ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΑΠΛΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

EMC²

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ **6932 946778**
www.pmoiras.weebly.com

1. Απλός αρμονικός ταλαντωτής

Η κίνηση ενός συστήματος με ένα βαθμό ελευθερίας γύρω από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας του λέγεται **απλή αρμονική ταλάντωση**.

Ο αριθμός των ανεξάρτητων συντεταγμένων, των αναγκαίων για τον προσδιορισμό της θέσης ενός υλικού συστήματος, ονομάζεται αριθμός των **βαθμών ελευθερίας** του συστήματος.

Για παράδειγμα η κίνηση μιας μάζας που έχει στερεωθεί στο άκρο ενός ελατηρίου και κινείται πάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές μπορεί να χαρακτηριστεί ως ένα σύστημα με ένα κινητό μέρος (τη μάζα) και ένα βαθμό ελευθερίας στη διεύθυνση x, μια και απαιτείται μόνο μια μεταβλητή για την περιγραφή της θέσης της μάζας. Αν η κίνηση της μάζας είναι δυνατή σε δυο ή τρεις διευθύνσεις, τότε το σύστημα θα διαθέτει δυο ή τρεις βαθμούς ελευθερίας αντίστοιχα, καθώς θα απαιτούνται δυο ή τρεις μεταβλητές για την περιγραφή της θέσης της μάζας.

Έστω ένα σύστημα με ένα βαθμό ελευθερίας που κινείται ώστε η τυχαία θέση του να καθορίζεται από τη μεταβλητή $q(t)$. Αν η διαφορική εξίσωση που διέπει την κίνηση του συστήματος αυτού είναι της μορφής:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 q = 0 \qquad \mathbf{(1-1)}$$

τότε έχει αποδειχθεί ότι το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα ω.

Η διαφορική εξίσωση **(1–1)** περιγράφει πολλά φυσικά φαινόμενα όταν η μεταβλητή q περιγράφει κάποια μεγέθη (x,y,z,θ).

Η γενική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης έχει τη μορφή :

$$q(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad \mathbf{(1-2)}$$

όπου η θέση $q = 0$ λέγεται **θέση ισορροπίας**, το A **πλάτος**, το ω **κυκλική συχνότητα**, το φ **αρχική φάση**, το πηλίκο $T = 2\pi/\omega$ **περίοδος** και το πηλίκο $\nu = 1/T$ **συχνότητα** της ταλάντωσης .

Από τα παραπάνω συμπεραίνεται ότι κάθε σύστημα με ένα βαθμό ελευθερίας ταλαντώνεται με μια μοναδική συχνότητα κι επομένως χαρακτηρίζεται από ένα μοναδικό **κανονικό τρόπο ταλάντωσης**.

Από την **(1–2)** προκύπτει ότι η ταχύτητα και η επιτάχυνση του απλού αρμονικού ταλαντωτή είναι :

$$\upsilon = \frac{dq}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) \qquad \mathbf{(1-3)}$$

$$\alpha = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 q \qquad \textbf{(1–4)}$$

Επίσης σύμφωνα με το 2ο νόμο του Newton η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στον απλό αρμονικό ταλαντωτή είναι :

$$F = m\alpha = -m\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = -kq \qquad \textbf{(1–5)}$$

όπου $k = m\omega^2$ η **σταθεράς επαναφοράς.**

Ενέργεια απλού αρμονικού ταλαντωτή

Η κινητική ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή είναι :

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \overset{(1-3)}{=} \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\left[1 - \cos^2(\omega t + \varphi)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - q^2) \qquad \textbf{(1–6)}$$

ενώ η δυναμική του ενέργεια είναι :

$$F = -\frac{dV}{dq} \Rightarrow \int_0^v dV = -\int_0^q F dq \overset{(1-5)}{\Rightarrow} V = k\int_0^q q dq \Rightarrow V = \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \qquad \textbf{(1–7)}$$

Τέλος η ολική του ενέργεια είναι :

$$E = K + V = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \sigma\tau\alpha\theta. \qquad \textbf{(1–8)}$$

Εφαρμογή

Να εκφραστεί το πλάτος Α και η αρχική φάση φ της απλής αρμονικής ταλάντωσης $y(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ συναρτήσει της αρχικής θέσης $y(0) = y_o$ και της αρχικής ταχύτητας $\dot{y}(0) = \upsilon_o$.

Λύση

Είναι : $$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \quad \textbf{(1)}$$

και $$\upsilon(t) = \frac{dy}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) \quad \textbf{(2)}$$

Αρχικά για $t = 0$ η **(1)** δίνει : $y(0) = A\cos\varphi \Rightarrow y_o = A\cos\varphi$ **(3)**

και η **(2)** δίνει : $\upsilon(0) = \dot{y}(0) = -A\omega\sin\varphi \Rightarrow \upsilon_o = -A\omega\sin\varphi$ **(4)**

Επομένως λύνοντας την **(3)** ως προς cosφ και την **(4)** ως προς sinφ, υψώνοντας στο τετράγωνο και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει :

$$\left.\begin{aligned} \textbf{(3)} &\Rightarrow \cos\varphi = \frac{y_o}{A} \Rightarrow \cos^2\varphi = \frac{y_o^2}{A^2} \\ \textbf{(4)} &\Rightarrow \sin\varphi = -\frac{\upsilon_o}{A\omega} \Rightarrow \sin^2\varphi = \frac{\upsilon_o^2}{A^2\omega^2} \end{aligned}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = \frac{y_o^2}{A^2} + \frac{\upsilon_o^2}{A^2\omega^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{y_o^2}{A^2} + \frac{\upsilon_o^2}{A^2\omega^2} \Rightarrow A^2 = y_o^2 + \frac{\upsilon_o^2}{\omega^2} \Rightarrow A = \sqrt{y_o^2 + \frac{\upsilon_o^2}{\omega^2}}$$

Επίσης διαιρώντας κατά μέλη τις **(4)** και **(3)** προκύπτει :

$$-\frac{A\omega\sin\varphi}{A\cos\varphi} = \frac{\upsilon_o}{y_o} \Rightarrow \omega tan\varphi = -\frac{\upsilon_o}{y_o} \Rightarrow \tan\varphi = -\frac{\upsilon_o}{\omega y_o} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{\upsilon_o}{\omega y_o}\right)$$

2. Σύνθεση ή συμβολή απλών αρμονικών ταλαντώσεων

Η συνισταμένη κίνηση δυο ή περισσότερων απλών αρμονικών ταλαντώσεων λέγεται **σύνθεση** ή **συμβολή** απλών ταλαντώσεων. Διακρίνονται οι εξής χαρακτηριστικές περιπτώσεις :

α) Σύνθεση δυο απλών αρμονικών ταλαντώσεων με ίδιες διευθύνσεις και συχνότητες

Έστω δυο απλές αρμονικές ταλαντώσεις με ίδιες διευθύνσεις, ίδιες συχνότητες ω, πλάτη A_1, A_2 και αρχικές φάσεις φ_1, φ_2 .Δηλαδή :

$$x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \quad \text{και} \quad x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

Η συνιστάμενη ταλάντωση δίνεται από τη σχέση :

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) + A_2\cos(\omega t+\varphi_2) =$$

$$= A_1(\cos\omega t\cos\varphi_1 - \sin\omega t\sin\varphi_1) + A_2(\cos\omega t\cos\varphi_2 - \sin\omega t\sin\varphi_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = (A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)\cos\omega t - (A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)\sin\omega t \qquad \textbf{(1–9)}$$

Επομένως η συνιστάμενη ταλάντωση θα έχει διεύθυνση και συχνότητα ίδιες με αυτές των απλών ταλαντώσεων και πλάτος :

$$A = \sqrt{(A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)^2 + (A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)^2} =$$

$$= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \qquad \textbf{(1–10)}$$

Παρατηρείται ότι το συνιστάμενο πλάτος εξαρτάται από τα πλάτη A_1, A_2 και τη διαφορά φάσης $\varphi_1 - \varphi_2$ των δυο ταλαντώσεων.

Επομένως αν $\varphi_1 = \varphi_2$ τότε $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, δηλαδή οι δυο ταλαντωτές βρίσκονται σε φάση και το πλάτος Α γίνεται μέγιστο : $A = A_1 + A_2$, ενώ αν $\varphi_1 = \varphi_2 \pm \pi$ τότε $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$, δηλαδή οι δυο ταλαντωτές βρίσκονται σε αντίθεση φάσης και το πλάτος γίνεται ελάχιστο : $A = |A_1 - A_2|$.

β) Σύνθεση δυο απλών αρμονικών ταλαντώσεων με ίδιες διευθύνσεις και διαφορετικές συχνότητες

Έστω δυο απλές αρμονικές ταλαντώσεις με ίδιες διευθύνσεις, συχνότητες ω_1 και $\omega_2 > \omega_1$, ίδια πλάτη $A_1 = A_2 = A$ και αρχικές φάσεις $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Δηλαδή :

$$x_1 = A\cos\omega_1 t \qquad \text{και} \qquad x_2 = A\cos\omega_2 t$$

Η συνιστάμενη ταλάντωση δίνεται από τη σχέση :

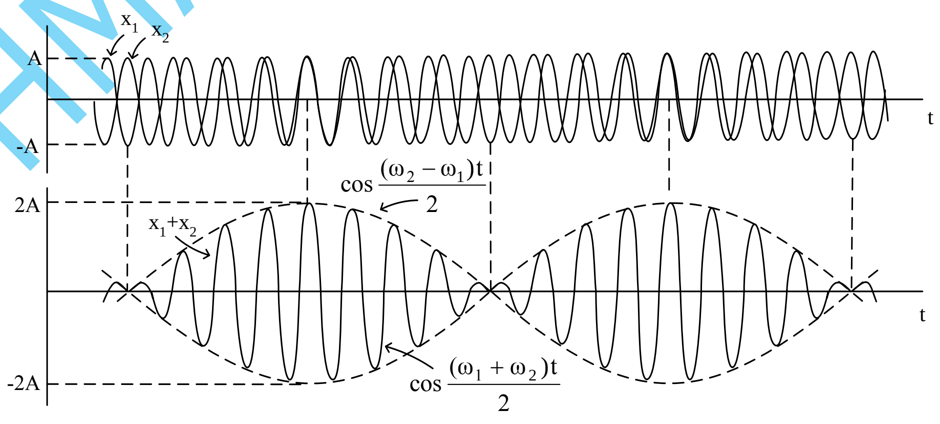
$$x = x_1 + x_2 = A(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2A\cos\frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2}\cos\frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} \qquad \textbf{(1–11)}$$

Δηλαδή η προκύπτουσα κίνηση είναι ταλάντωση με συχνότητα ίση με τη μέση τιμή των δυο ταλαντώσεων $(\omega_1 + \omega_2)/2$ και διαμορφωμένο πλάτος 2A, που μεταβάλλεται δηλαδή μεταξύ 2A και 0 με μια πολύ χαμηλότερη συχνότητα ίση με την ημιδιαφορά $(\omega_2 - \omega_1)/2$ των συχνοτήτων των δυο ταλαντώσεων. Η αυξομείωση αυτή του πλάτους ονομάζεται **διακρότημα (beat)**.

Παρατηρείται ότι όταν οι ω_1 και ω_2 είναι σχεδόν ίσες, ο όρος $(\omega_2 - \omega_1)/2$ είναι πολύ μικρός και το πλάτος μεταβάλλεται αργά, ενώ γίνεται μέγιστο και ίσο με 2A όταν $\cos\frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} = \pm 1$.

Η σύνθεση των δυο αυτών ταλαντώσεων και η δημιουργία του διακροτήματός τους παριστάνεται στο ακόλουθο σχήμα :



Σχήμα 1.1

γ) Σύνθεση δυο απλών αρμονικών ταλαντώσεων με κάθετες διευθύνσεις και ίδιες συχνότητες

Έστω δυο κάθετες απλές αρμονικές ταλαντώσεις, με ίδιες συχνότητες ω, πλάτη A_1, A_2 και αρχικές φάσεις φ_1, φ_2. Δηλαδή :

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{και} \quad y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Η συνιστάμενη κίνηση βρίσκεται με απαλοιφή του χρόνου t από τις εξισώσεις αυτές, ώστε να προκύψει μια σχέση μεταξύ των x, y και των σταθερών φ_1, φ_2.
Από τις παραπάνω σχέσεις αναπτύσσοντας τα συνημίτονα προκύπτει :

$$\frac{x}{A_1} = \cos(\omega t + \varphi_1) \Rightarrow \frac{x}{A_1} = \cos\omega t \cos\varphi_1 - \sin\omega t \sin\varphi_1$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos(\omega t + \varphi_2) \Rightarrow \frac{y}{A_2} = \cos\omega t \cos\varphi_2 - \sin\omega t \sin\varphi_2$$

Απαλείφοντας το χρόνο από τις δυο παραπάνω μετά από αρκετές πράξεις προκύπτει :

$$\left(\frac{x}{A_1}\sin\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\sin\varphi_1\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\cos\varphi_1 - \frac{x}{A_1}\cos\varphi_2\right)^2 = 0$$

η οποία τελικά δίνει την γενική εξίσωση της έλλειψης :

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad \textbf{(1 – 12)}$$

🕮 **Παρατήρηση :**

Στη γενικότερη περίπτωση οι άξονες της έλλειψης έχουν μια κλίση ως προς τους άξονες των x και y, ενώ όταν η διαφορά φάσης είναι $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$ τότε αυτοί γίνονται οι κύριοι άξονες και η εξίσωση **(1 – 12)** παίρνει την απλή μορφή :

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

δηλαδή μιας έλλειψης με ημιάξονες A_1 και A_2.

Επίσης αν $A_1=A_2=A$ τότε αυτή δίνει τον κύκλο : $x^2+y^2=A^2$
Όταν η διαφορά φάσης είναι $\varphi_2-\varphi_1=0{,}2\pi{,}4\pi,...$ η εξίσωση **(1 – 12)** απλοποιείται στην :

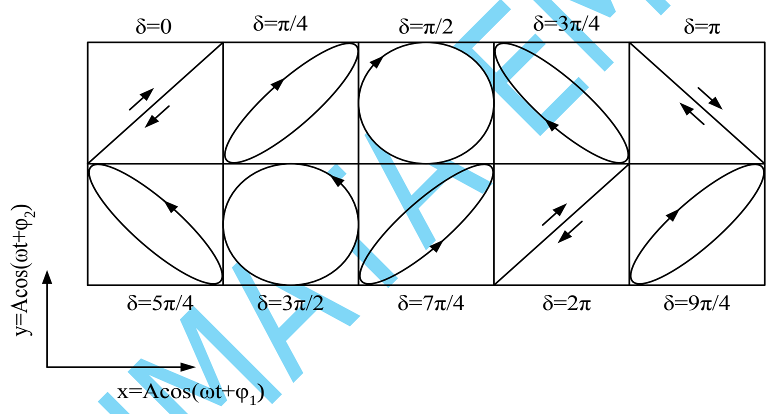
$$y=\frac{A_2}{A_1}x$$

δηλαδή είναι μια ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων με κλίση A_2/A_1.

Ενώ όταν είναι $\varphi_2-\varphi_1=\pi{,}3\pi{,}5\pi,...$ προκύπτει : $y=-\dfrac{A_2}{A_1}x$

δηλαδή είναι μια ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων και έχει αντίθετη κλίση $-A_2/A_1$.

Οι τροχιές του σωματιδίου για διάφορες τιμές του $\delta=\varphi_2-\varphi_1$ και για ίσα πλάτη $A_1=A_2=A$ παριστάνονται στο ακόλουθο σχήμα και επιδεικνύονται εύκολα με έναν παλμογράφο.

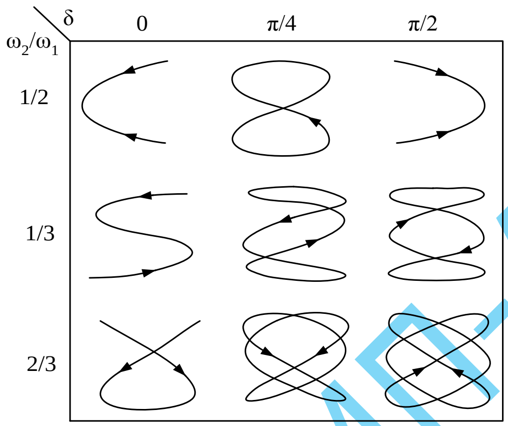


Σχήμα 1.2

Σημείωση: Από τα παραπάνω παρατηρείται ότι όταν $\varphi_2-\varphi_1=0,\pi,2\pi,3\pi,...$ η έλλειψη εκφυλίζεται σε ευθεία γραμμή, η δόνηση που προκύπτει κείται εξ ολοκλήρου σε ένα επίπεδο και οι ταλαντώσεις λέγονται **γραμμικά πολωμένες**. Ενώ οι άλλες τιμές του φ_2-φ_1 δίνουν **κυκλική** ή **ελλειπτική πόλωση**. Το επίπεδο πόλωσης είναι πάντα κάθετο στο επίπεδο πάνω στο οποίο εκτελούνται οι ταλαντώσεις.

δ) Σύνθεση δυο απλών αρμονικών ταλαντώσεων με κάθετες διευθύνσεις και διαφορετικές συχνότητες

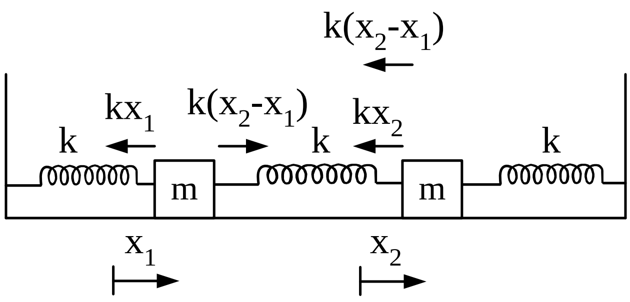
Όταν οι συχνότητες των δυο καθέτων απλών αρμονικών ταλαντώσεων δεν είναι ίσες, τότε η μορφή της τροχιάς είναι πιο περίπλοκη και καθορίζεται επιπλέον από το πηλίκο των συχνοτήτων. Τα σχήματα των τροχιών που διαγράφονται κατά την κίνηση του σωματιδίου λέγονται **εικόνες Lissajous** και παραδείγματα τέτοιων σχημάτων φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 1.3

3. Συζευγμένες ταλαντώσεις

Όταν δύο ή περισσότερες ταλαντώσεις εξαρτώνται η μία από την άλλη ονομάζονται **συζευγμένες**. Η κίνηση των δύο μαζών του **Σχήματος 1.4** που είναι προσδεμένες στα ακλόνητα τοιχώματα μέσω των τριών ελατηρίων αποτελεί συζευγμένη ταλάντωση. Το σύστημα αυτό διαθέτει δύο βαθμούς ελευθερίας, αφού η κίνηση είναι μονοδιάστατη και απαιτείται μια μεταβλητή για να καθοριστεί η θέση της κάθε μάζας.



Σχήμα 1.4

Θεωρώντας ότι οι δύο μάζες κινούνται μονοδιάστατα χωρίς τριβή και σε κάποια χρονική στιγμή οι μετατοπίσεις των μαζών από τις θέσεις ισορροπίας τους (όπου τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος) είναι x_1 και x_2 $(0 < x_1 < x_2)$, τότε το πρώτο ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά x_1, το δεύτερο κατά $x_2 - x_1$, ενώ το τρίτο έχει συμπιεστεί κατά x_2.

Επομένως η πρώτη μάζα δέχεται από το πρώτο ελατήριο μία δύναμη kx_1 προς τα αριστερά και από το δεύτερο μια δύναμη $k(x_2-x_1)$ προς τα δεξιά, ενώ η δεύτερη μάζα δέχεται από τα δύο ελατήρια τις δυνάμεις $k(x_2-x_1)$ και kx_2 προς τα αριστερά. Άρα οι εξισώσεις κίνησης των δύο μαζών, σύμφωνα με τον 2^o νόμο του Newton είναι:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_1 \Rightarrow -kx_1 + k(x_2 - x_1) = m\ddot{x}_1$$

$$\text{και} \quad \Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_2 \Rightarrow -kx_2 - k(x_2 - x_1) = m\ddot{x}_2 \qquad \textbf{(1 – 13)}$$

όπου $\ddot{x}_1 = d^2x_1/dt^2$ και $\ddot{x}_2 = d^2x_2/dt^2$ είναι οι επιταχύνσεις των δύο μαζών.

Οι εξισώσεις **(1 – 13)** αποτελούν τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης του συστήματος και είναι ένα διαφορικό σύστημα με άγνωστες τις συναρτήσεις $x_1(t)$ και $x_2(t)$. Παρατηρείται ότι οι εξισώσεις **(1 – 13)** περιέχουν τους συνήθεις όρους απλής αρμονικής ταλάντωσης της κάθε μάζας συν ένα όρο σύζευξης $k(x_2 - x_1)$, λόγω του μεσαίου ελατηρίου.

Υπάρχουν δύο μέθοδοι για την επίλυση του διαφορικού συστήματος **(1 – 13)**, οι οποίες καταλήγουν σε ταυτόσημα αποτελέσματα. Η πρώτη ονομάζεται **μέθοδος των κανονικών τρόπων ταλάντωσης** (μαθηματική μέθοδος), ενώ η δεύτερη **μέθοδος των κανονικών συντεταγμένων** (φυσική μέθοδος).

Κανονικοί τρόποι ταλάντωσης

Δεχόμαστε ότι στο σύστημα έχει διεγερθεί ένας μόνο τρόπος ταλάντωσης που χαρακτηρίζεται από συχνότητα ω και φάση φ, δηλαδή οι κινήσεις των δύο μαζών είναι αρμονικές ταλαντώσεις ίδιας συχνότητας ω και ίδιας φάσης φ, οπότε οι λύσεις του συστήματος **(1 – 13)** είναι της μορφής:

$$x_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{και} \quad x_2(t) = B\cos(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(1 – 14)}$$

όπου Α και Β τα πλάτη της κίνησης των δύο μαζών.

Παραγωγίζοντας δύο φορές ως προς το χρόνο τις εξισώσεις **(1 – 14)** προκύπτει:

$$\ddot{x}_1 = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{και} \quad \ddot{x}_2 = -B\omega^2\cos(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(1 – 15)}$$

και αντικαθιστώντας τις **(1–14)** και **(1–15)** στο σύστημα **(1–13)** προκύπτει:

$$\left.\begin{aligned} -kA\cos(\omega t+\varphi) + k[B\cos(\omega t+\varphi) - A\cos(\omega t+\varphi)] &= -mA\omega^2\cos(\omega t+\varphi) \\ -kB\cos(\omega t+\varphi) - k[B\cos(\omega t+\varphi) - A\cos(\omega t+\varphi)] &= -mB\omega^2\cos(\omega t+\varphi) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} kB - 2kA &= -m\omega^2 A \\ kA - 2kB &= -m\omega^2 B \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} (m\omega^2 - 2k)A + kB &= 0 \\ kA + (m\omega^2 - 2k)B &= 0 \end{aligned}\right. \qquad \textbf{(1 – 16)}$$

Δηλαδή προκύπτει ένα γραμμικό ομογενές αλγεβρικό σύστημα με άγνωστους τα πλάτη Α και Β. Συνεπώς για να έχει το σύστημα αυτό μη μηδενική λύση (δηλαδή για να είναι $A \neq 0$ και $B \neq 0$) θα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών του να είναι μηδενική, οπότε:

$$\begin{vmatrix} m\omega^2 - 2k & k \\ k & m\omega^2 - 2k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (m\omega^2 - 2k)^2 - k^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m\omega^2 - 2k + k)(m\omega^2 - 2k - k) = 0 \Rightarrow (m\omega^2 - k)(m\omega^2 - 3k) = 0$$

Άρα οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι: $\boxed{\omega_1^2 = \dfrac{k}{m} \quad \text{και} \quad \omega_2^2 = \dfrac{3k}{m}}$

Οι συχνότητες ω_1 και ω_2, με τις οποίες οι μάζες μπορούν να εκτελούν αρμονικές ταλαντώσεις, ονομάζονται **ιδιοσυχνότητες** του συστήματος ή **συχνότητες κανονικών τρόπων ταλάντωσης**.

Προκειμένου να περιγραφούν τα σχήματα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης γίνεται αντικατάσταση των τιμών ω_1 και ω_2 διαδοχικά σε μια από τις γραμμικά εξαρτημένες εξισώσεις **(1–16)**. Έτσι τελικά προκύπτει ο λόγος των πλατών των ταλαντώσεων των δύο μαζών:

Για $\omega = \omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ είναι : $\dfrac{A}{B} = 1$ **1ος τρόπος**

και για $\omega = \omega_2 = \sqrt{\dfrac{3k}{m}}$ είναι : $\dfrac{A}{B} = -1$ **2ος τρόπος**

Αν τέλος αντικατασταθεί στις σχέσεις **(1–14)** $A = B = A_1$ και $A = -B = A_2$ προκύπτουν οι δύο τρόποι ταλάντωσης ως:

1ος τρόπος:
$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$
$$x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

2ος τρόπος:
$$x_1(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$
$$x_2(t) = -A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

(1–18)

Οι ταλαντώσεις **(1–18)** ονομάζονται **κανονικοί τρόποι ταλάντωσης του συστήματος (normal modes)**.

Στη γενικότερη περίπτωση όπου έχουν ταυτόχρονα διεγερθεί και οι δύο τρόποι ταλάντωσης, οι σχέσεις που περιγράφουν την κίνηση των μαζών του συστήματος θα δίνονται από την υπέρθεση των σχέσεων που περιγράφουν την κίνηση σε κάθε κανονικό τρόπο, δηλαδή:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$
$$x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

(1–19)

Οι σταθερές A_1, A_2 για τα πλάτη και φ_1, φ_2 για τις φάσεις μπορούν να υπολογιστούν από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος, δηλαδή από τις αρχικές θέσεις και τις αρχικές ταχύτητες των δύο μαζών.

Κανονικές συντεταγμένες

Προσθέτοντας και αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις **(1–13)** προκύπτει το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων :

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) &= -k(x_1 + x_2) \\ m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) &= -3k(x_1 - x_2) \end{aligned} \qquad \textbf{(1–20)}$$

Οπότε ορίζοντας τις νέες μεταβλητές

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{και} \quad y_2 = \frac{x_1 - x_2}{2} \qquad \textbf{(1–21)}$$

και αντικαθιστώντας τις στις **(1–20)** προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_1 &= -ky_2 \Rightarrow \ddot{y}_1 + \frac{k}{m} y_1 = 0 \\ m\ddot{y}_2 &= -3ky_2 \Rightarrow \ddot{y}_2 + \frac{3k}{m} y_2 = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(1–22)}$$

Παρατηρείται ότι ενώ οι αρχικές εξισώσεις κίνησης **(1–13)** αποτελούν ένα σύστημα συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων, οι εξισώσεις **(1–22)** είναι ασύζευκτες, αφού κάθε μία περιέχει μόνο μια μεταβλητή.

Οι μεταβλητές y_1 και y_2 με τη βοήθεια των οποίων οι αρχικές εξισώσεις κίνησης μετασχηματίστηκαν στην απλούστερη μορφή των εξισώσεων **(1–22)** ονομάζονται **κανονικές συντεταγμένες** και στην περίπτωση του προβλήματος αυτού έχουν συγκεκριμένη φυσική σημασία: η y_1 περιγράφει τη θέση του κέντρου μάζας του συστήματος, ενώ η y_2 τη σχετική θέση της μίας μάζας ως προς την άλλη.

Κάθε εξίσωση από τις **(1–22)** περιγράφει την κίνηση ενός αρμονικού ταλαντωτή και προφανώς η λύση τους είναι:

$$y_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \text{και} \quad y_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad \textbf{(1–23)}$$

όπου $$\omega_1^2 = \frac{k}{m} \quad \text{και} \quad \omega_2^2 = \frac{3k}{m}$$

Δηλαδή είναι οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης, εκείνες ακριβώς που προέκυψαν και με την μέθοδο των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.

Από τις εξισώσεις **(1–21)** προκύπτουν οι αρχικές μεταβλητές x_1 και x_2 του προβλήματος ως:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2 \\ x_2 &= y_1 - y_2 \end{aligned} \qquad \textbf{(1–24)}$$

και σύμφωνα με τις εξισώσεις **(1–23)** οι συναρτήσεις x_1 και x_2 θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) &= A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \qquad \textbf{(1–25)}$$

Οι συναρτήσεις αυτές υποδεικνύουν το **σχήμα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης** του συστήματος. Επομένως αν έχει διεγερθεί μόνο ο τρόπος ταλάντωσης με συχνότητα ω_1, θα πρέπει το πλάτος A_2 που αντιστοιχεί στον τρόπο ταλάντωσης με συχνότητα ω_2 να είναι μηδενικό, ενώ αντίστοιχα αν διεγερθεί μόνο ο τρόπος ταλάντωσης με συχνότητα ω_2 θα πρέπει το πλάτος A_1 να είναι μηδενικό. Έτσι από τις σχέσεις **(1–25)** προκύπτουν οι δύο κανονικοί τρόποι ταλάντωσης του συστήματος ως:

1ος τρόπος: Για $\omega_1^2 = \dfrac{k}{m}$:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2(t) &= A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \end{aligned}$$

2ος τρόπος: Για $\omega_2^2 = \dfrac{3k}{m}$:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) &= -A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}$$

Παρατηρείται ότι στον πρώτο τρόπο ταλάντωσης τα πλάτη είναι ίσα και οι δύο μάζες του συστήματος κινούνται στην ίδια κατεύθυνση, ενώ στο δεύτερο τρόπο ταλάντωσης, οι μάζες κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις με ίσα αλλά αντίθετα πλάτη. Εναλλακτικά εστιάζοντας την προσοχή όχι στις ταλαντούμενες μάζες, αλλά στο ελατήριο που τις συνδέει, παρατηρείται ότι στον τρόπο ταλάντωσης με συχνότητα ω_1 το ελατήριο εκτελεί παλινδρομική κίνηση χωρίς να παραμορφώνεται, ενώ στην ταλάντωση με συχνότητα ω_2 το ελατήριο παραμορφώνεται, αλλά με το κέντρο μάζας του σταθερό. Δηλαδή τα αποτελέσματα αυτά ταυτίζονται με τα αποτελέσματα της μεθόδου των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.

Παρατηρήσεις:

1. Το πλήθος των τρόπων ταλάντωσης ενός συστήματος συζευγμένων ταλαντωτών είναι ίσο με τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας του συστήματος.

2. Σε κάθε κανονικό τρόπο ταλάντωσης όλα τα κινητά μέρη του συστήματος ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα και την ίδια φάση που είναι χαρακτηριστικές αυτού του συγκεκριμένου τρόπου.

3. Αν στο σύστημα έχουν διεγερθεί όλοι οι τρόποι ταλάντωσης, τότε η γενική κίνηση του συστήματος προκύπτει ως υπέρθεση όλων των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος.

Μεθοδολογία

Με τον τρόπο που αναπτύχθηκε στην παράγραφο αυτή προσδιορίζονται οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης ενός συστήματος και οι αντίστοιχοι λόγοι των πλατών. Συνοπτικά ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία:

1) Σύμφωνα με τον 2^{o} νόμο του Newton γράφονται οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης του συστήματος. Προσέξτε ότι οι διαφορικές αυτές εξισώσεις είναι τόσες, όσοι και οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος, δηλαδή όσες και οι μεταβλητές που περιγράφουν τη θέση των κινητών μερών του συστήματος.

2) Στη συνέχεια κάθε μεταβλητή θέσης q αντικαθίσταται στις παραπάνω διαφορικές εξισώσεις με μια σταθερή A_i και η επιτάχυνση $\ddot{q}$ με $-\omega^2 A_i$ και έτσι προκύπτει ένα αλγεβρικό σύστημα με αγνώστους τις σταθερές A_i, που εκφράζουν τα πλάτη κάθε κινητού μέρους του συστήματος.

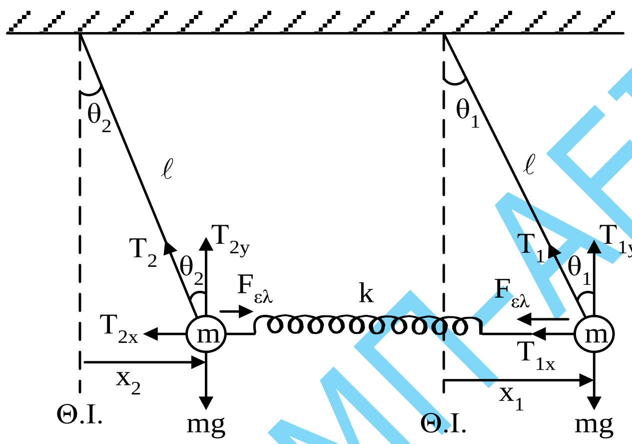
3) Απαιτώντας η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος να είναι μηδενική προσδιορίζονται οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος.

4) Για καθεμία από τις παραπάνω συχνότητες υπολογίζονται από το σύστημα οι αντίστοιχοι λόγοι των πλατών.

4. Απλά συστήματα συζευγμένων μηχανικών ταλαντωτών

Στην παράγραφο αυτή εξετάζονται πέντε απλά συστήματα ταλαντωτών, όπου εφαρμόζονται οι μέθοδοι αναζήτησης των κανονικών τρόπων ταλάντωσης που αναπτύχθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο.

α) Συζευγμένα εκκρεμή



Σχήμα 1.5

Το σύστημα του **Σχήματος 1.5** αποτελείται από δύο όμοια εκκρεμή μάζας m και μήκους ℓ, τα οποία έχουν συζευχθεί με ένα ελατήριο σταθεράς k.
Για τη μελέτη της κίνησης των δυο μαζών των εκκρεμών επιλέγονται ως συντεταγμένες οι απομακρύνσεις x_1 και x_2 ($x_1>x_2$) από τη θέση ισορροπίας. Οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα φαίνονται στο σχήμα και επειδή $x_1>x_2$ το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί και ασκεί στις δυο μάζες δυνάμεις $k(x_1-x_2)$ που κατευθύνονται προς αυτό.
Άρα σύμφωνα με το 2^o νόμο του Newton οι εξισώσεις κίνησης των δυο μαζών είναι :

- Για το δεξί εκκρεμές :
-

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_1 \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = m\alpha_1 \Rightarrow -T_{1x} - F_{\varepsilon\lambda} = m\alpha_1 \Rightarrow -T_1\sin\theta_1 - k(x_1 - x_2) = m\ddot{x}_1 & \textbf{(1)} \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_{1y} = mg \Rightarrow T_1\cos\theta_1 = mg \Rightarrow T_1 = \dfrac{mg}{\cos\theta_1} & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Οπότε η **(1)** λόγω της **(2)** δίνει : $m\ddot{x}_1 = -mg\tan\theta_1 - k(x_1 - x_2)$

Αλλά λόγω μικρών απομακρύνσεων στην προσέγγιση μικρών γωνιών είναι :

$\tan\theta_1 \cong \sin\theta_1 = x_1/\ell$ οπότε :

$$m\ddot{x}_1 = -\frac{mg}{\ell}x_1 - k(x_1 - x_2) \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\left(\frac{k}{m} + \frac{g}{\ell}\right)x_1 + \frac{k}{m}x_2 \quad \textbf{(3)}$$

• Για το αριστερό εκκρεμές :

•

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_2 \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = m\alpha_2 \Rightarrow -T_{2x} - F_{\varepsilon\lambda} = m\alpha_2 \Rightarrow -T_2\sin\theta_2 + k(x_1 - x_2) = m\ddot{x}_2 & \textbf{(4)} \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_{2y} = mg \Rightarrow T_2\cos\theta_2 = mg \Rightarrow T_2 = \dfrac{mg}{\cos\theta_2} & \textbf{(5)} \end{cases}$$

Οπότε η **(4)** λόγω της **(5)** δίνει : $m\ddot{x}_2 = -mg\tan\theta_2 + k(x_1 - x_2)$

Αλλά λόγω των μικρών απομακρύνσεων είναι : $\tan\theta_2 \cong \sin\theta_2 = x_2/\ell$

οπότε : $$m\ddot{x}_2 = -\frac{mg}{\ell}x_2 + k(x_1 - x_2) \Rightarrow \ddot{x}_2 = \frac{k}{m}x_1 - \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{\ell}\right)x_2 \quad \textbf{(6)}$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των κανονικών συντεταγμένων, δηλαδή προσθέτοντας και αφαιρώντας τις σχέσεις **(3)** και **(6)** προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{aligned} &\ddot{y}_1 + \frac{g}{\ell}y_1 = 0 \\ &\ddot{y}_2 + \left(\frac{2k}{m} + \frac{g}{\ell}\right)y_2 = 0 \end{aligned} \quad \textbf{(7)}$$

όπου οι νέες μεταβλητές y_1 και y_2 είναι οι κανονικές συντεταγμένες του προβλήματος και δίνονται από τις σχέσεις:

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{και} \quad y_2 = \frac{x_1 - x_2}{2} \quad \textbf{(8)}$$

ενώ οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης είναι:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad \text{και} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m} + \frac{g}{\ell}} \quad \textbf{(9)}$$

Η γενική λύση των διαφορικών εξισώσεων **(7)** είναι:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y_2(t) &= A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \qquad \textbf{(10)}$$

Άρα στη γενική περίπτωση διέγερσης, η θέση των δύο μαζών θα δίνεται από την υπέρθεση των σχέσεων **(10)**, δηλαδή:

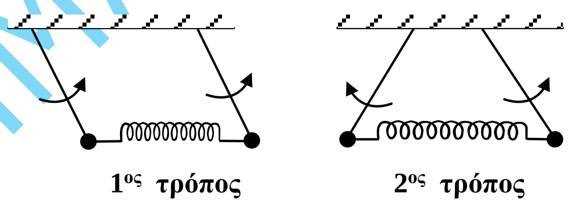
$$\begin{aligned} x_1(t) &= y_1(t) + y_2(t) \Rightarrow x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) &= y_1(t) - y_2(t) \Rightarrow x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \qquad \textbf{(11)}$$

Ενώ για τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης ισχύει:

1ος τρόπος: Για $\omega_1^2 = \dfrac{g}{\ell}$ είναι : $\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \end{aligned}$

2ος τρόπος: Για $\omega_2^2 = \dfrac{2k}{m} + \dfrac{g}{\ell}$ είναι : $\begin{aligned} x_1(t) &= A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) &= -A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}$

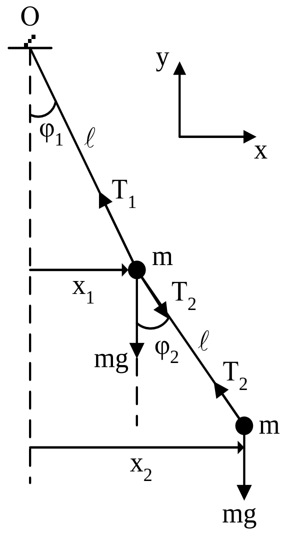
Σχηματικά οι δύο αυτοί κανονικοί τρόποι ταλάντωσης φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα:



Σχήμα 1.6

Παρατηρείται ότι στον πρώτο τρόπο ταλάντωσης δεν έχουμε παραμόρφωση του ελατηρίου και τα δύο εκκρεμή ταλαντώνονται με την ίδια φάση και πλάτος σαν να ήταν ελεύθερα, ενώ στο δεύτερο τρόπο η ταλάντωση χαρακτηρίζεται από το ίδιο πλάτος, αλλά αντίθετη φάση.

β) Διπλό εκκρεμές

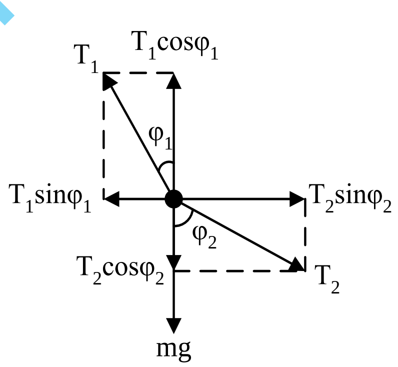


Σχήμα 1.7

Το σύστημα αυτό αποτελείται από δύο μάζες m, όπου η πρώτη κινείται σε σταθερή απόσταση ℓ από το σημείο αναρτήσεως O, ενώ η δεύτερη κινείται σε σταθερή απόσταση ℓ από την πρώτη μάζα.
Η κίνηση του συστήματος θεωρείται ότι γίνεται μόνο στο κατακόρυφο επίπεδο και έχει δύο βαθμούς ελευθερίας, αφού οι γωνίες φ_1 και φ_2 καθορίζουν τις θέσεις των μαζών.
Στην τυχαία θέση του συστήματος η δεύτερη μάζα δέχεται την τάση του νήματος T_2 και το βάρος mg, ενώ στην πρώτη μάζα ασκείται το βάρος της mg και οι τάσεις T_1 και T_2 από τα δύο νήματα.

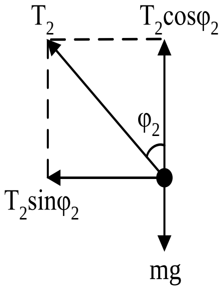
Θεωρώντας ως μεταβλητές του προβλήματος τις αποστάσεις x_1 και x_2 των δύο μαζών από την κατακόρυφο και αναλύοντας τις δυνάμεις στους άξονες x και y, ο $2^{ος}$ νόμος του Newton δίνει:

• Για την πρώτη μάζα:



$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = ma_x \Rightarrow T_2 \sin\varphi_2 - T_1 \sin\varphi_1 = m\ddot{x}_1 & \textbf{(1)} \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_1 \cos\varphi_1 - T_2 \cos\varphi_2 - mg = 0 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

- Για τη δεύτερη μάζα:
-



$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = m\alpha_x \Rightarrow -T_2 \sin\varphi_2 = m\ddot{x}_2 & \textbf{(3)} \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_2 \cos\varphi_2 - mg = 0 & \textbf{(4)} \end{cases}$$

Από τη σχέση **(4)** προκύπτει ότι $T_2 = mg/\cos\varphi_2$ και η **(2)** δίνει: $T_1 = 2mg/\cos\varphi_1$. Επομένως αντικαθιστώντας αυτές στις **(1)** και **(3)** προκύπτει:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= mg\tan\varphi_2 - 2mg\tan\varphi_1 \\ m\ddot{x}_2 &= -mg\tan\varphi_2 \end{aligned} \qquad \textbf{(5)}$$

Αλλά επειδή οι γωνίες απόκλισης φ_1 και φ_2 είναι πολύ μικρές ισχύουν οι σχέσεις:

$$\tan\varphi_1 \cong \sin\varphi_1 = \frac{x_1}{\ell} \qquad \text{και} \qquad \tan\varphi_2 \cong \sin\varphi_2 = \frac{x_2 - x_1}{\ell} \qquad \textbf{(6)}$$

Άρα αντικαθιστώντας τις **(6)** στις **(5)** προκύπτει:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= g\frac{(x_2-x_1)}{\ell} - 2g\frac{x_1}{\ell} \Rightarrow \ddot{x}_1 + \frac{3g}{\ell}x_1 - \frac{g}{\ell}x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 &= -g\frac{(x_2-x_1)}{\ell} \Rightarrow \ddot{x}_2 + \frac{g}{\ell}(x_2-x_1) = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(7)}$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο των κανονικών τρόπων ταλάντωσης υποθέτοντας ότι $x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi)$, $x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi)$ και αντικαθιστώντας στις **(7)** προκύπτει:

$$\begin{aligned} -\omega^2 A_1 + \frac{3g}{\ell}A_1 - \frac{g}{\ell}A_2 = 0 &\Rightarrow \left(\frac{3g}{\ell} - \omega^2\right)A_1 - \frac{g}{\ell}A_2 = 0 \\ -\omega^2 A_2 + \frac{g}{\ell}(A_2 - A_1) = 0 &\Rightarrow -\frac{g}{\ell}A_1 + \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2\right)A_2 = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(8)}$$

Συνεπώς ο μηδενισμός της ορίζουσας των συντελεστών του ομογενούς αυτού συστήματος δίνει τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης ως:

$$\begin{vmatrix} \frac{3g}{\ell} - \omega^2 & -\frac{g}{\ell} \\ -\frac{g}{\ell} & \frac{g}{\ell} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega^4 - \frac{4g}{\ell}\omega^2 + \frac{2g^2}{\ell^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = \frac{g}{\ell}(2-\sqrt{2}) \qquad \text{και} \qquad \omega_2^2 = \frac{g}{\ell}(2+\sqrt{2})$$

Ο λόγος των πλατών ταλάντωσης βρίσκεται με αντικατάσταση των τιμών ω_1 και ω_2 διαδοχικά σε μια από τις εξισώσεις **(8)** ως:

Για $\omega_1^2 = \frac{g}{\ell}(2-\sqrt{2})$ είναι : $\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ **1ος τρόπος**

και για $\omega_2^2 = \frac{g}{\ell}(2+\sqrt{2})$ είναι : $\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{1-\sqrt{2}}$ **2ος τρόπος**

Άρα τα σχήματα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης είναι:

1ος τρόπος:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

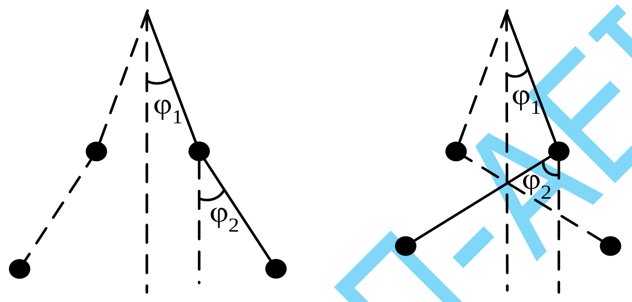
$$x_2(t) = (1+\sqrt{2})A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

2ος τρόπος:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

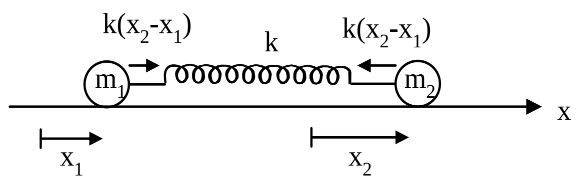
$$x_2(t) = (1-\sqrt{2})A_1 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Σχηματικά οι δύο αυτοί κανονικοί τρόποι ταλάντωσης φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα:



1ος τρόπος **2ος τρόπος**

γ) Διατομικό μόριο



Έστω το μοντέλο ενός διατομικού μορίου που αποτελείται από δύο μάζες m_1 και m_2 και οι αλληλεπιδράσεις των ατόμων αυτών προσεγγίζονται από ένα ελατήριο σταθεράς k. Επιλέγοντας ως συντεταγμένες x_1, x_2 τις απομακρύνσεις των ατόμων από τη θέση ισορροπίας τους και αν υποτεθεί χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x_1 < x_2$, τότε το ελατήριο θεωρείται επιμηκυμένο και ασκεί στις δύο μάζες δυνάμεις $k(x_2 - x_1)$ που κατευθύνονται προς αυτό.

Συνεπώς ο 2ος νόμος του Newton για τις δύο μάζες δίνει:

$$\begin{aligned} &\Sigma\vec{F} = m_1\vec{\alpha}_1 \Rightarrow k(x_2 - x_1) = m_1\ddot{x}_1 \Rightarrow \ddot{x}_1 + \frac{k}{m_1}x_1 - \frac{k}{m_1}x_2 = 0 \\ &\Sigma\vec{F} = m_2\vec{\alpha}_2 \Rightarrow -k(x_2 - x_1) = m_2\ddot{x}_2 \Rightarrow \ddot{x}_2 - \frac{k}{m_2}x_1 + \frac{k}{m_2}x_2 = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(1)}$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο των κανονικών τρόπων ταλάντωσης, θεωρώντας λύσεις της μορφής $x_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, $x_2(t) = B\cos(\omega t + \varphi)$ και αντικαθιστώντας στο σύστημα **(1)** προκύπτει:

$$\begin{aligned} &-A\omega^2 + \frac{k}{m_1}A - \frac{k}{m_1}B = 0 \Rightarrow \left(\frac{k}{m_1} - \omega^2\right)A - \frac{k}{m_1}B = 0 \\ &-B\omega^2 - \frac{k}{m_2}A + \frac{k}{m_2}B = 0 \Rightarrow -\frac{k}{m_2}A + \left(\frac{k}{m_2} - \omega^2\right)B = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(2)}$$

Ο μηδενισμός της ορίζουσας των συντελεστών του ομογενούς αυτού συστήματος δίνει τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης ως:

$$\begin{vmatrix} \frac{k}{m_1}-\omega^2 & -\frac{k}{m_1} \\ -\frac{k}{m_2} & \frac{k}{m_2}-\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\frac{k}{m_1}-\omega^2\right)\left(\frac{k}{m_2}-\omega^2\right)-\frac{k^2}{m_1 m_2}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^4 - \frac{k}{m_1}\omega^2 - \frac{k}{m_2}\omega^2 + \frac{k^2}{m_1 m_2} - \frac{k^2}{m_1 m_2} = 0 \Rightarrow \omega^4 - \left(\frac{k}{m_1}+\frac{k}{m_2}\right)\omega^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2\left[\omega^2 - \frac{k(m_1+m_2)}{m_1 m_2}\right] = 0 \Rightarrow \omega_1^2 = 0 \quad \text{και} \quad \omega_2^2 = \frac{k(m_1+m_2)}{m_1 m_2} = \frac{k}{\mu}$$

όπου $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \Rightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ η **ανηγμένη μάζα** του συστήματος των δύο μαζών.

Αντικαθιστώντας τις τιμές των ω_1 και ω_2 διαδοχικά σε μια από τις εξισώσεις **(2)** προκύπτει ο λόγος των πλατών ταλάντωσης ως εξής:

Για $\omega_1^2 = 0$ είναι: $\frac{A}{B} = 1$ (δηλαδή το σύστημα εκτελεί μεταφορική κίνηση σαν ένα στερεό σώμα).

Οπότε : $x_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ και $x_2(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ **1ος τρόπος**

Ενώ για $\omega_2^2 = \frac{k(m_1+m_2)}{m_1 m_2}$ είναι: $\frac{A}{B} = -\frac{m_2}{m_1}$

οπότε :

$x_1(t) = A\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ και $x_2(t) = -\frac{m_1}{m_2} A\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ **2ος τρόπος**

Εναλλακτικά σύμφωνα με τη μέθοδο των κανονικών συντεταγμένων, προσθέτοντας και αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις **(1)** προκύπτει το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

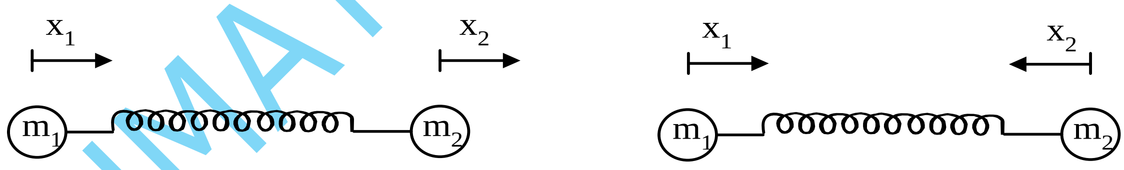
$$\left.\begin{aligned} & m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0 \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}\right) = 0 \\ & \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -\left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right)(x_1 - x_2) \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(3)}$$

Ορίζοντας τις νέες μεταβλητές $\xi_1 = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$ και $\xi_2 = x_1 - x_2$ (κανονικές συντεταγμένες) οι εξισώσεις **(3)** δίνουν:

$$\ddot{\xi}_1 = 0 \quad \text{και} \quad \ddot{\xi}_2 + \left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right)\xi_2 = 0$$

και περιγράφουν αντίστοιχα τους δύο κανονικούς τρόπους ταλάντωσης με $\omega_1^2 = 0$ και $\omega_2^2 = \dfrac{k}{m_1} + \dfrac{k}{m_2} = \dfrac{k(m_1 + m_2)}{m_1m_2}$.

Σχηματικά οι δύο αυτοί κανονικοί τρόποι ταλάντωσης φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα.



$\omega_1^2 = 0, \quad x_1 = x_2$

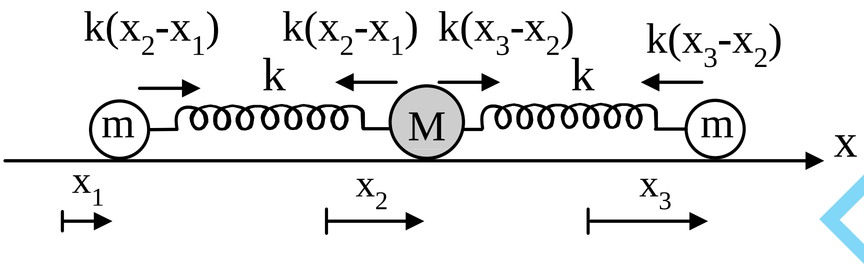
1ος τρόπος

$\omega_2^2 = \dfrac{k(m_1 + m_2)}{m_1m_2}, \quad x_2 = -\dfrac{m_1}{m_2}x_1$

2ος τρόπος

Σχήμα 1.10

δ) Τριατομικό μόριο



Σχήμα 1.11

Έστω το μοντέλο ενός γραμμικού συμμετρικού τριατομικού μορίου π.χ. του μορίου του διοξειδίου του άνθρακα Ο – C – Ο. Στο μόριο αυτό και στη θέση ισορροπίας του, τα δύο άτομα του οξυγόνου βρίσκονται συμμετρικά εκατέρωθεν σε ίσες αποστάσεις από το άτομο του άνθρακα. Η αλληλεπίδραση των ατόμων του οξυγόνου θεωρούνται αμελητέες και έτσι θεωρούνται μόνο οι εγγύτατες αλληλεπιδράσεις των ατόμων του μορίου, οι οποίες προσεγγίζονται με δύο ελατήρια σταθεράς k.

Σε μια τυχαία θέση του συστήματος αν x_1, x_2, x_3 είναι οι μετατοπίσεις των ατόμων από τη θέση ισορροπίας τους με $x_1 < x_2 < x_3$, τότε το πρώτο ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $x_2 - x_1$, ενώ το δεύτερο κατά $x_3 - x_2$. Επομένως οι δυνάμεις που ασκούνται στα τρία άτομα από τα ελατήρια είναι αυτές που φαίνονται στο σχήμα και ο 2[ος] νόμος του Newton για την κίνηση του κάθε ατόμου στον άξονα της κίνησης x δίνει:

$$\Sigma\vec{F} = m_1\vec{\alpha}_1 \Rightarrow k(x_2 - x_1) = m_1\ddot{x}_1 \Rightarrow \ddot{x}_1 - \frac{k}{m}(x_2 - x_1) = 0$$

$$\Sigma\vec{F} = M\vec{\alpha}_2 \Rightarrow k(x_3 - x_2) - k(x_2 - x_1) = M\ddot{x}_2 \Rightarrow \ddot{x}_2 + \frac{2k}{M}x_2 - \frac{k}{M}x_1 - \frac{k}{M}x_3 = 0 \quad \textbf{(1)}$$

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_3 \Rightarrow -k(x_3 - x_2) = m\ddot{x}_3 \Rightarrow \ddot{x}_3 + \frac{k}{m}(x_3 - x_2) = 0$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο των κανονικών τρόπων ταλάντωσης, θεωρώντας λύσεις της μορφής $x_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, $x_2(t) = B\cos(\omega t + \varphi)$, $x_3(t) = C\cos(\omega t + \varphi)$ και αντικαθιστώντας στο σύστημα **(1)** προκύπτει:

$$-A\omega^2-\frac{k}{m}(B-A)=0\Rightarrow\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)A-\frac{k}{m}B=0$$

$$-B\omega^2-\frac{2k}{M}B-\frac{k}{M}A-\frac{k}{M}C=0\Rightarrow-\frac{k}{M}A+\left(\frac{2k}{M}-\omega^2\right)B-\frac{k}{M}C=0 \qquad \textbf{(2)}$$

$$-C\omega^2-\frac{k}{m}(C-B)=0\Rightarrow-\frac{k}{m}B+\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)C=0$$

Ο μηδενισμός της ορίζουσας των συντελεστών του ομογενούς αυτού συστήματος δίνει τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης:

$$\begin{vmatrix} \frac{k}{m}-\omega^2 & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{M} & \frac{2k}{M}-\omega^2 & -\frac{k}{M} \\ 0 & -\frac{k}{m} & \frac{k}{m}-\omega^2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)\begin{vmatrix} \frac{2k}{M}-\omega^2 & -\frac{k}{M} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m}-\omega^2 \end{vmatrix}-\left(\frac{-k}{m}\right)\begin{vmatrix} -\frac{k}{M} & -\frac{k}{M} \\ 0 & \frac{k}{m}-\omega^2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)^2\left(\frac{2k}{M}-\omega^2\right)-\frac{k^2}{mM}\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)-\frac{k^2}{mM}\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)^2\left(\frac{2k}{M}-\omega^2\right)-\frac{2k^2}{mM}\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)\left[\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)\left(\frac{2k}{M}-\omega^2\right)-\frac{2k^2}{mM}\right]=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)\left[\omega^4-\left(\frac{k}{m}+\frac{2k}{M}\omega^2\right)\right]=0\Rightarrow \omega_1^2=0,\quad \omega_2^2=\frac{k}{m}\quad \text{και}\quad \omega_3^2=\frac{k}{m}+\frac{2k}{M}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των ω_1, ω_2 και ω_3 διαδοχικά στις εξισώσεις **(2)** προκύπτει ο λόγος των πλατών ταλάντωσης ως εξής:

1ος τρόπος

- Για $\omega_1^2=0$ είναι: A=B=C δηλαδή: $\frac{B}{A}=\frac{C}{A}=1$

οπότε :

$x_1(t)=A\cos(\omega_1 t+\varphi_1), x_2(t)=A\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$ και $x_3(t)=A\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$

2ος τρόπος

- Για $\omega_2^2=\frac{k}{m}$ είναι: B=0 και C=-A δηλαδή: $\frac{B}{A}=0$ και $\frac{C}{A}=-1$

οπότε : $x_1(t)=A\cos(\omega_2 t+\varphi_2), x_2(t)=0$ και $x_3(t)=-A\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$

3ος τρόπος

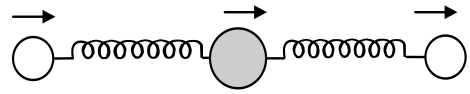
- Για $\omega_3^2=\frac{k}{m}+\frac{2k}{M}$ είναι: $B=-\frac{2m}{M}A$ και $C=-A$ δηλαδή $\frac{B}{A}=-\frac{2m}{M}$ και $\frac{C}{A}=-1$

οπότε : $x_1(t)=A\cos(\omega_3 t+\varphi_3)$, $x_2(t)=-\frac{2m}{M}A\cos(\omega_3 t+\varphi_3)$ και

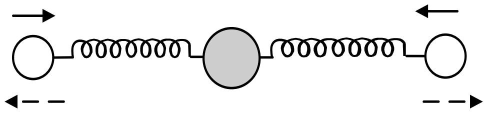
$x_3(t)=-A\cos(\omega_3 t+\varphi_3)$

Δηλαδή ο πρώτος τρόπος ταλάντωσης με $\omega_1=0$ αντιστοιχεί στην απλή μεταφορική κίνηση του μορίου χωρίς εσωτερικές ταλαντώσεις, ο δεύτερος τρόπος ταλάντωσης με $\omega_2=\sqrt{k/m}$ αντιστοιχεί στο κεντρικό σωματίδιο να παραμένει ακίνητο και τα άλλα δύο να ταλαντώνονται με ίσα πλάτη και αντίθετη φάση, ενώ ο τρίτος τρόπος ταλάντωσης με $\omega_3=\sqrt{k/m+2k/M}$ αντιστοιχεί στα δύο ακραία άτομα να έχουν ίσα πλάτη και την ίδια φάση, ενώ το κεντρικό να κινείται με αντίθετη φάση προς τα ακραία και με πλάτος 2m/M φορές το πλάτος αυτών.

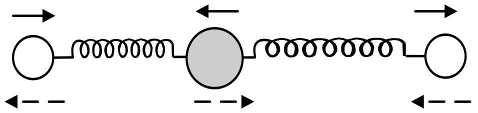
Οι φυσικές κινήσεις που συνδέονται με τις ιδιοσυχνότητες ω_1, ω_2 και ω_3 παριστάνονται στο ακόλουθο σχήμα.



$\omega_1 = 0$ **1ος τρόπος**



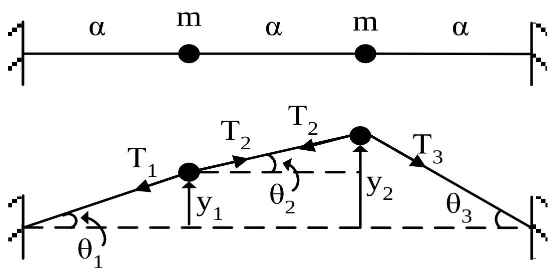
$\omega_2 = \sqrt{k/m}$ **2ος τρόπος**



$\omega_3 = \sqrt{k/m + 2k/M}$ **3ος τρόπος**

Σχήμα 1.12

ε) Χορδή με σφαιρίδια



Σχήμα 1.13

Το σύστημα του **Σχήματος 1.13** αποτελείται από μια ομογενή ελαστική χορδή που τείνεται με τάση T και φέρει δύο σφαιρίδια μάζας m που απέχουν μεταξύ τους, αλλά και από τα τοιχώματα, απόσταση α. Θεωρείται ότι οι δύο μάζες μπορούν να εκτελούν **εγκάρσιες** ταλαντώσεις, δηλαδή κινούνται μόνο σε διευθύνσεις κάθετες προς τη χορδή.
Έστω η τυχαία θέση του συστήματος, όπου οι μάζες έχουν μετατοπιστεί κατά y_1 και y_2 αντίστοιχα από τη θέση ισορροπίας (με $y_1, y_2 << \alpha$, οπότε και οι γωνίες θ_1, θ_2 και θ_3 θεωρούνται πολύ μικρές). Σε κάθε μάζα ασκείται μια δύναμη επαναφοράς που είναι ίση με το άθροισμα των κάθετων συνιστωσών των τάσεων των εκατέρωθεν τμημάτων της χορδής, ενώ η δύναμη του βάρους κάθε σφαιριδίου αμελείται. Έτσι οι δυνάμεις επαναφοράς που ασκούνται στις δύο μάζες είναι:

$$F_1 = -T_1 \sin\theta_1 + T_2 \sin\theta_2 \quad \text{και} \quad F_2 = -T_2 \sin\theta_2 - T_3 \sin\theta_3 \qquad \textbf{(1)}$$

Λόγω όμως ισορροπίας των δύο μαζών κατά την οριζόντια διεύθυνση x κάθε οριζόντια συνιστώσα της τάσης $T_i \cos\theta_i$ είναι ίση με την τάση T που είχε αρχικά τεντώσει τη χορδή. Δηλαδή:

$$T_1 \cos\theta_1 = T_2 \cos\theta_2 = T \quad \text{και} \quad T_2 \cos\theta_2 = T_3 \cos\theta_3 = T$$

Από τις παραπάνω προκύπτει ότι $T_1 = T/\cos\theta_1$, $T_2 = T/\cos\theta_2$ και $T_3 = T/\cos\theta_3$ και αντικαθιστώντας στις **(1)** προκύπτει:

$$F_1 = -T\tan\theta_1 + T\sin\theta_2 \quad \text{και} \quad F_2 = -T\tan\theta_2 - T\tan\theta_3 \qquad \textbf{(2)}$$

Επίσης από το σχήμα εύκολα προκύπτει ότι:

$$\tan\theta_1 = \frac{y_1}{\alpha}, \quad \tan\theta_2 = \frac{y_2 - y_1}{\alpha} \quad \text{και} \quad \tan\theta_3 = \frac{y_2}{\alpha}$$

Οπότε οι **(2)** γίνονται: $F_1 = -\frac{T}{\alpha}y_1 + \frac{T}{\alpha}(y_2 - y_1) = \frac{T}{\alpha}(-2y_1 + y_2)$

και $F_2 = -\frac{T}{\alpha}(y_2 - y_1) - \frac{T}{\alpha}y_2 = \frac{T}{\alpha}(y_1 - 2y_2)$

Συνεπώς σύμφωνα με τον 2^o νόμο του Newton οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης των μαζών είναι:

$$\begin{aligned} F_1 = m\alpha_1 &\Rightarrow \frac{T}{\alpha}(-2y_1 + y_2) = m\ddot{y}_1 \Rightarrow \ddot{y}_1 - \frac{T}{m\alpha}(-2y_1 + y_2) = 0 \\ F_2 = m\alpha_2 &\Rightarrow \frac{T}{\alpha}(y_1 - 2y_2) = m\ddot{y}_2 \Rightarrow \ddot{y}_2 - \frac{T}{m\alpha}(y_1 - 2y_2) = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(3)}$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο των κανονικών τρόπων ταλάντωσης, θεωρώντας λύσεις της μορφής $y_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, $y_2(t) = B\cos(\omega t + \varphi)$ και αντικαθιστώντας στο σύστημα **(3)** προκύπτει:

$$\begin{aligned} -A\omega^2 - \frac{T}{m\alpha}(-2A + B) = 0 &\Rightarrow \left(\frac{2T}{mA} - \omega^2\right)A - \frac{T}{m\alpha}B = 0 \\ -B\omega^2 - \frac{T}{\alpha}(A - 2B) = 0 &\Rightarrow -\frac{T}{m\alpha}A + \left(\frac{2T}{m\alpha} - \omega^2\right)B = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(4)}$$

Ο μηδενισμός της ορίζουσας των συντελεστών του ομογενούς αυτού συστήματος παρέχει τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης:

$$\begin{vmatrix} \frac{2T}{m\alpha} - \omega^2 & -\frac{T}{m\alpha} \\ -\frac{T}{m\alpha} & \frac{2T}{m\alpha} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\frac{2T}{m\alpha} - \omega^2\right)^2 - \frac{T^2}{m^2\alpha^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^4 - \frac{4T}{m\alpha}\omega^2 + \frac{3T^2}{m^2\alpha^2} = 0 \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{T}{m\alpha} \quad \text{και} \quad \omega_2^2 = \frac{3T}{m\alpha}$$

Οι αντίστοιχοι λόγοι πλατών προκύπτουν με αντικατάσταση των ω_1 και ω_2 σε μια από τις σχέσεις **(4)**:

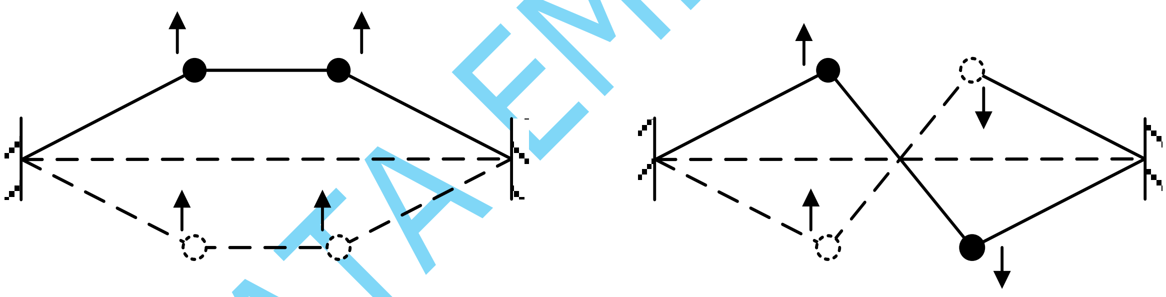
- Για $\omega_1^2 = \dfrac{T}{m\alpha}$ είναι: $\dfrac{B}{A} = 1$

οπότε $y_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ και $y_2(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ **1ος τρόπος**

- Για $\omega_2^2 = \dfrac{3T}{m\alpha}$ είναι: $\dfrac{B}{A} = -1$

οπότε : $y_1(t)=A\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ και $y_2(t)= -A\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ **2ος τρόπος**

Δηλαδή παρατηρείται ότι στον πρώτο τρόπο ταλάντωσης οι μάζες ταλαντώνονται έτσι ώστε να βρίσκονται και οι δύο προς την ίδια πλευρά σε σχέση με τη θέση ισορροπίας τους, ενώ στο δεύτερο τρόπο ταλαντώνονται έτσι ώστε να βρίσκονται σε αντίθετες πλευρές. Σχηματικά οι δύο αυτοί τρόποι ταλάντωσης φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα.



1ος τρόπος **2ος τρόπος**

Σχήμα 1.14

5. Διακροτήματα

Κοινό χαρακτηριστικό όλων των συστημάτων με δύο βαθμούς ελευθερίας που μελετήθηκαν στα προηγούμενα είναι η συμπεριφορά τους, όταν έχουν διεγερθεί ταυτόχρονα και οι δυο τρόποι ταλάντωσης. Όπως έχει αποδειχθεί οι μεταβλητές του προβλήματος τότε, εκφράζονται με τις συναρτήσεις **(1-25)**:

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$
$$x_2(t) = A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1) - A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$

Για απλούστευση αν επιλεγούν κατάλληλα οι αρχικές συνθήκες, έτσι ώστε οι φάσεις να είναι μηδενικές $(\varphi_1 = \varphi_2 = 0)$ και τα πλάτη να είναι ίσα $(A_1 = A_2 = A)$ τότε οι παραπάνω σχέσεις γίνονται :

$$x_1(t) = A(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)$$
$$x_2(t) = A(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) \qquad \textbf{(1–26)}$$

Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

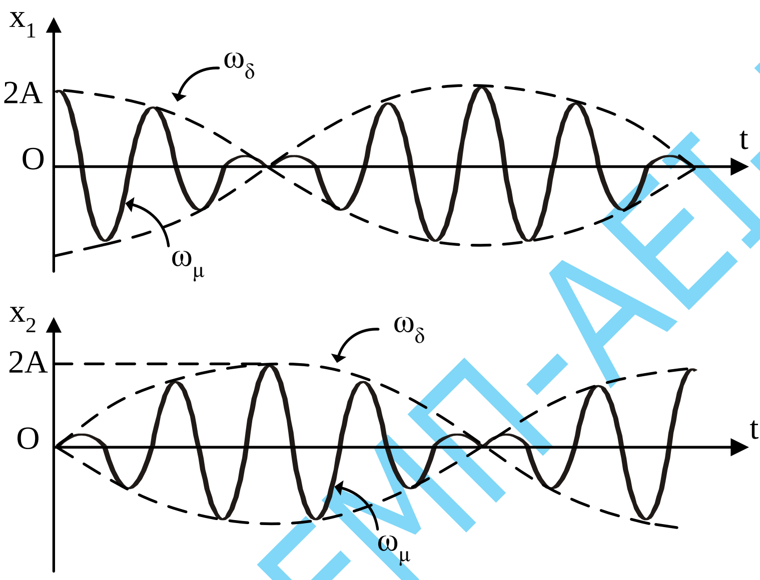
και $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$,

οι σχέσεις **(1-26)** μετασχηματίζονται σε μορφή γινομένου στις:

$$x_1(t) = 2A\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\cdot\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t$$
$$x_2(t) = 2A\sin\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\cdot\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t \qquad \textbf{(1–27)}$$

Παρατηρείται δηλαδή ότι κάθε μια μεταβλητή εξαρτάται από δύο συχνότητες: το ημιάθροισμα των συχνοτήτων των δύο κανονικών τρόπων ταλάντωσης και την ημιδιαφορά τους. Επομένως κάθε μια από τις μεταβλητές $x_1(t)$ και $x_2(t)$ περιγράφει μια ταλάντωση με συχνότητα ίση με το

ημιάθροισμα των συχνοτήτων ω_1 και ω_2, που ονομάζεται **μέση συχνότητα** $\omega_\mu = \omega_1 + \omega_2/2$ και πλάτος που μεταβάλλεται περιοδικά με συχνότητα ίση με την ημιδιαφορά των συχνοτήτων ω_1 και ω_2, που ονομάζεται **συχνότητα διαμόρφωσης** $\omega_\delta = (\omega_2 - \omega_1)/2$. Αυτή η μεταβολή του πλάτους ονομάζεται **διαμόρφωση** και κάθε μια από τις σχέσεις **(1–27)** παριστάνει ένα **διακρότημα**.
Η μορφή των δύο διακροτημάτων **(1–27)** παριστάνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Σχήμα 1.15

Παρατηρείται ότι η βασική διαφορά των δύο διακροτημάτων είναι ότι κάθε ένα φτάνει σε μέγιστο πλάτος όταν το πλάτος του άλλου μηδενίζεται, δηλαδή τα δύο πλάτη παρουσιάζουν μια διαφορά φάσης που είναι ίση με π/2. Αυτό οφείλεται στην εναλλασσόμενη ροή ενέργειας μεταξύ των δύο ταλαντωτών του συστήματος.

6. Αναρμονικός ταλαντωτής

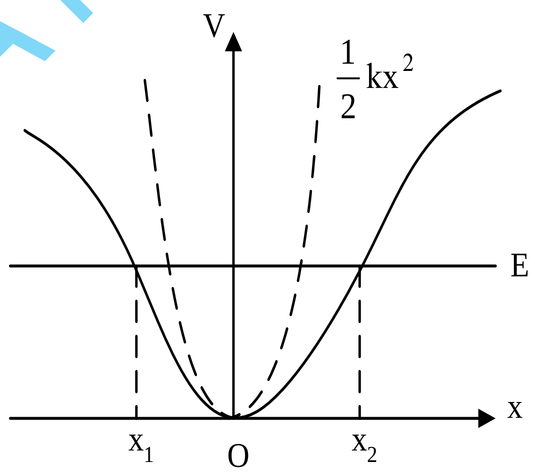
Οι ταλαντώσεις οι οποίες παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα ήταν όλες περιορισμένες ως προς το πλάτος ώστε να ικανοποιούν την εξίσωση κίνησης στην οποία η δύναμη επαναφοράς είναι γραμμική συνάρτηση της μετατόπισης.
Υπάρχουν όμως ταλαντώσεις που δεν είναι αρμονικές, όπως π.χ. η ταλάντωση ενός σωματίου που δέχεται συνιστάμενη δύναμη η οποία δεν είναι ανάλογη της μετατόπισης του x, δηλαδή έστω ότι είναι της μορφής $F=-kx-\lambda x^3$, όπου k και λ θετικές σταθερές. Η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου αυτού είναι:

$$m\ddot{x}=-kx-\lambda x^3 \qquad \textbf{(1–28)}$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η παραπάνω σχέση δεν επαληθεύεται από λύση της μορφής x(t)=Acos(ωt+φ) για καμία τιμή της ω. Αυτό οφείλεται στην ύπαρξη μη γραμμικών όρων, γι' αυτό οι όροι αυτοί λέγονται **αναρμονικοί** και το σύστημα **αναρμονικός ταλαντωτής**.
Παρόλο που το παραπάνω σύστημα δεν εκτελεί αρμονικές κινήσεις, εκτελεί περιοδικές κινήσεις γύρω από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας. Αυτό μπορεί να δειχθεί εύκολα αν παρατηρηθεί ότι η δυναμική ενέργεια του σωματίου είναι:

$$F=-\frac{dV}{dx}\Rightarrow\int_0^V dV=\int_0^x(kx+\lambda x^3)dx\Rightarrow V(x)=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{4}\lambda x^4 \qquad \textbf{(1–29)}$$

Το διάγραμμα της δυναμικής αυτής ενέργειας φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Σχήμα 1.16

Επομένως ανάλογα με την αρχική διέγερση το σωματίδιο θα έχει ολική ενέργεια E=K+V, ενώ η κινητική του ενέργεια θα είναι $K = E - V \geq 0$ και η κίνηση (μη αρμονική ταλάντωση) του σωματιδίου θα γίνεται μέσα στην περιοχή για την οποία ισχύει η παραπάνω συνθήκη, δηλαδή όπως φαίνεται στο σχήμα $x_1 \leq x \leq x_2$.
Ωστόσο για μικρές μετατοπίσεις γύρω από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας, η ταλάντωση δεν διαφέρει πολύ από την αντίστοιχη της απλής αρμονικής ταλάντωσης. Αυτό γίνεται εύκολα φανερό αν η δυναμική ενέργεια αναπτυχθεί σε σειρά Taylor γύρω από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας x=0 ως:

$$V(x) = V(0) + \left(\left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=0} \right) \cdot x + \frac{1}{2} \left(\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=0} \right) \cdot x^2 + \ldots \qquad \textbf{(1–30)}$$

Αλλά επειδή στη θέση ισορροπίας x=0 είναι V(0)=0 και $\left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=0} = F(x=0) = 0$ και επίσης επειδή για μικρές μετατοπίσεις μπορούν ν' αγνοηθούν οι όροι 3ης τάξης και άνω, η σχέση **(1 – 30)** προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την έκφραση της δυναμικής ενέργειας της απλής αρμονικής ταλάντωσης :

$$V(x) = \frac{1}{2} \left(\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=0} \right) \cdot x^2 = \frac{1}{2} kx^2 \qquad \textbf{(1 – 31)}$$

Άρα για μικρές απομακρύνσεις από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας το σωματίδιο εκτελεί αρμονική ταλάντωση και σύμφωνα με την **(1–7)** η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης του σωματίου είναι $k = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{k/m}$ και η περίοδός του είναι $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$.