ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ Ι - ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

Διάνυσμα θέσης : $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

Στιγμιαία ταχύτητα :

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z} = \upsilon_x\hat{x} + \upsilon_y\hat{y} + \upsilon_z\hat{z}$$

Στιγμιαία επιτάχυνση :

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon_x}{dt}\hat{x} + \frac{d\upsilon_y}{dt}\hat{y} + \frac{d\upsilon_z}{dt}\hat{z} = \alpha_x\hat{x} + \alpha_y\hat{y} + \alpha_z\hat{z}$$

Μέτρο ταχύτητας : $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}$ (m/sec)

Μέτρο επιτάχυνσης : $\alpha = \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2}$ (m/sec^2)

Στο πολικό σύστημα συντεταγμένων είναι: $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_\varepsilon + \vec{\alpha}_\kappa$

όπου $\alpha_\varepsilon = d\upsilon/dt$ η επιτρόχιος επιτάχυνση και $\alpha_\kappa = \upsilon^2/\rho$ η κεντρομόλος επιτάχυνση (υ το μέτρο της ταχύτητας και ρ η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς).

Μετασχηματισμοί Γαλιλαίου : $\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{u}t$, $\vec{\upsilon}\,' = \vec{\upsilon} - \vec{u}$, $\vec{\alpha}\,' = \vec{\alpha}$

ΔΥΝΑΜΙΚΗ

2^{ος} νόμος Newton : $\Sigma\vec{F}_{ext} = m\vec{\alpha} = md\vec{\upsilon}/dt$

Γενικευμένη διατύπωση 2^{ου} νόμου Newton :

$\Sigma\vec{F}_{ext} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$, όπου $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ η ορμή του σώματος.

Ο 2^{ος} νόμος του Newton σε επίπεδη καμπυλόγραμμη κίνηση δίνει:

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m\vec{\alpha} \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_r = F_\kappa = m\alpha_\kappa = m\upsilon^2/\rho \\ \Sigma F_{\varepsilon\varphi} = m\alpha_\varepsilon = md\upsilon/dt \end{cases}$$

Κινητική τριβή : $T_\kappa = n_\kappa N$

όπου N_κ ο συντελεστής κινητικής τριβής και N η κάθετη αντίδραση.

Στατική τριβή : $T_s \le n_s N$ όπου N_s ο συντελεστής στατικής τριβής.

ΕΡΓΟ – ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Έργο δύναμης σε ευθύγραμμη κίνηση :

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}\cdot d\vec{x} = \int_{x_1}^{x_2} F\cos\varphi dx \qquad \text{(Joule)}$$

όπου $d\vec{x}$ το στοιχειώδες διάνυσμα μετατόπισης και φ η γωνία που σχηματίζει η δύναμη με τη διεύθυνση της κίνησης.

Έργο δύναμης σε καμπυλόγραμμη κίνηση :

$$W = \int_c \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right) \qquad \text{διότι :}$$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = (F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z})(dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Μέση ισχύς : $P = \dfrac{\Delta W}{\Delta t}$ (Watt)

Στιγμιαία ισχύς : $P = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta W}{\Delta t} = \dfrac{dW}{dt}$

Επίσης ισχύει : $P = \dfrac{dW}{dt} = \dfrac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} \Rightarrow P = \vec{F}\cdot\vec{\upsilon}$

Κινητική ενέργεια μεταφορικής κίνησης : $K = m\upsilon^2/2$

Θεώρημα έργου – κινητικής ενέργειας : $\Sigma W_{AB} = \Delta K = K_B - K_A$

Συντηρητικές λέγονται οι δυνάμεις οι οποίες απορρέουν από μια βαθμωτή συνάρτηση V(x,y,z) (δυναμική ενέργεια) μέσω της σχέσης :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V \Rightarrow \vec{F} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}\right)$$

και οι οποίες είναι αστρόβιλες : $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$

Έργο συντηρητικών δυνάμεων : $W_{AB} = V_A - V_B$

Στην περίπτωση που σε ένα σώμα ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις ισχύει η **αρχή διατήρησης της ενέργειας** σύμφωνα με την οποία η ολική μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή. Δηλαδή: $E = K + V =$ σταθ.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Η εξίσωση κίνησης των συστημάτων μεταβλητής μάζας εξάγεται από τη γενικευμένη διατύπωση του 2^{ου} νόμου του Newton ως εξής :

$$\Sigma F_{ext} = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m\upsilon) \Rightarrow \boxed{\Sigma F_{ext} = m\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon\frac{dm}{dt}}$$

όπου ΣF_{ext} οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα, υ η ταχύτητα, m = m(t) η χρονική συνάρτηση της μάζας και dm/dt ο χρονικός ρυθμός μεταβολής της μάζας.

ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ

Διάνυσμα θέσεις $\vec{r}_c$ του κ. μ. n υλικών σημείων : $\vec{r}_c = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$

όπου $\vec{r}_i$ το διάνυσμα θέσης κάθε σημειακής μάζας m_i ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς.

Ταχύτητα $\vec{\upsilon}_c$, επιτάχυνση $\vec{\alpha}_c$ κέντρου μάζας :

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\upsilon}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad \vec{\alpha}_c = \frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\alpha}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Ο 2^{ος} νόμος του Newton για σύστημα σωματιδίων :

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = \sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i\frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\alpha}_i = M\vec{\alpha}_c$$

Σύστημα κέντρου μάζας λέγεται το σύστημα αναφοράς η αρχή του οποίου συμπίπτει με το κέντρο μάζας C του συστήματος σωματιδίων. Το κέντρο μάζας βρίσκεται πάντα σε ηρεμία ως προς το σύστημα του κέντρου μάζας , δηλαδή $\upsilon_c' = 0$.

ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Όταν ένα στερεό σώμα περιστρέφεται, κάθε υλικό του σημείο διαγράφει κυκλική τροχιά με τα κέντρα όλων αυτών των τροχιών να ορίζουν τον άξονα περιστροφής. Η μετακίνηση κάθε περιστρεφόμενου στερεού σώματος περιγράφεται από τη **γωνία περιστροφής θ**. Ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής θέσης θ ορίζει τη **γωνιακή ταχύτητα** του στερεού σώματος: $\vec{\omega} = (d\theta/dt)\vec{z}$ (rad/sec)

Ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας ω ορίζει τη **γωνιακή επιτάχυνση** του στερεού σώματος: $\dot{\vec{\omega}} = d\vec{\omega}/dt$ (rad/sec^2)

Ροπή αδράνειας Ι : περιγράφει το μέτρο της αντίστασης ενός στερεού σώματος στην περιστροφή του.

- Για ένα υλικό σημείο μάζας m που βρίσκεται σε απόσταση r από τον άξονα περιστροφής είναι: $I = mr^2$ $(kgr\cdot m^2)$
- Για σύστημα n υλικών σημείων μαζών m_i είναι: $I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$

όπου r_i η απόσταση κάθε υλικού σημείου από τον άξονα περιστροφής.

- Για στερεό σώμα με συνεχή κατανομή μάζας είναι: $I = \int r^2 dm$

όπου r η απόσταση της στοιχειώδους μάζας dm από τον άξονα περιστροφής και η ολοκλήρωση γίνεται στα όρια του σώματος.

Θεωρήματα υπολογισμού ροπής αδράνειας

1. Θεώρημα Steiner ή παράλληλων αξόνων:
Αν I_c είναι η ροπή αδράνειας στερεού σώματος μάζας M ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, τότε η ροπή αδράνειας I_z ως προς παράλληλο άξονα σε απόσταση d από τον άξονα του κέντρου μάζας είναι: $\boxed{I_z = I_c + Md^2}$

2. Θεώρημα κάθετων αξόνων
Αν I_x,I_y είναι οι ροπές αδράνειας στερεού σώματος ως προς δυο άξονες στο επίπεδο του σώματος κάθετους μεταξύ τους, τότε η ροπή αδράνειας I_z ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο του σώματος που τέμνει τους άξονες x και y είναι : $\boxed{I_z = I_x + I_y}$

Κινητική ενέργεια περιστρεφόμενου στερεού: $K = I_o\omega^2/2$

όπου I_0 η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής.

Ροπή δύναμης $\vec{\tau}$: περιγράφει την ικανότητα μιας δύναμης να περιστρέφει ένα σώμα γύρω από έναν άξονα περιστροφής : $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ $\quad (Nt \cdot m)$

όπου $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης του σημείου εφαρμογής της δύναμης από τον άξονα περιστροφής.

Θεμελιώδης νόμος της περιστροφής κίνησης : $\boxed{\Sigma\vec{\tau}_o = I_o\vec{\dot{\omega}}}$

όπου οι ροπές των δυνάμεων $\Sigma\vec{\tau}_o$ και η ροπή αδράνειας I_o αναφέρονται ως προς των άξονα περιστροφής και ως θετική φορά των ροπών δυνάμεων λαμβάνεται η φορά της κίνησης, δηλαδή η φορά της γωνιακής επιτάχυνσης $\vec{\dot{\omega}}$.

Έργο, ισχύς περιστροφικής κίνησης : $W = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau d\theta$, $P = \frac{dW}{dt} = \frac{\tau d\theta}{dt} = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$

Αντιστοιχία μεγεθών μεταφορικής – περιστροφικής κίνησης

Μεταφορική κίνηση	Περιστροφική κίνηση
Γραμμική μετατόπιση $\vec{r}$	Γωνιακή μετατόπιση θ
Γραμμική ταχύτητα $\vec{\upsilon} = d\vec{r}/dt$	Γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = (d\theta/dt)\hat{z}$
Γραμμική επιτάχυνση $\vec{\alpha} = d\vec{\upsilon}/dt = d^2\vec{r}/dt^2$	Γωνιακή επιτάχυνση $\vec{a} = \vec{\dot{\omega}} = d\vec{\omega}/dt = (d^2\theta/dt^2)\hat{z}$
Μάζα (μεταφορική αδράνεια) m	Ροπή αδράνειας I
Δύναμη $\vec{F} = m\vec{\alpha}$	Ροπή δύναμης $\vec{\tau} = I\vec{\dot{\omega}}$
Έργο $W = \int \vec{F} d\vec{r}$	Έργο $W = \int \tau d\theta$
Κινητική ενέργεια $K = \frac{1}{2}m\upsilon^2$	Κινητική ενέργεια $K = \frac{1}{2}I\omega^2$
Ισχύς $P = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}$	Ισχύς $P = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$

Σύνθετη κίνηση (κύλιση) στερεού σώματος
Είναι συνδυασμός της μεταφορικής κίνησης του κέντρου μάζας του στερεού σώματος για την οποία ισχύει: $\boxed{\Sigma\vec{F} = M\vec{a}_c}$

και της περιστροφικής κίνησης ως προς άξονα, ο οποίος διέρχεται από κέντρο μάζας του για την οποία ισχύει: $\boxed{\Sigma\vec{\tau}_c = I_c\vec{\dot{\omega}}}$

Για **κύλιση χωρίς ολίσθηση** ισχύει και: $\boxed{\upsilon_c = \omega R}$

όπου R η ακτίνα του στερεού σώματος.

ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

- **Στροφορμή υλικού σημείου** μάζας m και ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ ως προς σημείο O: $\boxed{\vec{L}_o = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{\upsilon}}$ $\quad (kgr \cdot m^2/sec)$
- **Στροφορμή περιστρεφόμενου στερεού σώματος** ροπής αδράνειας I_o και γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$ ως προς τον άξονα περιστροφής: $\boxed{\vec{L} = I_o\vec{\omega}}$

Ισχύει: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \Sigma\vec{\tau}_{ext}$

Αρχή διατήρησης της στροφορμής :
Αν $\Sigma\vec{\tau}_{ext} = 0$ τότε $d\vec{L}/dt = 0$ δηλαδή $\vec{L} = \sigma\tau\alpha\theta.$

ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Απλή αρμονική ταλάντωση ονομάζεται η περιοδική κίνηση γύρω από μια θέση ισορροπίας το πλάτος της οποίας είναι σταθερό και αμείωτο και υφίσταται όταν υπάρχει δύναμη που έλκει το σώμα προς την θέση ισορροπίας. Χαρακτηριστική διαφορική εξίσωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης: $\boxed{d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0}$

όπου ω η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης.
Η γενική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

όπου A το πλάτος και φ η αρχική φάση της ταλάντωσης.
Η ταχύτητα και η επιτάχυνση της α.α.τ. είναι :

$$\upsilon(t) = dx/dt = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\alpha(t) = d\upsilon/dt = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$$

Περίοδος : $T = 2\pi/\omega$ (sec)
Συχνότητα : $\nu = 1/T = \omega/2\pi$ (sec^{-1} ή Hz)

ΣΧΕΤΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Μετασχηματισμοί Lorentz:
Αν (x,y,z,t) είναι οι χωροχρονικές συντεταγμένες ενός γεγονότος ως προς ακίνητο σύστημα Oxyz και (x', y', z', t') οι αντίστοιχες_ συντεταγμένες ως προς κινούμενο σύστημα $O'x'y'z'$ που κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon} = \upsilon\hat{x}$ (υ>0,1c) τότε :

$$\boxed{x' = \gamma(x - \upsilon t), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\upsilon}{c^2}x\right)}$$

όπου $\gamma = 1/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2} = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ και β=υ/c.

Συνέπειες μετασχηματισμών Lorentz
α) Ταυτοχρονικοτητα
Δυο γεγονότα τα οποία είναι ταυτόχρονα ως προς ένα από τα δυο συστήματα αναφοράς O ή O' των μετασχηματισμών Lorentz, δεν θα συμβαίνουν ταυτόχρονα ως προς το άλλο σύστημα και μάλιστα η διαφορά η διαφορά χρόνου αυτών εξαρτάται από την μεταξύ τους απόσταση στο δεύτερο σύστημα. Δηλαδή αν Δt=0 είναι : $\boxed{\Delta t' = -\frac{\upsilon}{c^2}\Delta x'}$

β) Διαστολή χρόνου
Έστω δυο γεγονότα, τα οποία συμβαίνουν στο ίδιο σημείο του συστήματος O με διαφορά χρόνου Δt. Τότε η χρονική διαφορά μεταξύ των δυο γεγονότων στο σύστημα O' , το οποίο κινείται με ταχύτητα υ ως προς το O θα είναι: $\boxed{\Delta t' = \gamma\Delta t}$ Επειδή γ>1 είναι $\Delta t' > \Delta t$

γ)Συστολή μήκους
Έστω ράβδος η οποία είναι ακίνητη και έχει μήκος L στο σύστημα O. Τότε το μήκος της L' ως προς το σύστημα O΄, το οποίο κινείται με ταχύτητα υ ως προς το O θα είναι: $\boxed{L' = L/\gamma}$ Επειδή γ>1 είναι L΄<L

Παρατήρηση: Οι παραπάνω συνέπειες των μετασχηματισμών Lorentz ισχύουν αντίστοιχα αν αρχικά θεωρηθούν τα γεγονότα ως προς το κινούμενο σύστημα O΄.

- **Μετασχηματισμοί ταχυτήτων Lorentz**

$$u'_x = \frac{u_x - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x}, \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x\right)}, \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x\right)}$$

όπου u_x, u_y, u_z οι συνιστώσες της ταχύτητας ενός γεγονότος ως προς το σύστημα O, u'_x, u'_y, u'_z οι συνιστώσες της ταχύτητας του γεγονότος ως προς το σύστημα O΄ και u η ταχύτητα του συστήματος O΄ ως προς το O.
Αν ένα σώμα είναι ακίνητο ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς, τότε η μάζα του m_0 λέγεται ***μάζα ηρεμίας***. Όταν το σώμα κινείται με ταχύτητα u>0,1c τότε η μάζα του αυξάνει και λέγεται **σχετικιστική μάζα**, η οποία είναι: $m_r = \frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \Rightarrow \boxed{m_r = \gamma m_o}$

Σχετικιστική ορμή • **κινητική ενέργεια** • **Ενέργεια ηρεμίας**
$\vec{p} = m_r\vec{\upsilon} = \gamma m_0\vec{\upsilon}$ • $K = (\gamma - 1)m_o c^2$ • $E_o = m_o c^2$

Ολική ενέργεια • **Σχέσης ορμής ενέργειας**
$E = K + E_o \Rightarrow E = \gamma m_o c^2$ • $E^2 = p^2c^2 + m_o^2c^4$