]^{3/2}}{\omega^3 R^2 \cos\omega t - \omega^3 R^2 (\cos^2\omega t + \sin^2\omega t)} =$$

$$= \frac{\omega^3 R^3 [2(1-\cos\omega t)]^{3/2}}{\omega^3 R^2 (\cos\omega t - 1)} \Rightarrow \rho = \frac{R 2\sqrt{2}(1-\cos\omega t)^{3/2}}{\cos\omega t - 1}$$

Επομένως η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι:

$$\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{\rho} = \frac{2\omega^2 R^2 (1-\cos\omega t)}{\dfrac{R 2\sqrt{2}(1-\cos\omega t)^{3/2}}{\cos\omega t - 1}} = \frac{\omega^2 R(\cos\omega t - 1)}{\sqrt{2}(1-\cos\omega t)^{1/2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_\kappa = \frac{\omega^2 R(\cos\omega t - 1)}{\sqrt{2(1-\cos\omega t)}} \quad \textbf{(3)}$$

Τα μέτρα των συνιστωσών α_ε και α_κ της επιτάχυνσης γίνονται ίσα όταν:

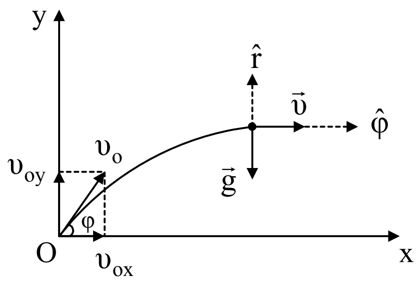
$$\alpha_\varepsilon = \alpha_\kappa \overset{(2)(3)}{\Rightarrow} \sin\omega t = \cos\omega t - 1 \Rightarrow \omega t = 0, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \Rightarrow t = 0\,\text{sec}, \ \frac{3\pi}{2\omega}\text{sec}, \frac{2\pi}{\omega}\text{sec}$$

ΘΕΜΑ 15

Βλήμα εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα υ_o που σχηματίζει γωνία φ με το οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογιστεί η ακτίνα καμπυλότητας στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς.

(Κατατακτήριες εξετάσεις από Α.Τ.Ε.Ι για Τοπογράφων Μηχανικών).

Λύση



Στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς της πλάγιας βολής που εκτελεί το βλήμα είναι $\upsilon_y = 0$ και επομένως η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ είναι παράλληλη στον άξονα x.
Η διεύθυνση της ταχύτητας συμπίπτει με την εφαπτομενική διεύθυνση, ενώ η κάθετη σε αυτήν με φορά προς τα πάνω με την ακτινική διεύθυνση του πολικού συστήματος συντεταγμένων, όπως φαίνεται στο σχήμα.
Το βλήμα κινείται με τη βαρυτική επιτάχυνση $\vec{g}$ και στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς αυτή κείται πάνω στην ακτινική διεύθυνση και κατά συνέπεια είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση. Δηλαδή στο σημείο αυτό ισχύει:

$$\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{\rho} \Rightarrow g = \frac{\upsilon^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{\upsilon^2}{g} \qquad \textbf{(1)}$$

Στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς η ταχύτητα έχει μόνο τη x συνιστώσα κι επειδή:

$$\alpha_x = 0 \Rightarrow \frac{d\upsilon_x}{dt} = 0 \Rightarrow \upsilon_x = \sigma\tau\alpha\theta. = \upsilon_{ox} \Rightarrow \upsilon_x = \upsilon_o \cos\varphi$$

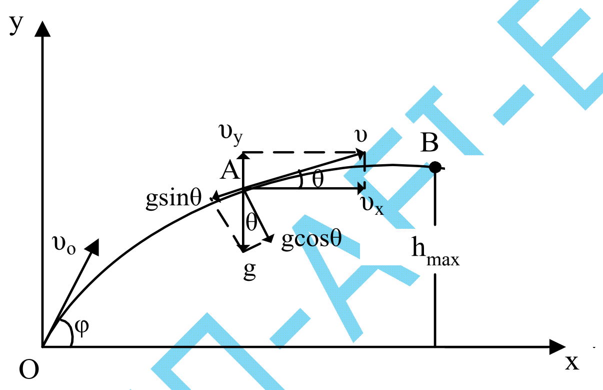
Άρα η **(1)** δίνει: $\rho = \dfrac{{\upsilon_o}^2 \cos^2\varphi}{g}$

ΘΕΜΑ 16

Βλήμα εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα υ_o που σχηματίζει γωνία φ με το οριζόντιο επίπεδο. Να βρεθεί η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς του συναρτήσει του χρόνου. Ποια η τιμή αυτής στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς;

(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)

Λύση



Σε μια τυχούσα χρονική στιγμή το βλήμα στη θέση Α έχει ταχύτητα υ, η οποία σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντιο. Η κίνηση πραγματοποιείται υπό την επίδραση της βαρυτικής επιτάχυνσης g. Αναλύοντας αυτή στη κάθετη και εφαπτομενική συνιστώσα, εύκολα προκύπτει ότι το ρόλο της κεντρομόλου επιτάχυνσης παίζει η συνιστώσα gcosθ. Δηλαδή :

$$\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{\rho} \Rightarrow g\cos\theta = \frac{\upsilon^2}{\rho}$$

Αλλά : $\cos\theta = \upsilon_x/\upsilon$ οπότε : $\rho = \dfrac{\upsilon^3}{g\upsilon_x} = \dfrac{(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2)^{3/2}}{g\upsilon_x}$ **(1)**

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις **(2-17)**, **(2-19)** για τις υ_x, υ_y στην πλάγια βολή προκύπτει:

$$\rho = \frac{(\upsilon_o^2 + g^2t^2 - 2\upsilon_o g t \sin\varphi)^{3/2}}{g\upsilon_o\cos\varphi}$$

Στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς Β ισχύει $\upsilon_y=0$ οπότε η **(1)** γίνεται:

$$\rho = \frac{\upsilon_x^3}{g\upsilon_x} = \frac{\upsilon_x^2}{g} \Rightarrow \rho = \frac{\upsilon_o^2\cos^2\varphi}{g}$$

ΘΕΜΑ 17

Βλήμα εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα υ_o = 10m/sec που σχηματίζει γωνία $\varphi=45^o$ με το οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογιστεί η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς στο σημείο όπου η κεντρομόλος και η επιτρόχιος επιτάχυνση είναι ίσες.

(Τμήμα Χημείας Ε.Κ.Π.Α.)

Λύση

Σύμφωνα με το σχήμα της **Άσκησης 16** σε κάθε σημείο της τροχιάς, η επιτάχυνση του βλήματος g αναλύεται σε δυο συνιστώσες : την κεντρομόλο α_κ=gcosθ και την επιτρόχιο α_ε=gsinθ, όπου θ η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα του βλήματος στο σημείο αυτό με την οριζόντιο. Για να είναι οι δυο αυτές συνιστώσες ίσες πρέπει :

$$\alpha_\kappa = \alpha_\varepsilon \Rightarrow g\cos\theta = g\sin\theta \Rightarrow \cos\theta = \sin\theta \Rightarrow \theta = 45^o \quad (\text{αφού } 0<\theta<90^o)$$

Επομένως το σημείο στο οποίο ζητείται να υπολογιστεί η ακτίνα καμπυλότητας είναι αυτό στο οποίο η ταχύτητα σχηματίζει γωνία 45^o με τον άξονα x, δηλαδή είναι το σημείο Ο της βολής, όπου υ_o=10m/sec.

Άρα στο σημείο αυτό η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι α_κ=gcos45^o και ισχύει :

$$\alpha_\kappa = \frac{\upsilon_o^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{\upsilon_o^2}{\alpha_\kappa} = \frac{\upsilon_o^2}{g\cos 45^o} = \frac{10^2}{10\sqrt{2}/2} \Rightarrow \rho = \frac{20}{\sqrt{2}}\text{m}$$

ΘΕΜΑ 18

Ναυαγοσώστης που βρίσκεται στο σημείο (x_1, y_1) αντιλαμβάνεται κολυμβητή, που βρίσκεται στο σημείο (x_2, y_2) να καλεί σε βοήθεια. Ο ναυαγοσώστης γνωρίζει ότι η ταχύτητά του στην άμμο της παραλίας είναι υ_1, ενώ η ταχύτητά του στη θάλασσα είναι υ_2. Βρείτε ότι για να φτάσει ο ναυαγοσώστης το συντομότερο δυνατό στον κολυμβητή πρέπει να ισχύει η σχέση : $\sin\varphi_1 / \upsilon_1 = \sin\varphi_2 / \upsilon_2$

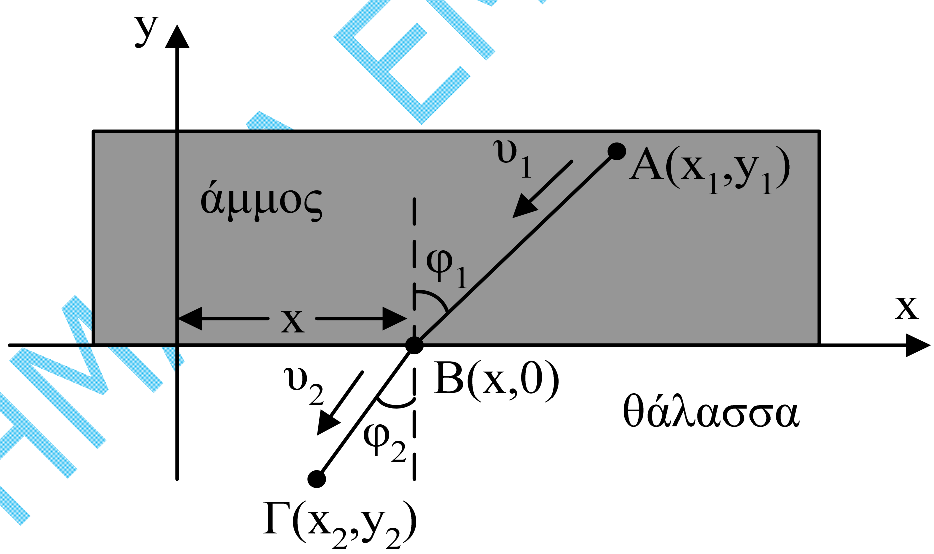
Υπόδειξη : Εκφράστε το χρόνο που θα κάνει να φτάσει ο ναυαγοσώστης ως συνάρτηση του x.

(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α., Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση

Έστω ότι ο ναυαγοσώστης μπαίνει στη θάλασσα στο σημείο B(x,0). Επειδή στην άμμο κινείται με σταθερή ταχύτητα υ_1, ο χρόνος για να φτάσει από το σημείο A στο B είναι :

$$t_{AB} = \frac{AB}{\upsilon_1} = \frac{\sqrt{(x_1 - x)^2 + y_1^2}}{\upsilon_1} \qquad \textbf{(1)}$$



Ενώ ο χρόνος για να φτάσει από το B στο Γ, αφού η ταχύτητά του στη θάλασσα είναι σταθερή και ίση με υ_2 είναι :

$$t_{B\Gamma} = \frac{B\Gamma}{\upsilon_2} = \frac{\sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2}}{\upsilon_2} \qquad \textbf{(2)}$$

όπου οι αποστάσεις ΑΒ και ΒΓ υπολογίζονται εύκολα μέσω του πυθαγόρειου θεωρήματος. Άρα ο ολικός χρόνος κίνησης του ναυαγοσώστη είναι :

$$t = t_{AB} + t_{B\Gamma} \overset{(1),(2)}{\Rightarrow} t(x) = \frac{\sqrt{(x_1 - x)^2 + y_1^2}}{\upsilon_1} + \frac{\sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2}}{\upsilon_2} \qquad \textbf{(3)}$$

Επομένως για να είναι ο χρόνος αυτός ο ελάχιστος δυνατός θα πρέπει να προσδιοριστεί το ελάχιστο της παραπάνω συνάρτησης t(x). Δηλαδή :

$$\frac{dt}{dx} = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} \frac{2(x_1 - x)(-1)}{\upsilon_1 2\sqrt{(x_1 - x)^2 + y_1^2}} + \frac{2(x - x_2)}{\upsilon_2 2\sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 - x}{\upsilon_1\sqrt{(x_1 - x)^2 + y_1^2}} = \frac{x - x_2}{\upsilon_2\sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2}} \qquad \textbf{(4)}$$

Αλλά από το σχήμα εύκολα προκύπτει ότι :

$$\sin\varphi_1 = \frac{x_1 - x}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + y_1^2}} \quad \text{και} \quad \sin\varphi_2 = \frac{x - x_2}{\sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2}}$$

Συνεπώς η **(4)** δίνει ότι για να είναι ο χρόνος κίνησης του ναυαγοσώστη ελάχιστος θα πρέπει να ισχύει η σχέση : $\sin\varphi_1 / \upsilon_1 = \sin\varphi_2 / \upsilon_2$

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com